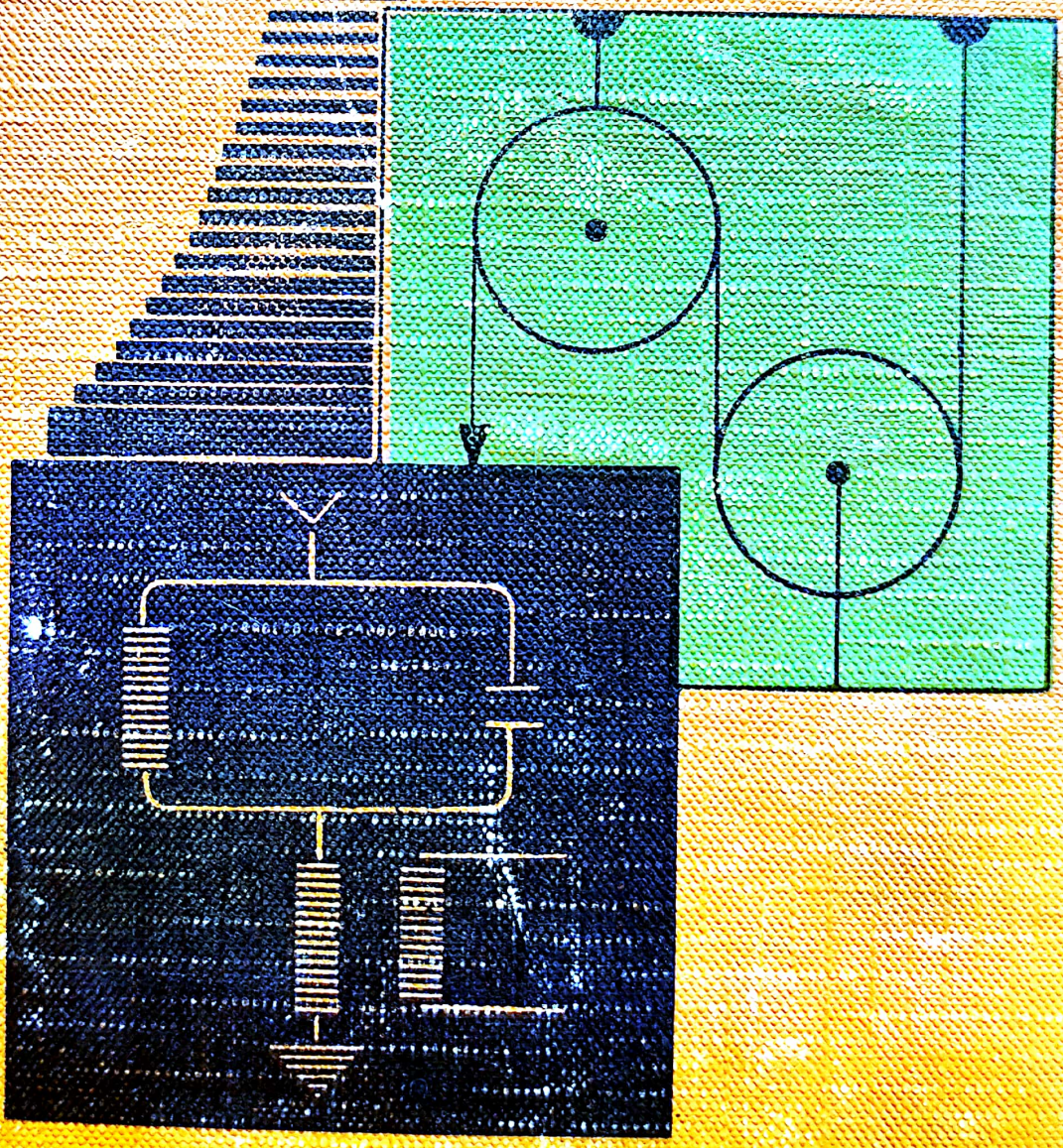
Constantin Necșoiu

Culegere de probleme de fizică



Editura Tehnică

Constantin Necșoiu

Culegere de probleme de fizică

Ediția a doua
revizuită și adăugită

Editura tehnică
București — 1968

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea cuprinde probleme rezolvate de : mecanică, hidro- și aeromecanică, căldură și fizică moleculară, electricitate, oscilații și unde, acustică, optică geometrică, optică fizică și fizică atomică.

Lucrarea se adresează elevilor de curs mediu, teoretic și de specialitate, candidaților la examenele de admitere în institute și facultăți, studenților, profesorilor, inginerilor, tehnicienilor etc.

Redactor responsabil: Ing. AVRAM MARCOVICI
Tehnoredactor: NICOLAE ȘERBĂNESCU
Coperta: CONSTANTIN GULUȚĂ

Dat la cules 01.03.1968 Bun de tipar 20.07.1968 Apărut 1968. Tiraj 48.000+140. Legate. Hîrtie de scris tip I-a de 63 g/m². 610×860/16 Coli editoriale 30,70. Coli de tipar 32,25 A 107/1968 C.Z. pentru bibliotecile mari 53 (076.1) C.Z. pentru bibliotecile mici 53

Tiparul executat la Întreprinderea Poligrafică „Informația"
Adresa: str. Brezoianu 23–25 București

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

Călăuziți de Directivele Congresului al IX-lea al P.C.R. în care se dă o atenție deosebită dezvoltării științei și tehnicii noi precum și îmbunătățirii învățămîntului de toate gradele din țara noastră, am căutat să dăm lucrării de față o formă și un conținut cît mai apropiat de nivelul cerințelor actuale.

Față de prima ediție, apărută în anul 1958, prezenta lucrare a fost revizuită radical, adăugită și îmbunătățită.

În primul rînd a fost întrebuințat sistemul internațional de unități de măsură adoptat și de țara noastră și introdus în școli în anul 1963.

Întreaga lucrare a fost îmbogățită cu capitole și probleme noi de mecanică, electricitate, căldură și fizică moleculară, acustică, optică și fizică atomică.

Tuturor problemelor studiate am căutat să le dăm un caracter aplicativ, urmărind prin aceasta o mai ușoară întipărire a problemelor și difuzarea, în același timp, a științei și tehnicii noi care se aplică în diverse domenii de activitate.

Multe din problemele tratate au fost date la examenele de admitere în învățămîntul superior, unele au fost concepute inspirîndu-ne din concepția și funcționarea unor utilaje și dispozitive moderne, iar altele sînt întocmite după diferite articole apărute în reviste, comunicări sau conferințe de specialitate.

Am căutat să dăm cît mai multe exemple din domeniul mecanizării și automatizării industriei, al cosmonauticii și să dezvoltăm, mai mult decît se face în învățămîntul mediu, partea privind rezistența materialelor.

Am socotit că, față de numeroasele discipline care au apărut și apar continuu în învățămîntul superior de specialitate, este absolut necesar ca absolvenții liceelor sau școlilor tehnice să posede mai multe cunoștințe din domeniul fizicii pentru a le ușura studiile superioare pe care le vor urma.

Pe lîngă elevii învățămîntului mediu, teoretic și profesional de toate gradele, lucrarea poate fi folosită cu succes de studenții din primii ani de facultate, de profesori, de ingineri, de tehnicieni și de alți specialiști care au de rezolvat probleme de fizică.

Desigur că probleme noi sînt infinit de multe și de variate. Din lipsă de spațiu nu am putut alege decît pe cele mai caracteristice și nu le-am putut da decît o singură soluție.

Scanned with OKEN Scanner

Menționăm și de data aceasta că lucrarea trebuie să servească numai ca un îndrumător și un mijloc de control al studiului individual, al analizei amănunțite a fiecărei probleme în parte și a găsirii tuturor soluțiilor prin care pot fi rezolvate.

Aceasta este singura cale de a înțelege clar și corect cursul de fizică care se predă în învățământul mediu.

Prin această lucrare sperăm că am reușit, cel puțin în parte, să aducem o contribuție la îmbunătățirea învățământului în școli și la o pregătire mai temeinică a cadrelor de specialitate din țara noastră.

Autorul

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

Mecanica

A. Cinematica

1. Mișcarea rectilinie

a. Considerații teoretice

1. Spațiul și viteza în mișcarea uniformă sînt

$$s = s_0 \pm vt; \qquad v = \text{const}$$

unde s este spațiul total, s_0 spațiul inițial, v viteza și t timpul.

2. În mișcarea variată, spațiul și viteza sînt

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2},$$

$$v = v_0 \pm at$$

unde v_0 este viteza inițială, iar a este accelerația. Semnul plus este pentru mișcarea uniform accelerată, iar minus pentru cea uniform întîrziată.

3. La căderea corpurilor în vid, spațiul și viteza sînt

$$h = h_0 + v_0 t \pm \frac{gt^2}{2},$$

$$v = v_0 \pm gt$$

unde h este spațiul total, h_0 spațiul inițial și g accelerația gravitației.

Viteza unui corp în cădere cu viteză inițială, după parcurgerea spațiului $h - h_0$ este

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h - h_0)}.$$

Înălțimea maximă la care se poate ridica un corp aruncat vertical în sus cu viteza v_0 este

$$h_{max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar viteza după parcurgerea spațiului $h - h_0$ este

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g(h - h_0)}.$$

4. În sistemul internațional (SI) unitatea de măsură pentru timp este secunda (s), pentru lungime — metrul (m), iar pentru viteză — metrul pe secundă (m/s).

În sistemul CGS, aceste unități sînt: secunda, centimetrul și centimetrul pe secundă.

b. Probleme

1.1. Doi excursioniști D și F trebuie să parcurgă într-o zi distanța $AB = d = 45$ km. Neavînd la dispoziție decît o bicicletă, ei se înțeleg ca D să plece din A cu bicicleta, iar F pe jos. Într-un punct C, excursionistul D va lăsa bicicleta și-și va continua drumul pe jos. Excursionistul F ajungînd pe jos în punctul C va folosi bicicleta pentru a-și continua drumul. Știind că fiecare excursionist are mergînd pe jos, $v = 5$ km/h, iar cu bicicleta $v' = 15$ km/h, se cere:

a) Distanța $AC = x$, așa fel ca D și F să ajungă în același timp în B. b) Distanța de la punctul A pînă la punctul M unde se găsește F în momentul în care D trece prin punctul C. c) Cît timp stă bicicleta nefolosită.

Rezolvare. a) Timpii întrebuințați de excursioniștii D și F sînt, respectiv,

$$t_1 = \frac{x}{v'} + \frac{d - x}{v}; \quad t_2 = \frac{x}{v} + \frac{d - x}{v'}.$$

Trebuind ca $t_1 = t_2$, vom avea

$$\frac{x}{v'} + \frac{d - x}{v} = \frac{x}{v} + \frac{d - x}{v'}. \tag{1}$$

Făcînd înlocuirile și rezolvînd ecuația (1), obținem

$$x = \frac{d}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}500 \text{ km}.$$

b) Excursionistul D, care pleacă cu bicicleta, ajunge în C după timpul $t = x/v'$.

În acest timp, excursionistul F, care merge pe jos, va străbate distanța

$$AM = vt = v\frac{x}{v'} = 5 \cdot \frac{22{,}500}{15} = 7{,}500 \text{ km}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Bicicleta stă nefolosită din momentul în care o părăsește D pînă în momentul în care F ajunge la ea.

Timpul necesar lui F pentru a ajunge la bicicletă este egal cu $t' = x/v$, iar timpul după care D părăsește bicicleta este egal cu $t = x/v'$.

Timpul în care bicicleta stă nefolosită este

$$t'' = t' - t = \frac{x(v' - v)}{vv'} = \frac{22{,}500 \cdot (15-5)}{5 \cdot 15} = 3 \text{ h}.$$

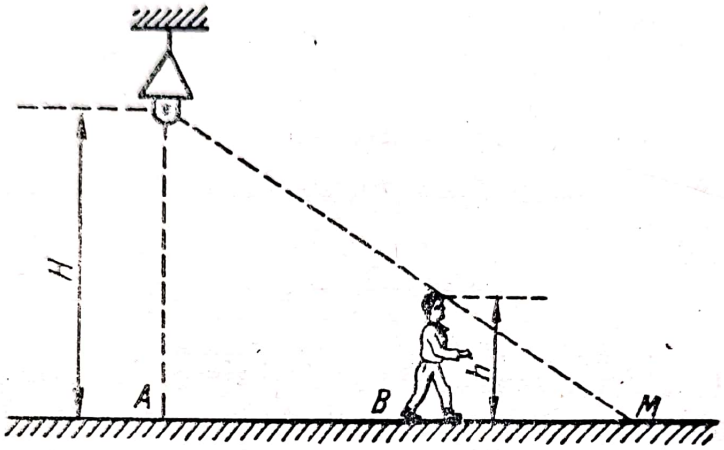


Fig. 1

1.2. Un om de înălțime $h = 1{,}70$ m trece cu viteza constantă $v = 1$ m/s pe sub un felinar, care se află la înălțimea $H = 4$ m deasupra pămîntului. Să se afle cu ce viteză v' se mișcă pe pămînt extremitatea M a umbrei omului (fig. 1).

Rezolvare. Cînd omul se află în A, pe verticala felinarului, umbra sa se găsește tot în A. În timpul t în care omul străbate distanța AB, extremitatea umbrei sale M va străbate spațiul AM și vom avea

$$AB = vt \quad \text{si} \quad AM = v't.$$

Eliminînd pe t între aceste două relații se obține

$$\frac{v}{v'} = \frac{AB}{AM} = \frac{AM - BM}{AM} = 1 - \frac{BM}{AM} = 1 - \frac{h}{H} = \frac{H - h}{H}.$$

Din primul și ultimul raport se scoate

$$v' = v\frac{H}{H - h} = \frac{4}{4 - 1{,}70} = 1{,}74 \text{ m/s},$$

1.3. Loviturile unui ciocan se repetă la un interval de n secunde. Să se determine intervalul de timp care separă două lovituri succesive ale

Scanned with OKEN Scanner

ciocanului, pentru un om care se depărtează de ciocan cu viteza constantă v metri pe secundă, dacă viteza sunetului în aer este egală cu c metri pe secundă.

Rezolvare. Să presupunem că omul se află lîngă ciocan și pornește în momentul în care aude prima lovitură. Sunetul produs de lovitura a doua începe a se propaga cu n secunde mai tîrziu după plecarea omului.

Fie t intervalul de timp care separă cele două lovituri ajunse la urechea omului. Spațiul parcurs de om în acest timp este $s = vt$, iar spațiul străbătut de sunet, $s' = c(t - n)$.

Pentru ca sunetul loviturii a doua să ajungă la urechea omului, trebuie ca $s = s'$ adică

$$vt = c(t - n)$$

de unde scoatem

$$t = \frac{cn}{c - v}.$$

1.4. Două autovehicule pornesc în același timp, din același loc, în aceeași direcție. Primul merge cu 50 km/h, iar al doilea cu 40 km/h. După 30′ pornește din același loc, în aceeași direcție o a treia mașină, care ajunge una dintre aceste mașini cu $1^1/_2$ ore mai tîrziu decît pe cealaltă.

Ce viteză are mașina a treia?

(Olimpiada de fizică, 1954)

Răspuns: $v = 60$ km/h.

1.5. Între localitățile A și B, aflate la distanța $d = 14$ km una de alta, se află o uzină, către care pleacă simultan din A un autocamion și un biciclist, iar din B un grup de muncitori, pe jos.

Autocamionul întîlnește grupul din B după 15 min de la plecarea din A. Întorcîndu-se cu acest transport îl lasă la uzină și plecînd mai departe spre A, întîlnește biciclistul după 25 min de la plecarea din A. Se cere:

a) Viteza grupului de muncitori din B. b) Viteza biciclistului, știind că viteza camionului este de 50 km/h.

(Olimpiada de fizică, 1962)

Rezolvare. a) Presupunem că autocamionul întîlnește grupul de muncitori în D, pe biciclist în F și că uzina se află în C. Dacă u este viteza muncitorilor și v a biciclistului, putem scrie ecuațiile

$$\frac{15}{60} \cdot 50 + \frac{15}{60} u = 14 \qquad (1)$$

$$\frac{25}{60} v + \frac{10}{60} \cdot 50 = 14 - \frac{15}{60} u. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste ecuații se mai pot scrie sub forma

$$50 + u = 56, \tag{3}$$

$$25v + 15u = 340. \tag{4}$$

Din ecuația (3) obținem $u = 6$ km/h.

b) Din ecuația (4) obținem $v = 10$ km/h.

1.6. Două automobile pleacă simultan din orașele A și B mergînd unul spre celălalt. Automobilele se întîlnesc după o oră și, fără a se opri, își continuă drumul fiecare cu viteza anterioară.

Primul automobil ajunge în orașul B cu 27 minute mai tîrziu decît ajunge al doilea în A.

Ce viteze au avut cele două mașini dacă distanța $AB = 60$ km?

(Adm. Instit. Construcții, 1957)

Răspuns:

$$v_1 = 26\frac{2}{3}\text{ km/h}; \quad v_2 = 33\frac{1}{3}\text{ km/h}.$$

1.7. Doi motocicliști pleacă în același moment unul de la București spre Sinaia, celălalt de la Sinaia spre București.

Ei se întîlnesc la 45 km de Sinaia, apoi continuîndu-și drumul ajung la Sinaia respectiv la București și se întorc fără oprire, întîlnindu-se a doua oară la 15 km de București.

Știind că a doua oară s-au întîlnit la trei ore după prima întîlnire, se cere să se calculeze vitezele cu care au mers cei doi motocicliști precum și distanța București-Sinaia.

(Adm. Instit. Politehnic, București, 1957)

Indicație. Ecuațiile mișcării sînt

$$\frac{d-45}{v_1} = \frac{45}{v_2}; \quad \frac{2d-15}{v_1} = \frac{d+15}{v_2}; \quad \frac{d+15}{v_2} = \frac{45}{v_2} + 3.$$

Din aceste ecuații se obține: $d = 120$ km, $v_1 = 50$ km/h și $v_2 = 30$ km/h.

1.8. Două automobile A și B merg unul către altul cu vitezele de 72 km/h și respectiv 54 km/h (fig. 2).

La un moment dat ele se află la distanța $AB = 69$ m.

În acest moment automobilele încep să frîneze și, după ce trec unul pe lîngă altul, automobilul A se oprește în C, iar automobilul B se oprește cu o secundă mai tîrziu în D, astfel încît distanța $CD = 8{,}5$ m. Neglijînd frecările se cer:

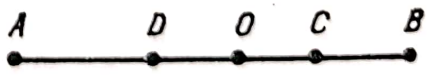


Fig. 2

Scanned with OKEN Scanner

a) Spațiile parcurse de automobile pînă la oprire și timpii după care se opresc. b) Accelerațiile de încetinire. c) Timpul întrebuințat, spațiile parcurse și vitezele pe care le au automobilele în momentul întîlnirii.

Rezolvare. a) Dacă v_0 și v_0' sînt vitezele celor două automobile putem scrie

$$AC = \frac{v_0 t}{2} \quad \text{si} \quad BD = \frac{v_0' (t+1)}{2}.$$

Din examinarea figurii rezultă relația

$$AC + BD = AB + DC.$$

Făcînd înlocuirile respective în această relație, se obține

$$\frac{v_0 t}{2} + \frac{v_0' (t+1)}{2} = 69 + 8{,}5 = 77{,}5.$$

Întrucît $v_0 = 20$ m/s și $v' = 15$ m/s se obține $t = 4$ s; $AC = 40$ m; $BD = 37{,}5$ m.

b) $a = \frac{v_0}{t} = \frac{20}{4} = 5\ \text{m/s}^2$; $a' = \frac{v_0'}{t'} = \frac{15}{5} = 3\ \text{m/s}^2$.

c) Dacă notăm cu t_1 timpul după care se întîlnesc automobilele în punctul O, putem scrie

$$AO = v_0 t_1 - \frac{a t_1^2}{2}; \qquad BO = v_0' t_1 - \frac{a' t_1^2}{2}.$$

Ținînd seama de relația

$$AO + BO = 69$$

rezultă ecuația de gradul al II-lea

$$4t_1^2 - 35t_1 + 69 = 0,$$

din care se obține $t_1 = 3$ s.

Cunoscînd valoarea lui t_1, se obține $AO = 37{,}5$ m; $BO = 31{,}5$ m; $v_1 = 5$ m/s; $v_1' = 6$ m/s.

1.9. Dintr-un robinet curge apă în cadență de 120 picături pe minut. La ce distanță se va găsi picătura a doua de prima după ce aceasta a parcurs $h_1 = 20$ m?

(Adm. Școala Politehnică, București, 1943)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Picăturile se desprind la interval de $60 : 120 = 0{,}5$ s una de alta. Pentru parcurgerea a 20 m, primei picături îi trebuie timpul

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9{,}81}} \approx 2 \text{ s.}$$

Picăturii a doua îi trebuie cu 0,5 s mai puțin, adică $t_2 = 1{,}5$ s și străbate distanța

$$h_2 = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{9{,}81 \cdot 1{,}5^2}{2} = 11 \text{ m.}$$

Cele două picături se găsesc la distanța

$$h = h_1 - h_2 = 20 - 11 = 9 \text{ m.}$$

1.10. Un corp A în cădere liberă parcurge într-un interval oarecare de timp o distanță de h metri, care reprezintă $1/n$ din distanța pe care ar parcurge-o corpul în ultima secundă de cădere. Se cere:

a) Viteza cu care ajunge corpul la sol. b) Înălțimea H de la care cade corpul. c) Durata totală de cădere.

Aplicație numerică. $h = 14{,}7$ m; $n = 3$.

Rezolvare. a) Distanța s parcursă în ultima secundă de cădere este

$$s = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-1)^2}{2} = gt - \frac{g}{2} = v - \frac{g}{2} = nh$$

unde v este viteza la sol. Din ultima relație, rezultă

$$v = nh + g/2 = 44{,}1 + 4{,}95 \approx 49 \text{ m/s.}$$

b) $H = \frac{v^2}{2g} = \frac{49^2}{2 \cdot 9{,}81} = 122{,}5$ m.

c) $t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v}{g} = \frac{49}{9{,}81} = 5$ s.

1.11. Să se determine timpul de acționare al unui declanșator fotografic dacă, în urma fotografierii unei sfere, care cade fără viteză inițială în dreptul unei scări împărțită în centimetri, se produce pe negativ o dungă între diviziunile n_1 și n_2.

Rezolvare. Notînd cu s_1 și s_2 spațiile parcurse de sferă pînă în dreptul diviziunilor n_1 și n_2, iar cu t_1 și t_2 timpurile respective, se obține

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} \quad \text{și} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2s_2}{g}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Timpul de declanșare este

$$t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}). \qquad (1)$$

Diviziunile riglei reprezentînd spațiile respective, relația (1) devine

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}).$$

1.12. Rupîndu-se cablul care susține cabina unui ascensor, aceasta cade liber pe o înălțime de 9,81 m, după care intră în funcțiune sistemul de frînare. După ce mai parcurge un spațiu de 6,91 m, cabina se oprește. Să se calculeze viteza căpătată de cabină în momentul în care începe frînarea și timpul care se scurge de la producerea căderii, pînă la oprire.

Rezolvare

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = 9{,}81\sqrt{2} = 13{,}83 \text{ m/s},$$

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = \frac{13{,}83}{9{,}81} = 1{,}41 \text{ s},$$

$$t_2 = \frac{h_2}{v_m} = \frac{2h_2}{v_1} = \frac{2 \cdot 6{,}91}{13{,}83} \approx 1 \text{ s},$$

$$t = t_1 + t_2 = 1{,}41 + 1 \approx 2{,}41 \text{ s}.$$

1.13. Un parașutist coboară vertical către sol cu viteza constantă. În momentul în care se află la înălțimea de 175 m deasupra solului, parașutistul vede trecînd prin fața lui, cu viteza $v = 10$ m/s, un corp, care a fost aruncat vertical în sus de pe sol (fig. 3).

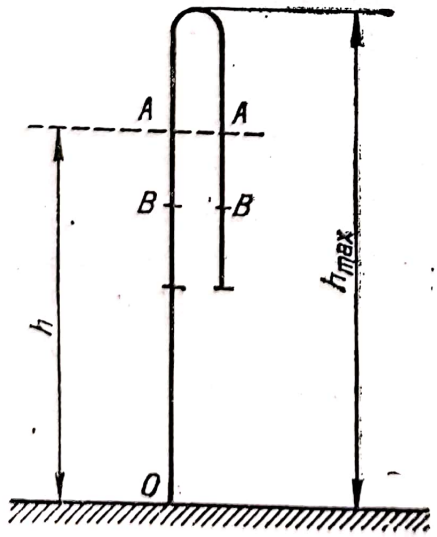


Fig. 3

După timpul $t = 2{,}5$ s, parașutistul vede din nou corpul trecînd prin fața lui, și îndreptîndu-se către sol. Considerînd $g = 10$ m/s² și neglijînd rezistența aerului, se cere:

a) Viteza v_0 de aruncare a corpului de pe sol. b) Viteza u de coborîre a parașutistului. c) La ce înălțime se află parașutistul cînd corpul ajunge din nou pe sol?

Rezolvare. a) Dacă A este punctul primei întîlniri, iar h este distanța OA, avem

$$v_0 = \sqrt{2gh + v^2} = \sqrt{20 \cdot 175 + 100} = 60 \text{ m/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) De la prima pînă la a doua trecere a corpului prin A, s-a scurs un timp

$$t_1 = 2\frac{v}{g} = 2\cdot\frac{10}{10} = 2\,\text{s}.$$

Rezultă că distanța AB pînă la a doua întîlnire a fost parcursă de parașutist în 2,5 s, iar de corp în $t_2 = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$ s și putem scrie,

$$AB = 2{,}5\,u = vt_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 = 10\cdot 0{,}5 + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}25 = 6{,}25\,\text{m};$$

$$u = \frac{6{,}25}{2{,}5} = 2{,}5\,\text{m/s}.$$

c) După ce ajunge a doua oară în A, corpul mai face pînă la căderea pe sol un timp

$$t_3 = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{60-10}{10} = 5\,\text{s}.$$

Din momentul primei întîlniri pînă la căderea corpului pe sol, parașutistul face un timp $t' = t_1 + t_3 = 2 + 5 = 7$ s aflîndu-se deasupra solului la înălțimea

$$h' = h - ut' = 175 - 2{,}5\cdot 7 = 157{,}5\,\text{m}.$$

1.14. Într-un aerostat care se deplasează vertical în jos cu viteza de 5 m/s, se află două corpuri legate între ele printr-un fir inextensibil cu lungimea $l = 15$ m. Se lasă să cadă liber unul din corpuri, iar după o secundă se dă drumul și corpului al doilea. Dacă $g = 10$ m/s², se cere:

a) După cît timp de la aruncarea corpului al doilea, firul începe să stea întins? b) La ce distanță de ultimul corp se află aerostatul cînd firul începe să stea întins? c) Cum se modifică rezultatele de la punctele *a* și *b*, dacă aerostatul stă pe loc tot timpul?

Rezolvare. a) Ambele corpuri au și viteză inițială, egală cu aceea a aerostatului. Dacă aerostatul se află în C la aruncarea primului corp A, spațiul parcurs de A va fi

$$S_1 = v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 5t + 5t^2. \qquad (1)$$

După o secundă aerostatul ajunge din C în C_1 parcurgînd un spațiu $S_3 = 5\cdot 1 = 5$ m. În acest moment se lasă să cadă și corpul B, care parcurge, față de C_1 un spațiu

$$S_2 = v_0(t-1) + \frac{g}{2}(t-1)^2 = 5t^2 - 5t. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca firul să stea întins va trebui ca

$$S_1 - S_2 - S_3 = l\,. \tag{3}$$

Făcînd înlocuirile în (3), se obține $t = 2$ s.

Rezultă că firul va începe să stea întins după o secundă de la lăsarea corpului al doilea.

b) În timpul $t' = t - 1 = 1$ s, corpul B parcurge

$$S_2 = v_0 t' + \frac{g}{2} t'^2 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ m},$$

iar aerostatul parcurge în acest timp distanța

$$C_1C_2 = S_4 = v_0 t' = 5 \cdot 1 = 5 \text{ m}.$$

Corpul B se va găsi deci la 5 m față de aerostat.

c) În acest caz corpurile nu mai au viteză inițială și spațiile parcurse de ele vor fi, respectiv,

$$S_1 = \frac{gt^2}{2} = 5t^2\,; \quad S_2 = \frac{g}{2}(t-1)^2 = 5t^2 - 10t + 5\,.$$

Punînd condiția $S_1 - S_2 = l$, se obține $t = 2$ s.

Deci și în acest caz firul va începe să stea întins tot după timpul $t' = t - 1 = 1$ s. Corpul B se va afla la distanța $S_2 = 5$ m față de aerostatul care stă pe loc.

2. Mișcarea circulară

a. Considerații teoretice

1. Perioada și frecvența mișcării circulare uniforme sînt

$$T = \frac{1}{\nu} \quad \text{și} \quad \nu = \frac{1}{T}\,.$$

Între frecvența ν și numărul n de rotații pe minut există relațiile

$$\nu = \frac{n}{60} \quad \text{și} \quad n = 60\,\nu\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza unghiulară în mișcarea circulară uniformă se măsoară în rad/s, este constantă și are valoarea

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \frac{\pi n}{30}.$$

Viteza liniară în mișcarea circulară uniformă este

$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu.$$

Accelerația normală sau radială este

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2\nu^2 R = R\omega^2.$$

Spațiul S (lungimea arcului) și unghiul φ (în radiani) sînt

$$S = vt \text{ si } \varphi = \omega t.$$

2. Ecuațiile mișcării liniare uniform variate sînt

$$S = v_0 t \pm \frac{1}{2} a_t t^2,$$

$$v = v_0 \pm a_t t,$$

$$a_t = R\varepsilon,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = R(\varepsilon t + \omega_0)^2,$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

unde a_t este accelerația tangențială (m/s²), a_n — accelerația normală (m/s²), a — accelerația totală (m/s²), iar ε — accelerația unghiulară (rad/s²), care este constantă și are valoarea

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}.$$

Ecuațiile unghiulare ale acestei mișcări sînt

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{1}{2}\varepsilon t^2; \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t.$$

Scanned with OKEN Scanner

b. Probleme

1.15. Doi bicicliști aleargă pe circumferința unei piste circulare cu raza $R = 25$ m, pornind de la capetele unui diametru și mergînd în același sens. Primul biciclist face înconjurul pistei de trei ori pe minut. După ce ocolește pista de cinci ori, primul biciclist este ajuns de cel de al doilea. Începînd din acest moment ei merg în sens contrar cu aceleași viteze. Se cere:

a) Numărul de rotații făcut de biciclistul al doilea pînă la întîlnirea cu primul. b) Vitezele liniare și accelerațiile normale ale bicicliștilor. c) Spațiile unghiulare și lungimile parcurse pînă la prima întîlnire. d) Timpul și spațiile parcurse de bicicliști pînă la întîlnirea a doua oară, socotite de la prima întîlnire.

R e z o l v a r e. a) Dacă notăm cu φ_1 și φ_2 spațiile unghiulare parcurse de bicicliști pînă la întîlnire și cu n_1 și n_2 turațiile respective, avem

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi . \tag{1}$$

Întrucît $\varphi_1 = \omega_1 t = \frac{\pi n_1}{30} t$ și $\varphi_2 = \omega_2 t = \frac{\pi n_2}{30} t$ ecuația (1) devine

$$t(n_2 - n_1) = 30 . \tag{2}$$

Dacă primul biciclist face 3 rot/min, atunci el va face 5 rotații în timpul $t = 100$ s.

Înlocuind în relația (2) obținem

$$n_2 = n_1 + \frac{3}{10} = 3 + \frac{3}{10} = \frac{33}{10} = 3{,}3 \text{ rot/min} .$$

b) $v_1 = R\omega_1 = R \cdot \frac{\pi n_1}{30} = 25 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 3}{30} = 7{,}85 \text{ m/s}$,

$$v_2 = R\omega_2 = R \cdot \frac{\pi n_2}{30} = 25 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 3{,}3}{30} = 8{,}635 \text{ m/s} ,$$

$$a_{n_1} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{7{,}85^2}{25} = 2{,}46 \text{ m/s}^2 ,$$

$$a_{n_2} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{8{,}635^2}{25} = 2{,}98 \text{ m/s}^2 .$$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\varphi_1 = \frac{\pi n_1}{30} t = \frac{3{,}14 \cdot 3}{30} \cdot 100 = 31{,}4$ rad,

$$S_1 = R\varphi_1 = 25 \cdot 31{,}4 = 785 \text{ m},$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi n_2}{30} t = \frac{3{,}14 \cdot 3{,}3}{30} \cdot 100 = 34{,}54 \text{ rad},$$

$$S_2 = R\varphi_2 = 25 \cdot 34{,}54 = 863{,}5 \text{ m}.$$

d) În acest caz va trebui să avem

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi\,;\ t(n_1 + n_2) = 60.$$

Din calcule rezultă $t = 9\frac{1}{2} s$; $S_1 = 74{,}75$ m ; $S_2 = 82{,}24$ m.

1.16. Pe aceeași axă se așază două discuri la o distanță de 1,5 m. Sistemul se rotește în jurul axei cu o turație de 1 800 rot/min. Un proiectil se mișcă paralel cu axa și străbate amîndouă discurile în așa fel încît diferența dintre cele două găuri corespunde unui unghi de 30°. Mișcarea proiectilului considerîndu-se uniformă se cere viteza lui.

(G.M.F. nr. 7/1962)

Rezolvare. În timp ce proiectilul parcurge spațiul $s = vt$, discul se rotește cu unghiul $\varphi = \omega t = 2\pi\nu t$.

Din aceste relații rezultă

$$v = \frac{s\omega}{\varphi} = \frac{6}{\pi} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1\,800\,\pi}{30} = 540 \text{ m/s}.$$

1.17. Arătătoarele unui ceasornic sînt suprapuse perfect la orele 12. La ce oră vor face între ele, pentru prima dată, un unghi egal cu un radian?

(Adm. Școala Politehnică, București, 1945)

Rezolvare. Arătătorul mare face ocolul cadranului (adică unghiul de 2π radiani) în 60 min și deci viteza sa unghiulară este

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/min}.$$

Arătătorul mic parcurge unghiul de 2π radiani, în $60 \cdot 12$ min și viteza sa unghiulară este

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{60 \cdot 12} = \frac{\pi}{360} \text{ rad/min}.$$

Fie t timpul după care arătătoarele vor face între ele un unghi de un radian.

Scanned with OKEN Scanner

În acest timp, cele două arătătoare vor descrie respectiv unghiurile

$$\alpha_1 = \omega_1 t \text{ si } \alpha_2 = \omega_2 t .$$

Diferența dintre aceste unghiuri trebuind să fie egală cu un radian, se poate scrie

$$t(\omega_1 - \omega_2) = 1 ,$$

de unde rezultă

$$t = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{360}} = \frac{360}{11\pi} = \frac{360}{11 \cdot 3{,}14} = 10'25'' .$$

1.18 Un punct A de pe suprafața Pămîntului este situat la latitudinea $\lambda = 45°$. Știind că Pămîntul face o rotație completă în jurul axei sale în timp de 24 ore și că raza lui este egală cu $R = 6400$ km, se cere să se calculeze viteza liniară de rotație și accelerația normală a punctului.

Rezolvare. Punctul considerat A (fig. 4) aflîndu-se pe paralela 45°, descrie un cerc cu raza $O'A = r = R \cos \lambda = R \cos 45° = 6\,400 \cdot 0{,}707 = 4\,525$ km $= 4{,}525 \cdot 10^6$ m.

Vitezele, unghiulară și liniară, ale punctului A sînt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{3{,}14}{4{,}32 \cdot 10^4} \text{ rad/s},$$

$$v = r\omega = 4{,}525 \cdot 10^6 \cdot \frac{3{,}14}{4{,}32 \cdot 10^4} = \frac{4{,}525 \cdot 314}{4{,}32} = 332 \text{ m/s}.$$

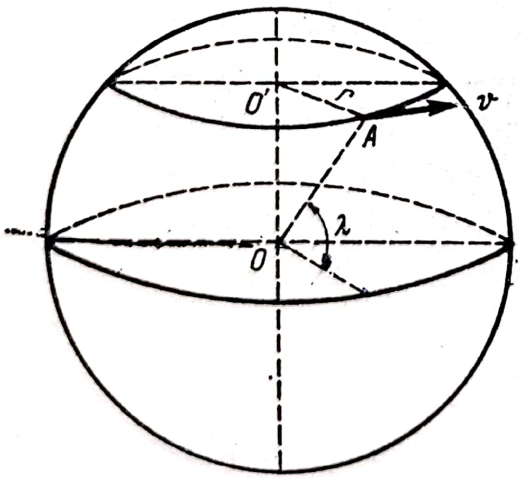


Fig. 4

Accelerația normală a punctului A este

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{332^2}{4{,}525 \cdot 10^6} =$$

$$= \frac{11 \cdot 10^4}{4{,}525 \cdot 10^6} = \frac{11}{452{,}5} = 0{,}024 \text{ m/s}^2.$$

1.19. Tamburul pe care se înfășoară cablul unui ascensor de mină are raza $R = 0{,}5$ m. După 4 s de la pornirea din repaus tamburul ajunge la o turație constantă $n = 30$ rot/min. Se cere:

a) Accelerația unghiulară și tangențială a cablului în mișcarea uniform accelerată.

b) Cîte rotații complete face tamburul pînă ajunge la turația constantă n?

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Ținînd seamă că φ_0 și ω_0 sînt egale cu zero, obținem:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\pi n}{30\,t} = \frac{30\,\pi}{30 \cdot 4} = \frac{\pi}{4}\ \text{rad/s}^2,$$

$$a_t = \varepsilon R = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}\ \text{m/s}^2.$$

$$\text{b)}\ \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2}\varepsilon t^2;\quad 2\pi n' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 16,$$

$$n' = 1\ \text{rot.}$$

1.20. La intrarea într-o curbă mecanicul unei locomotive începe să frîneze în momentul în care locomotiva are viteza $v_0 = 72$ km/h. După 25 s, locomotiva iese din curbă cu viteza $v = 36$ km/h. Știind că porțiunea curbă este în formă de arc de cerc, cu raza $R = 800$ m, se cere:

a) Accelerația tangențială de încetinire a locomotivei. b) Lungimea porțiunii de cale ferată curbă. c) Accelerația totală a locomotivei la ieșirea din curbă.

Rezolvare. a) $v_0 = \frac{72}{3{,}6} = 20\ \text{m/s};\quad v_1 = \frac{36}{3{,}6} = 10\ \text{m/s},$

$$a_t = \frac{v_0 - v_1}{t} = \frac{20 - 10}{25} = 0{,}4\ \text{m/s}^2.$$

$$\text{b)}\ S = \frac{v_0 + v_1}{2}\,t = \frac{20 + 10}{2} \cdot 25 = 375\ \text{m}.$$

$$\text{c)}\ a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}4^2 + \left(\frac{v_1^2}{R}\right)^2} = \sqrt{0{,}16 + \left(\frac{100}{800}\right)^2} = 0{,}418\ \text{m/s}^2.$$

3. Mișcări compuse

a. Considerații teoretice

1. Suma vectorială a vitezelor $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ este un vector $\vec{v}$ care reprezintă diagonala paralelogramului construit pe $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ și are mărimea

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Unghiul α și unghiurile β și γ dintre viteze și rezultanta v sînt date de legea sinusurilor

$$\frac{v_1}{\sin\gamma} = \frac{v_2}{\sin\beta} = \frac{v}{\sin\alpha}.$$

2. Scăderea vitezei $\vec{v}_2$ din viteza $\vec{v}_1$ se face adunînd vectorial viteza $\vec{v}_1$ cu viteza $-\vec{v}_2$.

3. Spațiile și vitezele în aruncarea oblică sub unghiul α față de orizontală sînt

$$x = x_0 \pm v_0 t\cos\alpha\,; \quad y = y_0 \pm v_0 t\sin\alpha \pm \frac{1}{2}gt^2,$$

$$v_x = v_0\cos\alpha\,; \quad v_y = v_0\sin\alpha \pm gt.$$

4. Mișcarea relativă este mișcarea unui mobil față de un sistem de referință, care se găsește el însuși în mișcare.

Mișcarea sistemului de referință mobil față de un sistem fix se numește *mișcare de transport*. Mișcarea mobilului față de sistemul fix se numește *mișcare absolută*. Mișcarea absolută fiind o mișcare compusă, vitezele și accelerațiile se compun vectorial și avem

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t,$$
$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_t$$

unde v_a, v_r, v_t și w_a, w_r, w_t sînt vitezele și accelerațiile absolute, relative și de transport.

Dacă două mobile A și B au vitezele absolute v_A și v_B, viteza relativă a lui A față de B este

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{v}_A + (-\vec{v}_B).$$

b. Probleme

1.21. Un glonț străbătînd un blindaj vertical, își reduce viteza de la $v_0 = 500$ m/s, pe care o avea la intrarea în blindaj, la $v = 200$ m/s, pe care o are la ieșire. Dacă gaura făcută în blindaj se află la 5 m deasupra terenului, se cere:

a) Accelerația de încetinire a glonțului la trecerea prin blindaj: b) Timpul de străbatere a blindajului: c) Distanța la care cade glonțul pe sol după ieșirea din blindaj. d) Timpul de cădere după ieșirea din blindaj și viteza v' cu care glonțul atinge solul.

Grosimea blindajului $S = 0{,}5$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Glonțul trece prin blindaj cu o mișcare uniform întîrziată avînd accelerația

$$a = \frac{v_0^2 - v^2}{2S} = \frac{250\,000 - 40\,000}{2 \cdot 0{,}5} = 210\,000 \text{ m/s}^2 .$$

b) $t = \frac{v_0 - v}{a} = \frac{500 - 200}{210\,000} = \frac{1}{700} = 1{,}43 \cdot 10^{-3}$ s.

c) $x = v \sqrt{\frac{2h}{g}} = 200 \sqrt{\frac{10}{10}} = 200$ m.

d) $t_1 = \frac{x}{v} = \frac{200}{200} = 1$ s ;

$$v' = \sqrt{v^2 + (gt_1)^2} = \sqrt{40\,000 + 100} = \sqrt{40\,100} = 200{,}2 \text{ m/s}.$$

1.22. Din două turnuri A și B cu înălțimile $h_1 = 21{,}73$ m și respectiv $h_2 = 23{,}46$ m (fig. 5) se aruncă simultan două pietre, una contra celeilalte. Distanța dintre turnuri, $d = 6$ m. Piatra de pe turnul A se aruncă orizontal, cu viteza $v_0 = 3$ m/s, iar cea de pe turnul B se aruncă oblic în jos sub un unghi $\alpha = 60°$ față de verticală. Neglijînd rezistența aerului, se cere:

a) După cît timp și ce viteză inițială v_0' trebuie să aibă piatra aruncată din B, pentru ca ambele pietre să se întîlnească între turnuri. b) La ce înălțime față de sol și la ce distanță față de A, se întîlnesc pietrele. c) Vitezele pietrelor în momentul întîlnirii. d) Dacă pietrele trec una pe lîngă alta fără să se ciocnească să se afle dacă ele cad direct pe sol sau ating mai întîi turnurile și la ce înălțime față de sol.

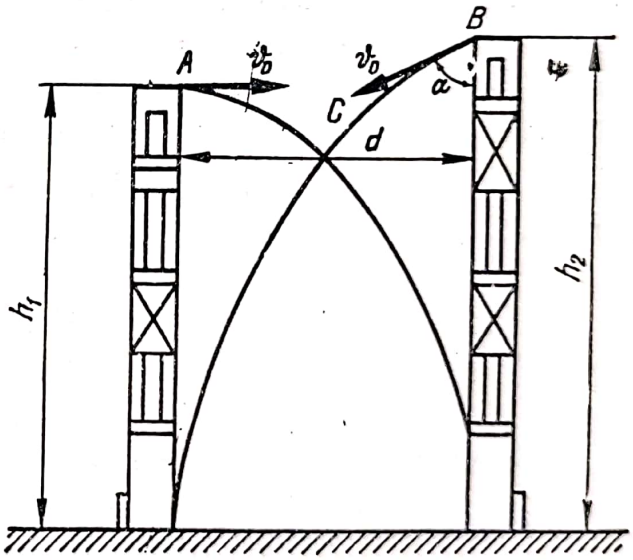


Fig. 5

Indicație și răspuns. a) Pentru a se întîlni între turnuri, trebuie să avem

$$v_0 t + v_0' t \sin\alpha = d \; ; \; h_1 - \frac{gt^2}{2} = h_2 - \left(v_0' t \cos\alpha + \frac{gt^2}{2} \right).$$

Rezolvînd ecuațiile se găsește $t = 1$ s și $v_0' = 2\sqrt{3}$ m/s.

Scanned with OKEN Scanner

b) $h = h_1 - \frac{gt^2}{2} = 16{,}83$ m ; $x = v_0 t = 3$ m .

c) $v_A = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = 10{,}25$ m/s ;

$$v_B = \sqrt{(v_0' \sin\alpha)^2 + (v_0' \cos\alpha + gt)^2} = 11{,}9 \text{ m/s}.$$

d) Piatra aruncată din A atinge turnul B la înălțimea de 2,13 m, iar cea aruncată din B cade chiar lîngă piciorul turnului.

1.23. Un corp este aruncat cu viteza $v_0 = 10$ m/s de la suprafața pămîntului sub un unghi de 60° față de orizontală. De la ce înălțime trebuie să lăsăm, în cădere liberă, un alt corp ca ele să se întîlnească în punctul maxim al primei traiectorii.

Se va neglija rezistența aerului și se va lua $g = 10$ m/s².

(G.M.F., nr. 5/1963)

Răspuns: 7,5 m.

1.24. Dintr-un avion care zboară orizontal cu viteza $v_0 = 90$ km/h la înălțimea $h = 176{,}58$ m trebuie aruncat un pachet în punctul A. Neglijînd rezistența aerului se cere:

a) Timpul scurs pînă la ajungerea pachetului pe pămînt. b) Distanța $AB = x$ de la punctul A pînă la punctul B, în care verticala avionului întîlnește pămîntul în momentul lansării. c) Viteza cu care ajunge pachetul pe pămînt.

Rezolvare. a) Pachetul are o mișcare uniformă cu viteza v_0 pe orizontală și o mișcare uniform accelerată (cădere liberă) pe verticală

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 176{,}58}{9{,}81}} = \sqrt{36} = 6 \text{ s}.$$

b) $x = v_0 t = \frac{90000}{3600} \cdot 6 = 150$ m.

c) Cele două componente ale vitezei, după orizontală și verticală, sînt respectiv

$$v_x = v_0 \text{ si } v_y = gt.$$

Viteza cu care pachetul va atinge pămîntul va fi deci

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} = \sqrt{625 + 3\,464} \approx 64 \text{ m/s}.$$

1.25. Un pescar plutește cu barca pe un rîu, contra curentului. La trecerea pe sub un pod A, îi scapă din barcă undița, care plutește pe apă dusă de curent. După o jumătate de oră pescarul ajungînd în punctul B observă lipsa undiței

Scanned with OKEN Scanner

și întorcîndu-se o ajunge în punctul C la 5 km mai departe de pod. Care este viteza v' a apei, dacă pescarul vîslește la fel, cu viteza v în ambele sensuri ale rîului?

R e z o l v a r e. Față de apă, barca are viteza relativă v, iar față de punctul fix A, ea are viteza absolută v_a. Față de punctul A, apa are viteza de transport v'. Timpul necesar bărcii pentru parcurgerea distanței AB este

$$t_1 = \frac{AB}{v_a} = \frac{AB}{v - v'} = \frac{1}{2}; \quad AB = \frac{v - v'}{2}.$$

La întoarcere, distanța BA este parcursă în timpul

$$t_2 = \frac{BA}{v'_a} = \frac{BA}{v + v'} = \frac{v - v'}{2(v + v')}.$$

Pentru parcurgerea distanței AC, este necesar timpul

$$t_3 = \frac{AC}{v + v'} = \frac{5}{v + v'}.$$

Undița care plutește cu viteza apei, parcurge distanța AC în timpul

$$t_4 = \frac{AC}{v'} = \frac{5}{v'}.$$

Din enunțul problemei rezultă

$$t_1 + t_2 + t_3 = t_4. \tag{1}$$

Făcînd înlocuirile în (1) se obține

$$\frac{1}{2} + \frac{v - v'}{2(v + v')} + \frac{5}{v + v'} = \frac{5}{v'}. \tag{2}$$

Din relația (2) rezultă $v' = 5$ km/h.

1.26. Un fluviu se varsă în mare prin două brațe. La vărsarea în mare este cîte un port pe fiecare braț. Lungimea brațelor este de 96 km și respectiv 75 km. O navă parcurge distanța de la un port la celălalt navigînd pe fluviu, atît la ducere cît și la întoarcere, în 9 ore. Viteza navei este de 20 km/h.

Care este viteza curentului pe cele două brațe?

R e z o l v a r e. Fie v_1 și v_2 vitezele de transport ale curentului apei pe brațele de 96 km și 75 km. Viteza navei este viteza relativă. Ținînd seamă

Scanned with OKEN Scanner

că timpul de parcurgere este egal cu spațiul împărțit prin viteza absolută a navei, se pot scrie ecuațiile

$$\frac{96}{20 - v_1} + \frac{75}{20 + v_2} = 9\,; \quad \frac{96}{20 + v_1} + \frac{75}{20 - v_2} = 9,$$

de unde rezultă $v_1 = 4$ km/h și $v_2 = 5$ km/h.

1.27. Pe o linie ferată dublă trece un tren accelerat A, cu viteza constantă de 72 km/h, iar în sens contrar trece un tren personal B, cu viteza constantă de 54 km/h. Un călător aflat în accelerat vede personalul trecînd prin fața lui timp de 10 s.

Se cere:

a) Lungimea trenului personal. b) Dacă trenul personal ar merge în același sens cu acceleratul, cît timp ar vedea călătorul, trenul personal trecînd prin fața lui?

Rezolvare. a) Viteza trenului accelerat, $v_A = \frac{7\,200}{3\,600} = 20$ m/s, iar viteza trenului personal $v_B = \frac{5400}{3600} = 15$ m/s.

Presupunînd că dăm sistemului AB o mișcare de translație cu o viteză egală și de sens contrar cu viteza lui A, călătorul va sta pe loc, iar viteza relativă a lui B față de A va fi

$$v_{BA} = v_A - (-v_B) = v_A + v_B = 20 + 15 = 35 \text{ m/s}.$$

Lungimea trenului personal este

$$l = v_{BA} \cdot t_1 = 35 \cdot 10 = 350 \text{ m}.$$

b) Procedînd ca la punctul a, rezultă că

$$v'_{BA} = v_A - (+v_B) = v_A - v_B = 20 - 15 = 5 \text{ m/s}.$$

$$t_2 = \frac{l}{v'_{BA}} = \frac{350}{5} = 70 \text{ s}$$

1.28. Trei bărci se deplasează pe o apă liniștită și pe drumuri paralele, distanțele dintre ele fiind egale cu $a = 20$ m și $b = 6$ m. Barca A se deplasează cu viteza constantă v_1, iar bărcile B și C se deplasează în sens contrar cu vitezele constante v_2 și v_3.

Scanned with OKEN Scanner

Cunoscînd vitezele $v_1 = 5$ m/s și $v_2 = 4$ m/s, se cere viteza v_3, astfel încît bărcile să se găsească în permanență în linie dreaptă (fig. 6).

Rezolvare. Se dă întregului sistem o mișcare de translație cu o viteză egală și de sens contrar cu viteza bărcii B. În acest caz barca B va rămîne fixă. Barca A va avea o viteză relativă față de barca B

$$v_{AB} = v_1 + v_2 = 9 \text{ m/s}.$$

Barca C va avea o viteză relativă față de barca B

$$v_{CB} = v_3 - v_2 .$$

Pentru ca bărcile să se afle permanent în linie dreaptă, trebuie ca triunghiurile ABA' și CBC' să fie asemenea, adică să avem

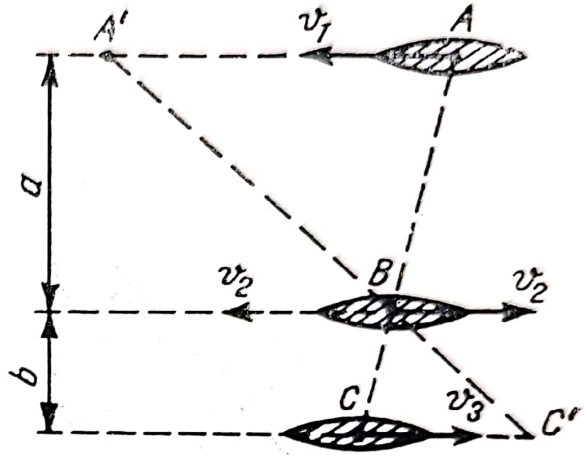


Fig. 6

$$\frac{AA'}{CC'} = \frac{a}{b} = \frac{(v_1 + v_2)\,t}{(v_3 - v_2)\,t} = \frac{v_1 + v_2}{v_3 - v_2},$$

unde AA' și CC' sînt spațiile parcurse de A și C.

Din relațiile precedente rezultă

$$a(v_3 - v_2) = b(v_1 + v_2);$$

$$v_3 = \frac{b(v_1 + v_2) + a v_2}{a} = \frac{bv_1 + v_2(a + b)}{a} = \frac{6 \cdot 5 + 4 \cdot 26}{20} = 6{,}7 \text{ m/s}.$$

1.29. Doi pietoni A și B vin unul spre altul cu viteze constante egale, $u = 1$ m/s pe timp de ploaie, ambii purtînd umbrele.

Ploaia cade oblic cu viteza constantă $v = 3$ m/s venind în fața lui A și făcînd cu verticala un unghi $\gamma = 30°$ (fig. 7). La întîlnire, pietonii se opresc. Se cere:

a) Cu ce viteză cad picăturile de ploaie pe cele două umbrele în timpul mersului? b) Cu ce unghiuri trebuie să țină pietonii mînerele umbrelelor înclinate față de direcția ploii pentru ca aceasta să nu-i ude în timpul mersului? c) Care sînt vitezele cu care ajung picăturile de ploaie pe umbrele și care sînt unghiurile de înclinare ale mînerelor față de direcția ploii, cînd pietonii s-au oprit?

Rezolvare. a) Viteza relativă a picăturilor de ploaie din punctul C (fig. 7, *a*) în raport cu pietonul A, presupus imobil, este

$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_c + \vec{v}_A$$

unde $v_c = v$ este viteza absolută a picăturilor de ploaie, iar $v_A = -u$ — viteza de transport a acestor picături.

Scanned with OKEN Scanner

Din triunghiul vitezelor rezultă

$$v_{CA} = v_r = \sqrt{v^2 + u^2 + 2\,v\,u\cos(90° - \gamma)} = \sqrt{9 + 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 \cos 60°} =$$
$$= \sqrt{10 + 3} = \sqrt{13} = 3{,}6 \text{ m/s}.$$

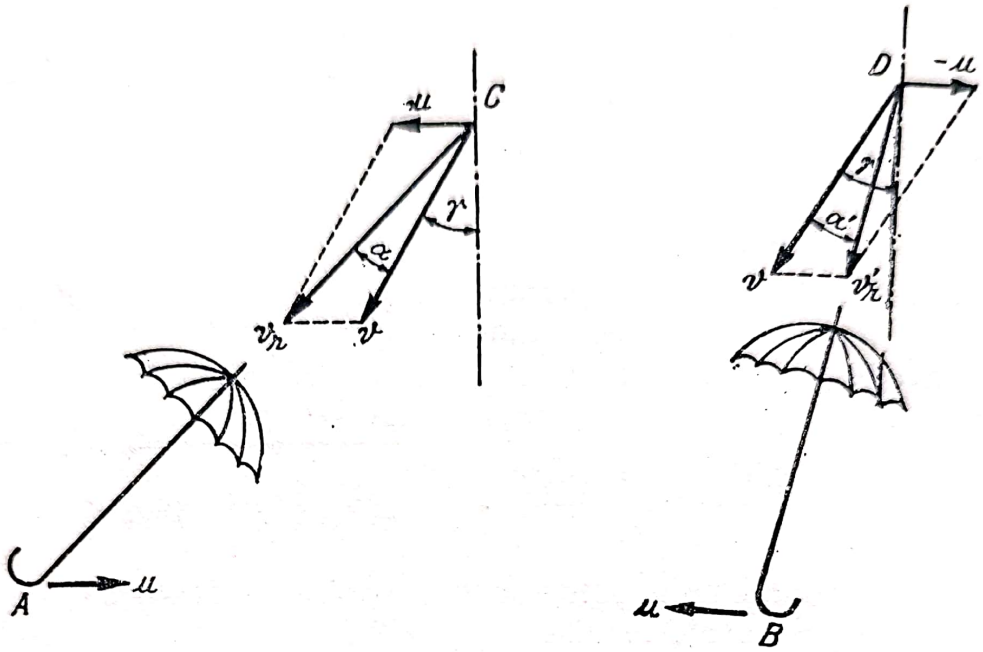


Fig. 7, a

Umbrela pietonului A este lovită deci de picături cu viteza $v_r = 3{,}6$ m/s.

Viteza picăturilor de ploaie din punctul D (fig. 7, a) în raport cu pietonul B, este

$$v_{DB} = v'_r = \sqrt{v^2 + u^2 + 2\,v\,u\cos(90° + \gamma)} = \sqrt{9 + 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{10 - 3} = \sqrt{7} = 2{,}64 \text{ m/s}.$$

b) Dacă notăm cu α și α' unghiurile făcute de vitezele relative cu direcția ploii în cele două cazuri, avem

$$\frac{u}{\sin\alpha'} = \frac{v_r}{\sin 120°}; \quad \sin\alpha = \frac{u}{v_r}\sin 120° = \frac{1}{3{,}6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}24\,; \; \alpha = 13°50'$$

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{v'_r}{\sin 60°}; \quad \sin\alpha' = \frac{u}{v'_r}\sin 60° = \frac{1}{2{,}64} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1{,}73}{5{,}28} = 0{,}327\,; \quad \alpha' = 19°10'.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) În acest caz ambele umbrele sînt lovite cu viteza ploii $v = 3$ m/s. Pietonul A va ține umbrela în direcția ploii, aplecată înainte, iar pietonul B va ține umbrela aplecată înapoi, pe spate, așa cum se vede în fig. 7, b.

1.30. Un glonț trece printr-un vagon care merge cu viteza $v_1 = 36$ km/h pe drum drept. Împușcătura s-a executat perpendicular pe direcția mișcării vagonului, iar gaura de ieșire a glonțului se află cu $a = 0{,}06$ m mai în urma vagonului decît gaura de intrare. Să se afle viteza v_2 a glonțului, dacă lățimea vagonului este $b = 2{,}88$ m.

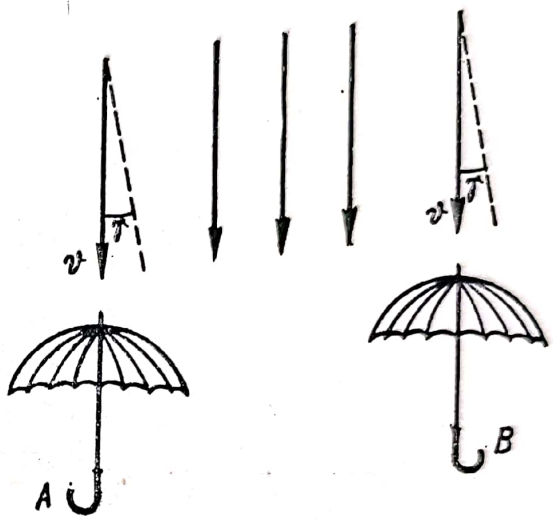


Fig. 7, b

Rezolvare. Timpul în care glonțul parcurge lățimea vagonului este egal cu timpul în care vagonul se deplasează pe distanța a

$$t = \frac{b}{v_2} = \frac{a}{v_1}.$$

Din această relație rezultă

$$v_2 = \frac{b}{a} v_1 = \frac{2{,}88}{0{,}08} \cdot 10 = 480 \text{ m/s}.$$

1.31. Un rîu are lățimea $AB = 72$ m și viteza de curgere $u = 0{,}8$ m/s. Din punctul A, de pe unul din maluri, pleacă un înotător către malul opus cu viteza relativă $v = 0{,}6$ m/s perpendiculară pe direcția de curgere. O dată cu înotătorul pleacă din punctul D, situat la mijlocul rîului, o barcă venind în sens opus curgerii, către înotător. După ce se întîlnesc în punctul O, înotătorul își continuă drumul pînă la celălalt mal, iar barca se întoarce înapoi cu aceeași viteză relativă cu care a pornit din D.

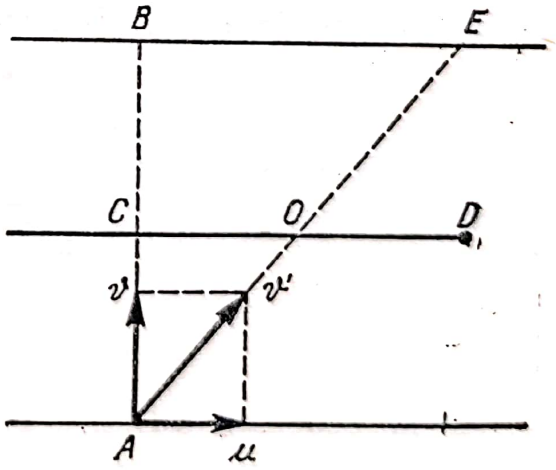


Fig. 8

Cunoscîndu-se $CD = 96$ m, punctul C aflîndu-se la mijlocul rîului pe direcția AB (fig. 8), se cer:

a) Spațiile AO și DO parcurse de înotător și de barcă pînă în punctul de întîlnire. b) Timpul după care are loc întîlnirea și viteza relativă a bărcii. c) Distanța BE la care ajunge înotătorul pe celălalt mal, față de punctul de plecare A. d) Distanța pe care o parcurge barca la înapoiere cînd înotătorul ajunge pe malul opus, în punctul E.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Înotătorul înaintează cu viteza

$$v' = \sqrt{v^2 + u^2} = \sqrt{0{,}36 + 0{,}64} = \sqrt{1} = 1 \text{ m/s}.$$

Spațiul parcurs de înotător pînă la întîlnirea cu barca se scoate din asemănarea triunghiurilor Avv' și AOC

$$\frac{AO}{v'} = \frac{OC}{u} = \frac{AC}{v}. \tag{1}$$

Din relația (1) rezultă

$$AO = \frac{v'}{v} \cdot AC = \frac{1}{0{,}6} \cdot 36 = 60 \text{ m};$$

$$OC = \frac{u}{v} \cdot AC = \frac{0{,}8}{0{,}6} \cdot 36 = 48 \text{ m}.$$

În timp ce înotătorul parcurge spațiul AO, barca parcurge distanța

$$OD = CD - OC = 96 - 48 = 48 \text{ m}.$$

b) Timpul după care are loc întîlnirea este

$$t = \frac{AO}{v'} = \frac{60}{1} = 60'' = 1'.$$

Dacă se notează cu u' viteza relativă a bărcii, ea va înainta în sens contrar curgerii cu viteza $u' - u$ și se va putea scrie

$$OD = (u' - u)\, t \tag{2}$$

Din relația (2) rezultă

$$u' - u = \frac{OD}{t} = \frac{48}{60} = 0{,}8 \text{ m/s},$$

$$u' = 0{,}8 + u = 0{,}8 + 0{,}8 = 1{,}6 \text{ m/s}.$$

c) Se vede ușor că

$$BE = 2\,OC = 2 \cdot 48 = 96\ m.$$

d) Întrucît $AO = OE$, înotătorul va face din O în E tot un timp de 60 s. În acest timp, barca va parcurge în josul apei, un spațiu

$$OF = (u' + u)\, t = (1{,}6 + 0{,}8)\, 60 = 2{,}4 \cdot 60 = 144 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4. Transmiterea mișcărilor, mecanisme și dispozitive

a. Considerații teoretice

Determinarea vitezelor și accelerațiilor diferitelor elemente în mișcare se face prin metodele arătate în paragrafele anterioare, ținînd seamă de principiile de funcționare a diferitelor elemente în mișcare.

b. Probleme

1.32. Un biciclist merge pe o șosea orizontală cu viteza $v = 18{,}36$ km/h. Roțile bicicletei au diametrul $D = 68$ cm. Roata mare a angrenajului cu lanț are diametrul $d_1 = 18$ cm, iar roata mică a acestui angrenaj, fixată pe axul roții din spate, are diametrul $d_2 = 6$ cm. Pedala bicicletei, solidară cu roata mare a angrenajului, are lungimea brațului, $l = 20$ cm. Să se afle:

a) De cîte ori pe minut se rotește pedala și piciorul biciclistului. b) Accelerația pedalei și a piciorului biciclistului. c) Întrerupîndu-se pedalarea, bicicleta se oprește după un minut, să se calculeze ce spațiu va mai parcurge bicicleta pînă la oprire. Frecările cu șoseaua se neglijează.

Rezolvare. a) Roata mică a angrenajului are viteza unghiulară

$$\omega = \omega_2 = \frac{v}{R} = \frac{5{,}1}{0{,}34} = 15 \text{ rad/s}.$$

Viteza unghiulară ω_1 a roții mari a angrenajului și a pedalei este

$$\omega_1 = \frac{d_2}{d_1} \cdot \omega_2 = \frac{6}{18} \cdot 15 = 5 \text{ rad/s}.$$

Numărul de învîrtituri pe minut ale pedalei și piciorului biciclistului este

$$n_1 = \frac{30\,\omega_1}{\pi} = \frac{30 \cdot 5}{3{,}14} = 48 \text{ rot/min}.$$

b) Accelerația pedalei și a piciorului biciclistului este

$$a_n = l\,\omega_1^2 = 0.2 \cdot 25 = 5 \text{ m/s}^2$$

c) Din momentul în care biciclistul încetează pedalarea, mișcarea devine uniform încetinită, iar spațiul parcurs pînă la oprire este

$$s = v_m t = \frac{v_0 + 0}{2} t = \frac{5{,}1 \cdot 60}{2} = 153 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.33. Roata R_1 montată pe axul O_1 comandă prin fricțiune roata R_2 montată pe axul O_2 (fig. 9). Știind că $n_1 = 300$ rot/min și $n_2 = 450$ rot/min, iar $O_1O_2 = 20$ cm, se cer:

a) Razele R_1 și R_2 ale celor două roți. b) Viteza liniară comună în punctul de contact al roților. c) Accelerația normală în punctul de contact.

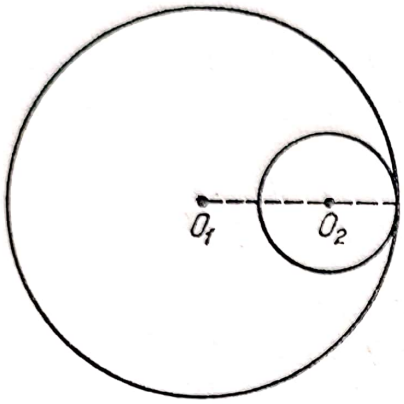


Fig. 9

Rezolvare. a) Din relațiile: $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ și $R_2 - R_1 = O_1O_2$ rezultă

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{450}{300} = 1{,}5 \text{ si } R_1 - R_2 = 20 \text{ cm}$$

de unde se obține $R_1 = 60$ cm și $R_2 = 40$ cm.

b) $v = R_1\omega_1 = R_2\omega_2 = 0{,}60 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 300}{30} =$

$= 18{,}84$ m/s.

c) Accelerațiile normale în acest punct sînt diferite

$$a_{n_1} = \frac{v^2}{R_1} = \frac{18{,}84^2}{0{,}60} = \frac{355}{0{,}60} = 591 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{n_2} = \frac{v^2}{R_2} = \frac{18{,}84^2}{0{,}40} = \frac{355}{0{,}40} = 887 \text{ m/s}^2.$$

1.34. Unul dintre dispozitivele mașinii de textile nețesute primește mișcarea de la un pinion *I* cu 36 dinți și cu turația de 120 rot/min. Pinionul angrenează cu roata *II* care are 180 dinți dispuși pe marginea uneia dintre fețele laterale ale roții.

Pe axul roții *II* și solidar cu aceasta se află roata *III* cu diametrul $d_3 = 18$ cm, cuplată prin curea cu roata *IV* de diametru $d_4 = 12$ cm. Pe axul roții *IV* și solidar cu aceasta, se află roata *V* cu diametrul $d_5 = 20$ cm, cuplată prin curea cu roata *VI* de diametru $d_6 = 10$ cm (fig. 10). Se cere:

a) Numărul de rotații pe minut al roții *VI*. b) Viteza liniară a curelelor care cuplează roțile *III*–*IV* și *V*–*VI*.

Rezolvare.

a) $n_2 = \frac{z_1}{z_2} n_1 = \frac{36}{180} \cdot 120 = \frac{120}{5} = 24$ rot/min ;

$$n_4 = \frac{d_3}{d_4} \cdot n_3 = \frac{d_3}{d_4} \cdot n_2 = \frac{18}{12} \cdot 24 = 36 \text{ rot/min} ;$$

$$n_6 = \frac{d_5}{d_6} n_5 = \frac{d_5}{d_6} \cdot n_4 = \frac{20}{10} \cdot 36 = 2 \cdot 36 = 72 \text{ rot/min.}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Viteza liniară a curelei care cuplează roţile *III–IV*

$$v_3 = r_3\omega_3 = \frac{d_3}{2}\cdot\frac{\pi n_3}{30} = \frac{0{,}18}{2}\cdot\frac{3{,}14\cdot 24}{30} = 0{,}09\cdot 2{,}512 = 0{,}226 \text{ m/s.}$$

Viteza liniară a curelei care cuplează roţile *V–VI*

$$v_5 = r_5\omega_5 = \frac{d_5}{2}\cdot\frac{\pi n_5}{30} = \frac{0{,}20}{2}\cdot\frac{3{,}14\cdot 36}{30} = \frac{0{,}314\cdot 36}{30} = 0{,}376 \text{ m/s.}$$

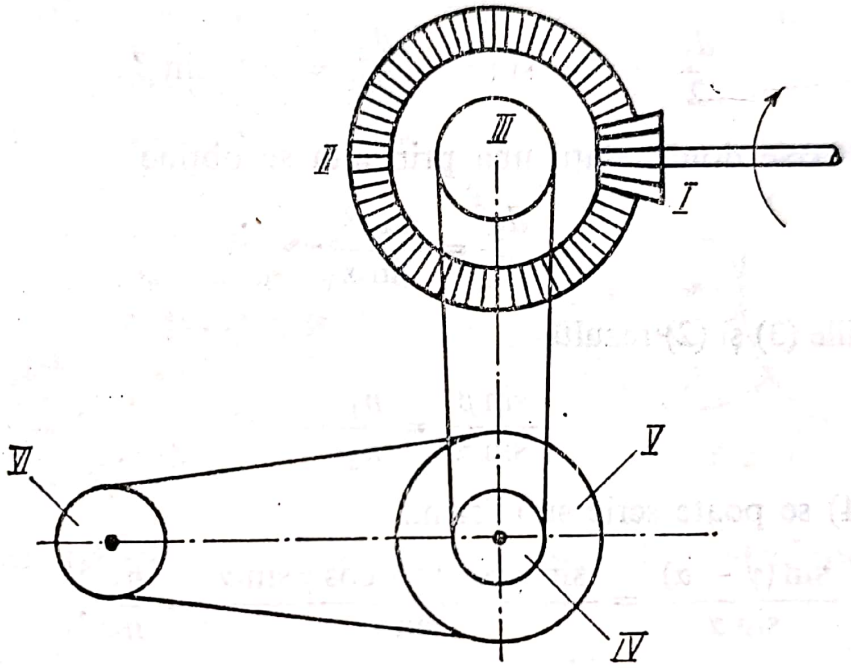


Fig. 10

1.35. Mecanismul de transmisie a mişcării unei maşini este format dintr-un angrenaj de două roţi dinţate, conice, cu dinţii drepţi şi cu axele concurente, făcînd între ele un unghi $\gamma = 45°$ (fig. 11). Roata mică conducătoare are diametrul primitiv $D_1 = 10$ cm, numărul de dinţi $z_1 = 25$ şi turaţia $n_1 = 150$ rot/min. Turatia roţii conduse trebuie să fie de 75 rot/min. Se cer:

a) Unghiurile de înclinare sub care trebuie fixate cele două roţi pe maşina de frezat pentru tăierea dinţilor. b) Diametrul şi numărul de dinţi ai roţii conduse. c) Pasul dinţilor şi modulul frezei cu care se vor tăia dinţii roţilor.

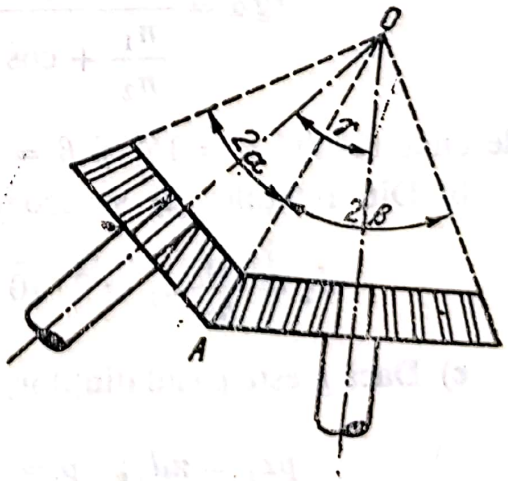


Fig. 11

Scanned with OKEN Scanner

R e z o l v a r e. a) Relaţia geometrică dintre unghiurile de înclinare a dinţilor celor două roţi este

$$\alpha + \beta = \gamma = 45^\circ. \tag{1}$$

Dacă d_2, z_2, n_2 sînt elementele roţii conduse, avem

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}. \tag{2}$$

Din examinarea figurii rezultă că

$$\frac{d_1}{2} = OA \cdot \sin\alpha\,; \quad \frac{d_2}{2} = OA \cdot \sin\beta\,.$$

Împărţind cele două relaţii una prin alta se obţine

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Din relaţiile (3) şi (2) rezultă

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{4}$$

Relaţia (4) se poate scrie sub forma

$$\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{n_2},$$

$$\sin\gamma\operatorname{cotg}\alpha - \cos\gamma = \frac{n_1}{n_2}.$$

Din această relaţie rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\gamma}{\frac{n_1}{n_2} + \cos\gamma} = \frac{\sin 45^\circ}{\frac{150}{76} + \cos 45^\circ} = 0{,}257$$

de unde rezultă $\alpha = 15^\circ$ şi $\beta = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

b) Din relaţiile (2) se scoate

$$d_2 = \frac{n_1}{n_2} d_1 = 2 \cdot 10 = 20\text{ cm}, \quad z_2 = \frac{n_1}{n_2} z_1 = 50\text{ dinţi}.$$

c) Dacă p este pasul dinţilor, avem

$$pz_1 = \pi d_1; \quad p = \frac{\pi d_1}{z_1} = \frac{3{,}14 \cdot 100}{25} = 12{,}5\text{ mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin definiție, modulul este raportul dintre pasul dinților și numărul π, adică

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{12{,}5}{3{,}14} = 4 \text{ mm}.$$

Dinții vor fi tăiați cu o freză modul 4.

1.36. Transmisia dințată a mecanismului de ceas de la acul secundar la acul minutar, este compusă din patru roți dințate avînd numărul de dinți $z_1 = 8$, $z_2 = 60$ și $z_3 = 8$ (fig. 12). Se cere să se calculeze numărul de dinți ai roții *4* și viteza unghiulară a roților *2* și *3*.

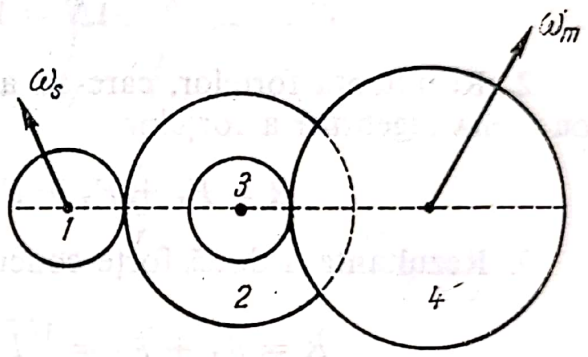


Fig. 12

Rezolvare. Acul secundar se rotește o dată cu roata *1* și are viteza unghiulară ω_s. Pentru roțile *1* și *2* se poate scrie relația

$$\frac{\omega_s}{\omega_2} = \frac{2}{z_1}. \qquad (1)$$

Roata *3* are aceeași viteză unghiulară cu roata *2*. Pentru roțile *3* și *4* se poate scrie relația

$$\frac{\omega_2}{\omega_m} = \frac{z_4}{z_3}. \qquad (2)$$

Din înmulțirea relațiilor (1) și (2) rezultă

$$\frac{\omega_s}{\omega_m} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}. \qquad (3)$$

Ținînd seamă că $\omega_s = 60\,\omega_m$ se obține

$$\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = 60, \quad z_4 = \frac{z_1 z_3}{z_2} = \frac{8 \cdot 8}{60} \cdot 60 = 64 \text{ dinți}.$$

Din relația (1) rezultă

$$\omega_2 = \frac{z_1}{z_2}\,\omega_s = \frac{8}{60} \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{225} \text{ rad/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

B. Statica

5. Compunerea și descompunerea forțelor, cupluri, momente, centre de greutate

a. Considerații teoretice

1. Unitatea de forță în sistemul internațional este *newtonul* (N). Un submultiplu al newtonului este *dyna* (dyn)

$$1N = 10^5 \text{ dyn.}$$

2. Rezultanta forțelor, care au același suport (aceeași direcție) este egală cu suma algebrică a forțelor

$$R = F_1 \pm F_2 \pm F_3 \pm \ldots \pm F_n = \sum F_i.$$

3. Rezultanta a două forțe concurente care fac între ele un unghi α, este

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}.$$

Unghiurile β și γ făcute de forțele F_1 și F_2 cu rezultanta R se află din relația

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

4. Greutatea unui corp de masă m este forța de atracție către centrul Pământului și este

$$G = mg = V\rho g = V \cdot \gamma$$

unde m este masa corpului, în kg; g — accelerația gravitației, în m/s²; V — volumul corpului, în m³; ρ — densitatea corpului, în kg/m³, iar γ — greutatea specifică a corpului, în N/m³.

5. Pe cale analitică, rezultanta mai multor forțe concurente se obține proiectînd forțele pe două axe rectangulare Ox și Oy

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

unde X și Y sînt sumele algebrice ale proiecțiilor forțelor pe cele două axe.

Unghiul făcut de rezultantă cu axa Ox, este dat de relația

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{R}.$$

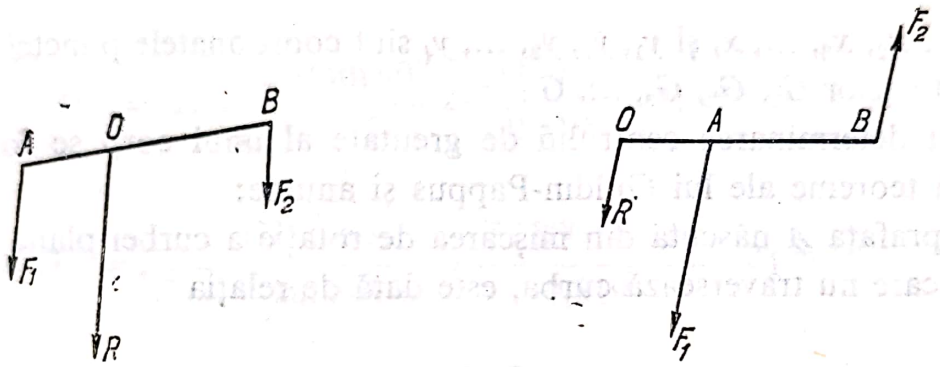
Scanned with OKEN Scanner

6. Momentul unei forțe F în raport cu un punct O, este egal cu produsul dintre forța F și distanța d de la punct la suportul forței

$$M_0 = F \cdot d.$$

7. Rezultanta a două forțe paralele și de același sens are direcția și sensul celor două forțe F_1 și F_2, iar mărimea ei este

$$R = F_1 + F_2.$$



a b

Fig. 13

Punctul de aplicație O al rezultantei (fig. 13, *a*) se află între punctele de aplicație A și B ale celor două forțe și este dat de relația

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OB}{OA}.$$

Rezultanta a două forțe paralele și de sens contrar este

$$R = F_1 - F_2.$$

Punctul de aplicație O al rezultantei se află pe prelungirea liniei AB, de partea forței celei mai mari (fig. 13, *b*), astfel încît

$$\frac{OB}{OA} = \frac{F_1}{F_2}.$$

8. Două forțe paralele, egale și de sens contrar formează un cuplu.

9. Compunerea mai multor forțe paralele se face compunînd forțele două cîte două, sau mai ușor, cu ajutorul teoremei lui Varignon, după care, momentul rezultantei în raport cu un punct oarecare O, este egal cu suma momentelor forțelor componente în raport cu același punct O

$$Rx = F_1x_1 \pm F_2x_2 \pm \ldots \pm F_nx_n = \sum F_ix_i.$$

10. Centrul de greutate al unui corp se determină descompunînd corpul în părți cu forme geometrice regulate, ale căror centre de greutate pot fi ușor găsite.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu G_1, G_2, G_3, ..., G_n greutăţile corpurilor geometrice cunoscute şi aplicăm teorema lui Varignon în raport cu două axe rectangulare, coordonatele centrului de greutate al corpului sînt date de relaţiile

$$x = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i} \quad \text{şi} \quad y = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i}$$

în care x_1, x_2, x_3, ..., x_i şi y_1, y_2, y_3, ..., y_i sînt coordonatele punctelor de aplicaţie ale forţelor G_1, G_2, G_3, ..., G_i.

Pentru determinarea centrului de greutate al unui corp se folosesc des cele două teoreme ale lui Guldin-Pappus şi anume:

a) Suprafaţa A născută din mişcarea de rotaţie a curbei plane L în jurul unei axe care nu traversează curba, este dată de relaţia

$$A = L \cdot 2\pi\eta.$$

b) Volumul V născut din mişcarea de rotaţie a suprafeţei plane A în jurul unei axe care nu o traversează, este dat de relaţia

$$V = A \cdot 2\pi\eta,$$

unde η este distanţa de la centrul de greutate al curbei plane L sau al suprafeţei A, pînă la axa de rotaţie.

b. Probleme

1.37. Să se găsească efortul care se produce în contrafişa AC şi în stîlpul AB de sprijin (fig. 14) datorită acţiunii forţei $P = 58\,800$ N, la lovirea tamponului vagonului. Înclinarea contrafişei faţă de orizontală este de 35°.

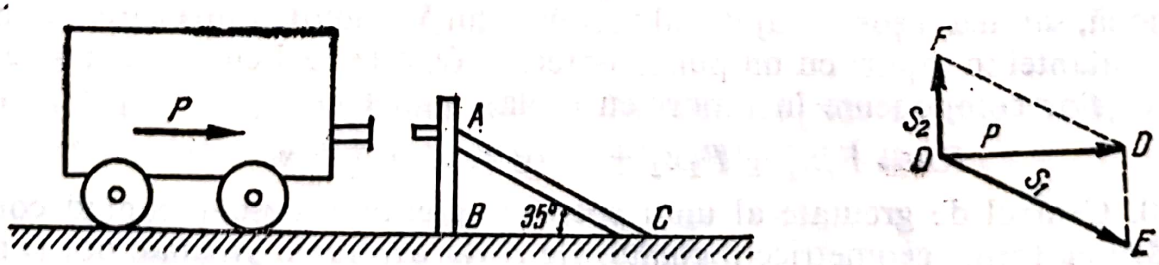


Fig. 14

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Descompunînd forța P în două componente, S_1 după direcția contrafișei și S_2 după direcția stîlpului și aplicînd teorema sinusurilor, se obține

$$\frac{OE}{\sin 90^\circ} = \frac{ED}{\sin 35^\circ} = \frac{OD}{\sin 55^\circ},$$

$$OE = S_1 = \frac{OD \sin 90^\circ}{\sin 55^\circ} = \frac{58\,800}{0{,}819} = 71\,794\,\text{N},$$

$$ED = OF = S_2 = \frac{OD \sin 35^\circ}{\sin 55^\circ} = \frac{58\,800 \cdot 0{,}574}{0{,}819} = 41\,209\,\text{N}.$$

Se vede ușor că stîlpul este supus unui efort de întindere, iar contrafișa unui efort de comprimare.

1.38. O lampă avînd greutatea $P = 29{,}4$ N, este suspendată cu ajutorul a două fire AB și BC, dintre care primul este orizontal. Să se afle tensiunile T_1 și T_2 din aceste fire, dacă $AB = 1{,}1$ m, $BC = 1{,}8$ m și $DC = 2$ m (fig. 15).

Rezolvare. Se descompune forța P în două componente T_1 și T_2 după direcțiile AB și BC, după cum se vede în fig. 15.

Din asemănarea triunghiurilor BEF și BCH, rezultă

$$\frac{EF}{CH} = \frac{BE}{BC} = \frac{BF}{BH}.$$

Ținînd seamă că $EF = T_1$; $CH = 0{,}9$ m; $BE = T_2$; $BC = 1{,}8$; $BF = P = 29{,}4$ N și $BH = \sqrt{1{,}8^2 - 0{,}9^2} = 1{,}56$ m, rezultă

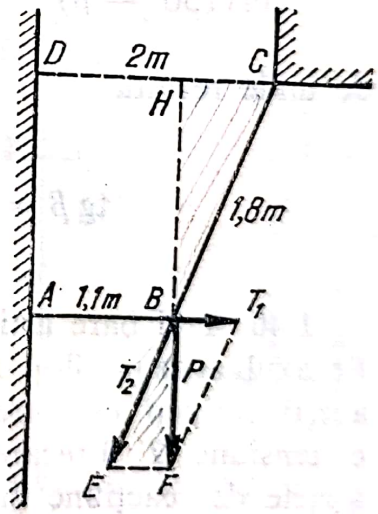


Fig. 15

$$\frac{T_1}{0{,}9} = \frac{T_2}{1{,}8} = \frac{29{,}4}{1{,}56},$$

$$T_1 = \frac{29{,}4 \cdot 0{,}9}{1{,}56} = 16{,}95\,\text{N}, \quad T_2 = \frac{29{,}4 \cdot 1{,}8}{1{,}56} = 33{,}91\,\text{N},$$

Scanned with OKEN Scanner

1.39. La construirea unei case se ridică o grindă de oțel cu ajutorul unui scripete (fig. 16). Un lucrător trage lateral un capăt al frînghiei cu forța $F_2 = 490$ N pentru a evita atingerea grinzii de perete. Celălalt capăt, trecut peste scripete, este tras cu o forță $F_1 = 3\,920$ N, unghiul α avînd 150°. Ce greutate are grinda? Ce unghi face frînghia superioară cu verticala?

(Olimpiada de Fizică, Cluj, 1955)

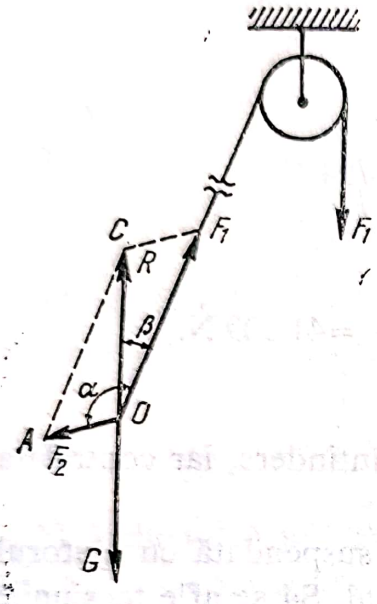


Fig. 16

Rezolvare. Fie O punctul grinzii de care se leagă frînghia. Rezultanta R a forțelor $F_1 = 3\,920$ N și $F_2 = 490$ N este egală și de sens contrar cu greutatea G a grinzii, are direcția verticală și mărimea

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

$$R = \sqrt{3\,920^2 + 490^2 + 2 \cdot 3\,920 \cdot 490 \cos 150°} = 3\,636\ \text{N}.$$

Rezultă că $G = R = 3\,636$ N.

În triunghiul OAC, se poate scrie

$$\frac{F_1}{\sin(150° - \beta)} = \frac{F_2}{\sin\beta}\ ;\ \frac{3\,920}{\sin 150° \cos\beta - \cos 150° \sin\beta} = \frac{490}{\sin\beta}$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{16 - \sqrt{3}} = \frac{1}{14{,}27} = 0{,}070,\ \beta = 4°.$$

1.40. Trei bare articulate la capete formează un triunghi oarecare ABC. Pe axul articulațiilor din vîrfurile A, B, C este fixat cîte un scripete. Peste acești scripeți este trecut un cablu închis care prin strîngere este supus la o tensiune T. Frecarea în axele scripeților fiind neglijabilă, să se afle forțele de reacțiune din articulații (fig. 17).

Rezolvare. Tensiunea T fiind aceeași pe toată lungimea cablului, asupra fiecărei articulații vor acționa două forțe egale T, îndreptate după laturile triunghiului ABC.

Luînd separat vîrful A și forțele care acționează asupra lui, se observă că forța de reacțiune R_A din articulația A este egală și de semn contrar cu

Scanned with OKEN Scanner

rezultanta celor două forțe T. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ADA' se obține

$$\frac{R_A}{\sin(\pi - A)} = \frac{T}{\sin\frac{A}{2}}; \quad \frac{R_A}{\sin A} = \frac{T}{\sin\frac{A}{2}}.$$

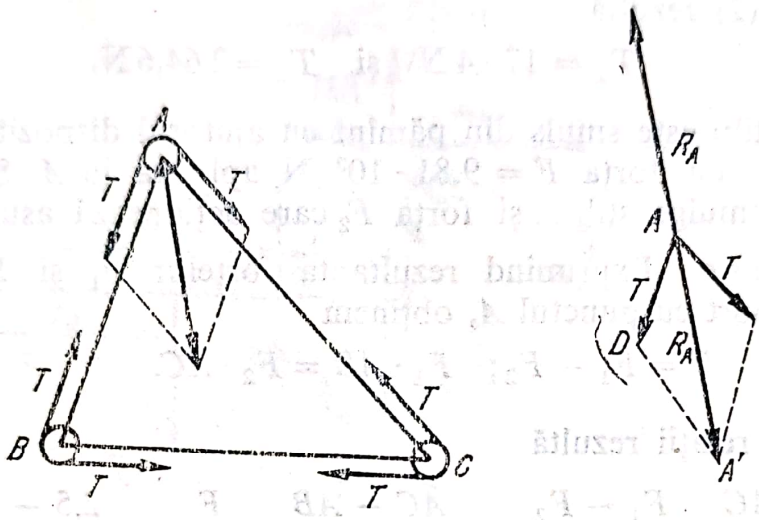


Fig. 17

Din aceste relații rezultă

$$R_A = \frac{T \sin A}{\sin\frac{A}{2}} = 2T\cos\frac{A}{2}.$$

În mod analog se obține

$$R_B = 2T\cos\frac{B}{2} \text{ și } R_C = 2T\cos\frac{C}{2}.$$

1.41. O scîndură AB, de lungime $l = 1$ m și greutate neglijabilă, este susținută la capete de două cabluri care o țin în poziție orizontală. Cablul din A este agățat de tavan, iar cablul din B este trecut peste un scripete de diametru $D = 0{,}40$ m și susținut de un om în greutate de 705,6 N. Să se calculeze tensiunile din cablurile de susținere (fig. 18).

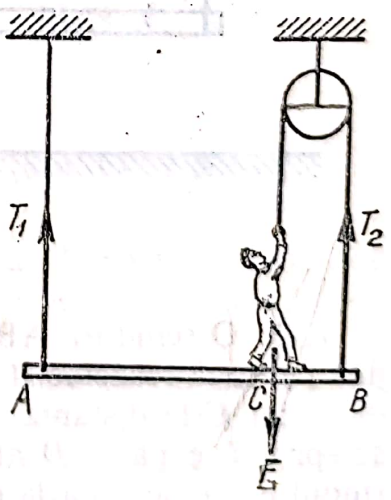


Fig. 18

Rezolvare. Fie T_1 și T_2 tensiunile în cablurile din A și B. Omul apasă asupra scîndurii cu forța $F = G - T_2$.

Forța F fiind egală cu rezultanta forțelor T_1 și T_2, avem

$$T_1 + T_2 = F = G - T_2; \quad T_2 = \frac{G - T_1}{2}. \tag{1}$$

Momentele forțelor în raport cu C, ne dau

$$T_1 \cdot AC = T_2 \cdot BC; \quad 0{,}6\, T_1 = 0{,}4\, T_2. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă

$$T_1 = 176{,}4\ \text{N} \quad \text{și} \quad T'_2 = 264{,}6\ \text{N}.$$

1.42. Un stîlp este smuls din pămînt cu ajutorul dispozitivului reprezentat în fig. 19, cu forța $F = 9{,}81 \cdot 10^3$ N aplicată în A. Să se determine forța F_1 care smulge stîlpul și forța F_2 care acționează asupra reazemului.

Rezolvare. Exprimînd rezultanta forțelor F_1 și F_2 și momentele acestora în raport cu punctul A, obținem

$$F = F_1 - F_2; \quad F_1 \cdot AB = F_2 \cdot AC,$$

Din aceste relații rezultă

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AC}{AB}, \frac{F_1 - F_2}{F_2} = \frac{AC - AB}{AB}, \frac{F}{F_2} = \frac{2{,}5 - 2}{2} = \frac{1}{4},$$

$$F_2 = 4F = 4 \cdot 9{,}81 \cdot 10^3 = 39{,}24 \cdot 10^3\ \text{N}, \quad F_1 = 49{,}05 \cdot 10^3\ \text{N}.$$

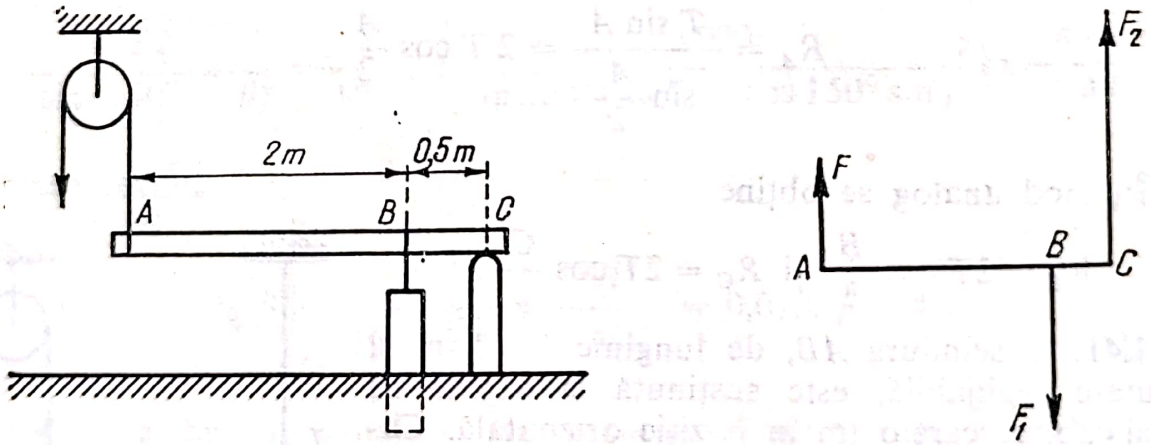


Fig. 19

1.43. O scîndură AB de lungime $l = 3$ m și greutate $G = 392$ N se sprijină pe două reazeme A și C (fig. 20). Reazemul A este situat la capătul scîndurii, iar C la distanța de 2,5 m față de A. Pe capătul scurt al scîndurii AB se sprijină capătul D al altei scînduri DE de greutate $G' = 196$ N care, la rîndul ei, se sprijină la celălalt capăt pe un reazem E. Sistemul aflîndu-se în echilibru, se cere să se calculeze reacțiunile din reazemele A, C și E.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Se separă scîndura DE, asupra căreia acţionează forţa G', reacţiunea R_D datorită scîndurii AB şi reacţiunea R_E a reazemului E. Rezultă imediat că $R_D = R_E = G'/2 = 98$ N.

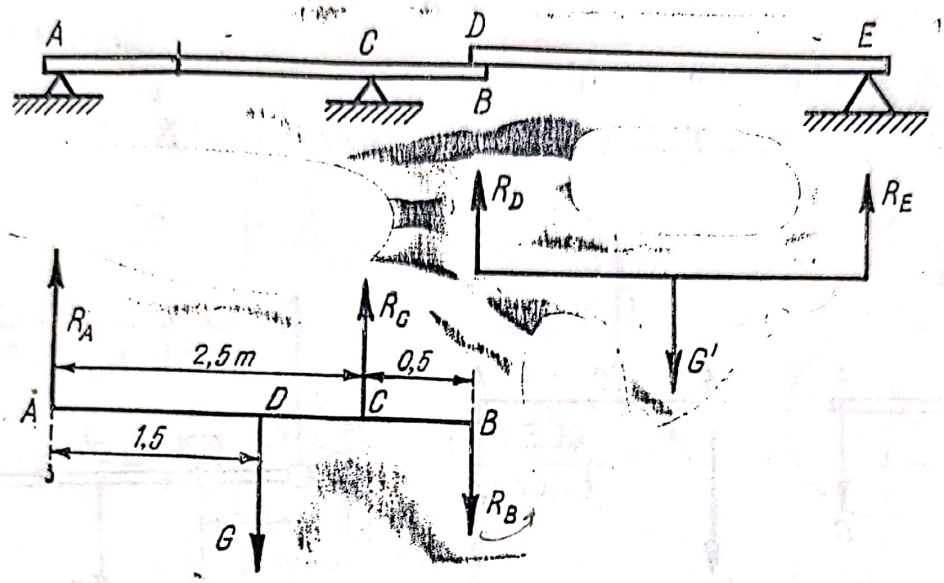


Fig. 20

Se separă acum scîndura AB asupra căreia acţionează greutatea G, reacţiunea R_A a reazemului A, reacţiunea R_C a reazemului C şi reacţiunea $R_B = R_D = 98$ N, datorită scîndurii DE.

Luînd momentele forţelor în raport cu A, obţinem

$$R_B l - R_c(l - BC) + G\frac{l}{2} = 0,$$

$$98 \cdot 3 - 2{,}5\,R_c + 392 \cdot 1{,}5 = 0, \quad R_c = 352{,}8 \text{ N}.$$

Reacţiunea R_A se obţine din relaţia

$$R_A + R_c = R_B + G, \quad R_A = 98 + 392 - 352{,}8 = 137{,}2 \text{ N}.$$

1.44. La construcţia unei clădiri se întrebuinţează dispozitivul următor: o bară AB de lungimea $l = 2$ m este rezemată de pervazul ferestrei într-un punct C, la distanţa $AC = 1{,}5$ m (fig. 21).

Capătul B este susţinut de pardoseală cu ajutorul unui cablu, iar de capătul A este suspendat podul de lucru avînd o greutate $G = 2\,450$ N, inclusiv lucrătorii. Să se afle forţa care apasă asupra pervazului şi tensiunea din cablu.

Rezolvare. Suprimăm reazemul C şi legătura şi introducem în locul lor forţele F_1 şi F_2.

Scanned with OKEN Scanner

Luînd momentele forţelor în raport cu punctul B, obţinem

$$G \cdot AB = F_1 \cdot CB, \quad F_1 = G \cdot \frac{AB}{CB} = 2\,450 \cdot \frac{2}{0{,}5} = 9\,800\,\text{N}$$

Forţa F_2 se obţine din ecuaţia

$$F_2 = F_1 - G = 9\,800 - 2\,450 = 7\,350\,\text{N}$$

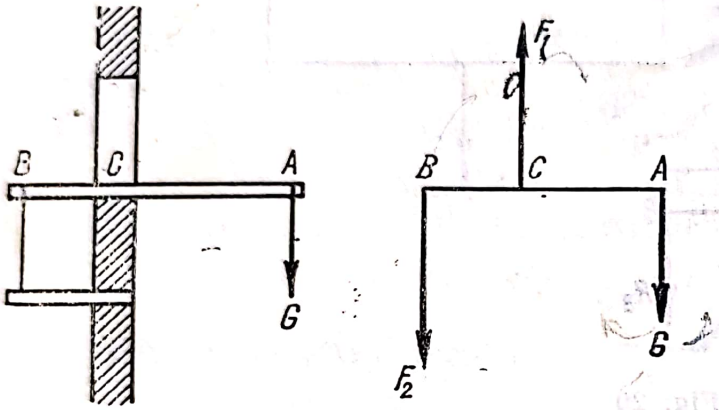


Fig. 21

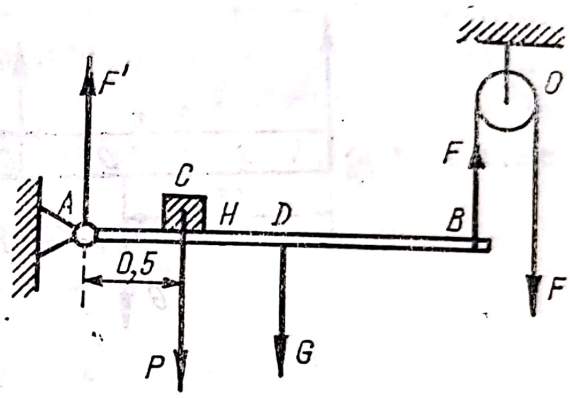


Fig . 22

1.45. Cu ce forţă F trebuie să se tragă de cablul trecut peste scripetele fix O, pentru a susţine orizontal o bară AB de lungime $l = 2$ m şi greutate $G = 98$ N şi o greutate $P = 147$ N situată în punctul C la distanţa $AC = 0{,}5$ m de articulaţia A? Să se calculeze, de asemenea, reacţiunea articulaţiei A (fig. 22).

Rezolvare. Luînd momentele forţelor în raport cu articulaţia A, obţinem

$$F \cdot l - G \cdot \frac{l}{2} - P \cdot AC = 0,$$

$$F = \frac{G}{2} + P \cdot \frac{AC}{2} = 49 + 147 \cdot \frac{0{,}5}{2} = 85{,}75\,\text{N}.$$

Reacţiunea F' din articulaţia A se obţine din ecuaţia de echilibru

$$F' + F = G + P, \; F' = G + P - F = 98 + 147 - 85{,}75 = 159{,}25\,\text{N}.$$

1.46. Două bile netede cu centrele în B şi C avînd razele de 10 cm şi respectiv 7 cm şi greutăţile $G_1 = 294$ N şi $G_2 = 98$ N, sînt suspendate de punctul A prin frînghiile $AD = 20$ cm şi $AE = 17$ cm (fig. 23). Linia centrelor BC face cu orizontala un unghi $\alpha = 30°$. Se cere:

Scanned with OKEN Scanner

a) Unghiul β făcut de frînghia AE cu orizontala. b) Forţele de întindere în frînghii, T_1 şi T_2. c) Forţa N cu care bilele apasă una asupra celeilalte.

Rezolvare. a) Aflăm unghiurile A, B, C ale triunghiului ABC cu ajutorul formulelor trigonometrice cunoscute

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \text{şi}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

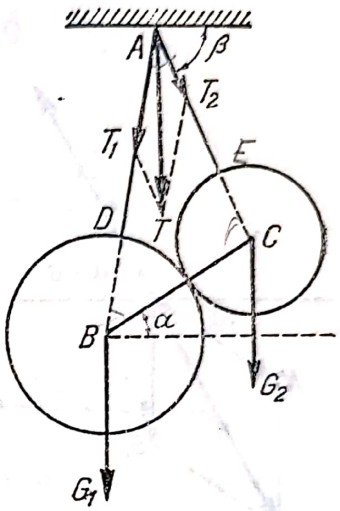


Fig. 23a

Ţinînd seama că $a=17$; $b=24$; $c=30$ şi $p=35{,}5$ cm, se obţine

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{11{,}5\cdot 5{,}5}{35{,}5\cdot 18{,}5}}=\sqrt{\frac{63{,}25}{656{,}75}}=$$

$$=\sqrt{0{,}0963}=0{,}3104,$$

$$\frac{\hat{A}}{2}=17^\circ 15',\quad \hat{A}=34^\circ 30',$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{18{,}5\cdot 5{,}5}{35{,}5\cdot 11{,}5}}=\sqrt{\frac{101{,}75}{408{,}25}}=\sqrt{0{,}2492}=0{,}499,$$

$$\frac{\hat{B}}{2}=26^\circ 30',\quad \hat{B}=53^\circ,\quad \hat{C}=92^\circ 30',$$

$$\hat{\beta}=\hat{C}-\hat{\alpha}=92^\circ 30'-30^\circ=62^\circ 30'.$$

Unghiul format de frînghia AD cu orizontala, este

$$\hat{\gamma}=\hat{\beta}+\hat{\alpha}=53^\circ+30^\circ=83^\circ.$$

b) Pentru ca sistemul să fie în echilibru, trebuie ca rezultanta T a greutăţilor G_1 şi G_2 să treacă prin punctul A şi să fie paralelă cu acestea, deci

$$T=G_1+G_2=294+98=392\ \text{N}.$$

Pentru aflarea eforturilor din frînghii, descompunem forţa T în componentele T_1 şi T_2 după direcţia firelor şi se scrie relaţia sinusurilor

$$\frac{T}{\sin A}=\frac{T_1}{\sin(T,T_2)}=\frac{T_2}{\sin(T,T_1)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd înlocuirile, se obţine

$$\frac{392}{\sin 34°30'} = \frac{T_1}{\sin 27°30'} = \frac{T_2}{\sin 7°},$$

$$\frac{392}{0{,}56641} = \frac{T_1}{0{,}46175} = \frac{T_2}{0{,}12187}.$$

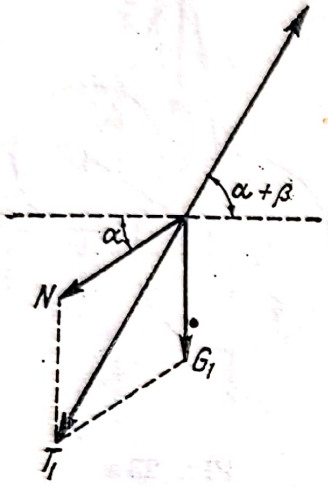


Fig. 23, b

Din această relaţie se obţine

$$T_1 = \frac{46\,175}{56\,641} \cdot 392 = 0{,}815 \cdot 392 = 319{,}48 \text{ N},$$

$$T_2 = \frac{12\,187}{56\,641} \cdot 392 = 0{,}215 \cdot 392 = 84{,}28 \text{ N}.$$

Pentru aflarea reacţiunilor bilelor izolăm bila B şi introducem în centrul B forţa de legătură T_1 şi reacţiunea N dintre cele două bile (fig. 23, b).

Pentru ca bila B să fie în echilibru, trebuie ca rezultanta dintre greutatea sa şi reacţiunea N din partea bilei C să fie egală şi opusă forţei T_1.

Făcînd proiecţiile forţelor pe orizontală, se obţine

$$T_1 \cos(\alpha + \beta) = N \cos \alpha.$$

Din această relaţie se scoate

$$N = \frac{T_1 \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = \frac{319{,}48 \cdot 0{,}12 \cdot 187}{0{,}865} = 319{,}48 \cdot 0{,}14 = 44{,}73 \text{ N}.$$

1.47. Să se calculeze cu ajutorul teoremei lui Guldin-Papus, poziţia centrului de greutate a ariilor din fig. 24 a, b, c, d:

a) Triunghiului isoscel cu baza a şi înălţimea h. b) Trapezului isoscel cu baza mare a, baza mică b şi înălţimea h. c) Semicercului de rază R. d) Sfertului de cerc de rază R.

R e z o l v a r e. a) Prin rotirea triunghiului în jurul laturii BC, iau naştere două conuri şi se poate scrie

$$2 \cdot \frac{\pi AH^2 \cdot BH}{3} = \frac{BC \cdot AH}{2} \cdot 2\pi\eta,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$\eta = \frac{2 \cdot BH \cdot AH}{3BC} = \frac{2 \cdot BH \cdot AH}{6BH} = \frac{h}{3}.$$

b) În acest caz, se obține

$$2 \cdot \frac{\pi \cdot DE^2 \cdot AE}{3} + \pi \cdot DE^2 \cdot EF = \frac{(AB + DC)\, DE}{2} \cdot 2\pi\eta.$$

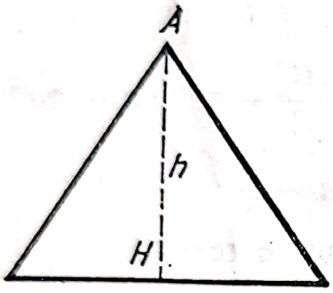


Fig. 24, a

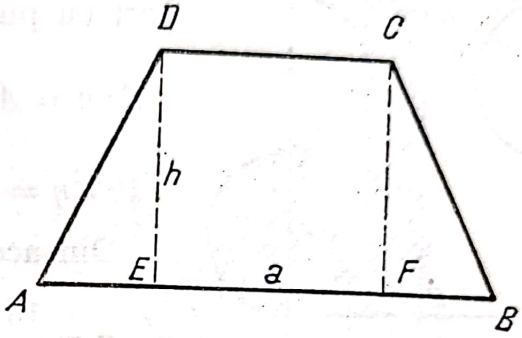


Fig. 24, b

Făcînd simplificările, se obține

$$\eta = \frac{DE}{3} \cdot \frac{AB + 2\,EF}{AB + DC} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}.$$

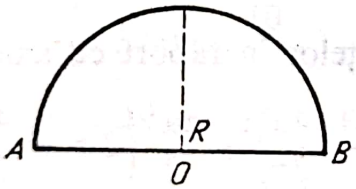


Fig. 24, c

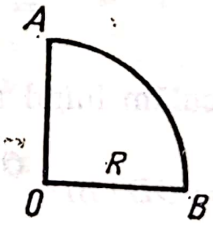


Fig. 24, d

c) Prin rotirea semicercului în jurul axei AB, ia naștere o sferă și se poate scrie

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot 2\pi\eta, \qquad \eta = \frac{4R}{3\pi}.$$

d) Prin rotirea ariei în jurul axelor OB sau OA, ia naștere o semisferă și se poate scrie relația

$$\frac{4\pi R^3}{6} = \frac{\pi R^2}{4} \cdot 2\pi\eta, \qquad \eta = \frac{4R}{3\pi}.$$

1.48. Un vas are forma și dimensiunile din fig. 25. Se cere:
a) Poziția centrului de greutate față de fundul vasului. b) Capacitatea vasului determinată cu ajutorul teoremei lui Guldin-Papus.

Rezolvare. a) Aria secțiunii transversale $ABCD$ este

$$S = AB \cdot AC - \pi a^2 + \pi a^2 = AB \cdot AC = 4a \cdot 4a = 16a^2.$$

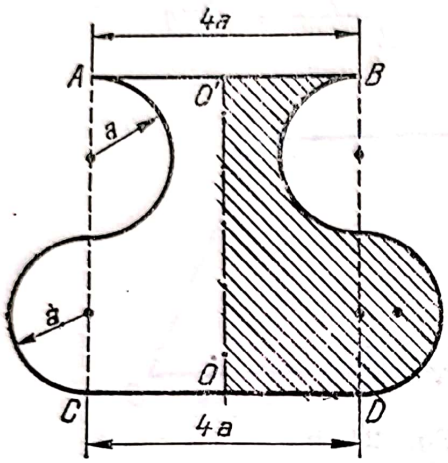


Fig. 25

Notînd cu η distanța de la baza CD la centrul de greutate și luînd momentele forțelor în raport cu punctul O, se obține

$$S \cdot \eta = AB \cdot AC \cdot \frac{AC}{2} + \pi a^2 \cdot a - \pi a^2 \cdot 3a,$$

$$16a^2\eta = 16a^2 \cdot 2a - 2a\pi a^2 = 2a^3(16 - \pi).$$

Din această ecuație rezultă

$$\eta = \frac{16 - \pi}{8} a = \left(2 - \frac{\pi}{8}\right) a = 1{,}6075\, a.$$

b) Conform teoremei lui Guldin-Papus, volumul vasului, care ia naștere din rotirea ariei închise $OO'BD$ în jurul axei OO', este egal cu produsul acestei arii închise prin lungimea cercului descris de centrul de greutate al acestei arii, adică

$$V = \frac{S}{2} \cdot 2\pi x = 8a^2 \cdot 2\pi x. \qquad (1)$$

Pe x îl calculăm luînd momentele forțelor în raport cu axa OO'

$$x \cdot \frac{S}{2} = OD \cdot BD \cdot \frac{OD}{2} - \frac{\pi a^2}{2}\left(2a - \frac{4a}{3\pi}\right) + \frac{\pi a^2}{2}\left(2a + \frac{4a}{3\pi}\right),$$

$$8a^2x = 4a \cdot 2a \cdot a + \frac{2a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} = \frac{28a^3}{3}$$

Din această relație rezultă $x = \frac{7}{6} a$.

Înlocuind valoarea lui x în (1) se obține

$$V = 8a^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{7}{6} a = \frac{56}{3} \pi a^3.$$

1.49. Dintr-o tablă în formă de triunghi isoscel ABC cu baza $AC = 20$ cm și înălțimea $BD = 30$ cm, se taie o bucată în formă de triunghi isoscel avînd

Scanned with OKEN Scanner

aceeași bază AC (fig. 26). Cît trebuie să fie de mare înălțimea triunghiului AOC, astfel încît centrul de greutate al porțiunii rămase $AOCB$ să se găsească în vîrful O al triunghiului tăiat?

Rezolvare. Notăm cu x înălțimea triunghiului AOC. Ținînd seamă că forțele sînt proporționale cu ariile, iar golurile reprezintă forțe negative

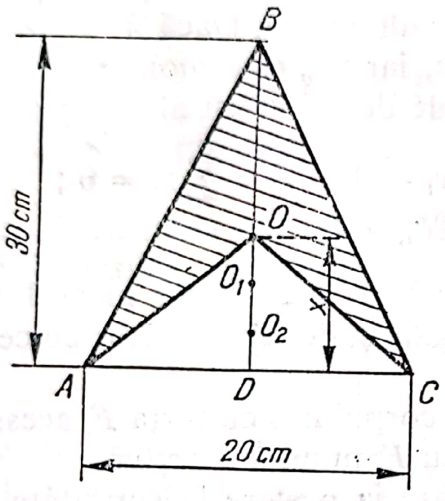


Fig. 26

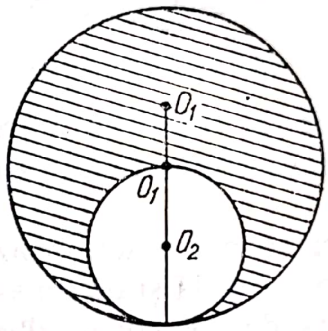


Fig. 27

și aplicînd teorema lui Varignon în raport cu punctul D, obținem

$$\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{2}\cdot\frac{\overline{BD}}{3}-\frac{\overline{AC}\cdot x}{2}\cdot\frac{x}{3}=\left(\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{2}-\frac{\overline{AC}\cdot x}{2}\right)x,$$

$$3\,000-\frac{10}{3}x^2=(300-10x)x,$$

$$x^2-45x+450=0;\qquad x=15\text{ cm}.$$

1.50. Dintr-un disc circular de lemn cu raza de 18 cm se scoate o porțiune circulară cu raza de 9 cm, tangentă interioară la discul dat. Se cere să se determine poziția centrului de greutate al porțiunii rămase (fig. 27).

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Scriem ecuația momentelor forțelor în raport cu punctul de tangență

$$\pi R^2\cdot R-\pi r^2\cdot r=(\pi R^2-\pi r^2)\,y,$$

$$y=\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}=\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}=\frac{567}{27}=21\text{ cm},$$

$$OO_1=y-R=21-18=3\text{ cm}.$$

6. Echilibrul static al corpurilor, acțiunea și reacțiunea, forțele de frecare, mașini simple

a. Considerații teoretice

1. Un corp este în echilibru atunci cînd totalitatea forțelor aplicate asupra lui au o rezultantă nulă și un moment rezultant nul. Dacă X, Y, Z sînt proiecțiile rezultantei pe trei axe rectangulare, iar $\mathfrak{M}_0$ este momentul acestei rezultante în raport cu un punct O, condițiile de echilibru ale corpului sînt

$$X = \sum x_i = 0\,; \quad Y = \sum y_i = 0\,; \quad Z = \sum z_i = 0\,;$$
$$\mathfrak{M}_0 = \sum \mathfrak{M}_{i0} = 0.$$

Condiția de echilibru a trei forțe concurente situate în același plan este ca suma vectorială a două forțe să fie egală și de sens contrar cu cea de-a treia forță.

2. Dacă corpul A acționează asupra corpului B cu forța F, acesta din urmă opune o forță egală și de sens contrar cu F, numită *reacțiune*.

3. Forța de frecare la alunecare, care ia naștere la suprafața de contact dintre două corpuri în mișcare, este

$$F_f = \mu N$$

unde μ este coeficientul de frecare, iar N — reacțiunea normală pe suprafața de contact.

4. Un corp poate fi supus la următoarele legături: reazeme simple, articulații, legături cu fire și încastrări.

În ecuațiile de echilibru, aceste legături, numite și *forțe de legătură* sau *reacțiuni*, se pot înlocui astfel:

a) *Reazemul simplu*, printr-o reacțiune perpendiculară pe suprafața de rezemare în punctul de reazem.

b) *Articulația*, printr-o reacțiune avînd mărime și direcție necunoscute, se înlocuiește prin două componente x_A și y_A perpendiculare una pe alta și care trec prin articulație.

c) Tensiunile din fire au direcția firelor.

d) Încastrarea se înlocuiește printr-un moment și o forță necunoscută ca mărime și direcție.

5. Mașinile simple sînt: pîrghiile, planul înclinat, pana, șurubul, scripeții, troliul și cricul.

a) Condiția de echilibru a pîrghiilor este

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

unde F_1 și F_2 sînt: forța activă și rezistența, iar l_1 și l_2 sînt brațele de pîrghie respective.

Scanned with OKEN Scanner

b) *Planul înclinat*. Componenta greutății paralelă cu planul, cea normală pe plan și forța de frecare sînt

$$Q = G \sin \alpha = G \frac{h}{l},$$

$$N = G \cos \alpha = G \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l},$$

$$F_f = \mu N = \mu G \cos \alpha,$$

unde l este lungimea planului, h înălțimea, iar α este unghiul făcut de plan cu orizontala.

c) *Pana*. Dacă pana este simetrică și împinsă perpendicular pe bază cu forța F se întîmpină rezistența N, și avem

$$\frac{Q}{N} = \frac{h}{l}, \qquad N = \frac{Q}{\sin \alpha},$$

unde h este lățimea, l lungimea, iar 2α unghiul panei.

În cazul în care se ține seamă de frecări, se obține

$$N = \frac{Q}{2(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)} \quad \text{la împingere,}$$

$$N = \frac{Q}{2(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)} \quad \text{la scoatere,}$$

unde $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, iar φ este unghiul de frecare.

d) *Șurubul* (fig. 28). Dacă nu se ține seamă de frecări, forța și rezistența sînt legate prin relația

$$F = \frac{h}{2\pi l} Q$$

unde h este pasul șurubului, iar l este lungimea manivelei.

Dacă se ține seamă și de frecări, avem

$$F \cdot l = Q \cdot r \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \quad \text{la strîngere,}$$

$$F \cdot l = Q \cdot r \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \quad \text{la desfacere,}$$

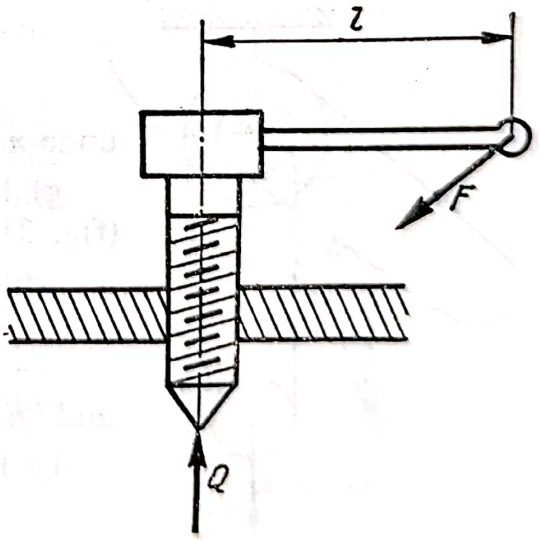


Fig. 28

unde r este raza șurubului, $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, φ unghiul de frecare.

Scanned with OKEN Scanner

e) Pentru scripeţii, fix şi mobil, avem

$$F = Q, \qquad F = \frac{Q}{2 \cos \alpha}$$

unde F este forţa, Q sarcina de ridicat, iar α unghiul făcut de direcţia firelor care susţin scripetele mobil, cu verticala.

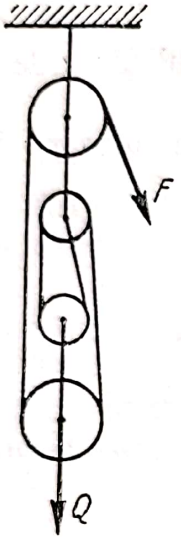


Fig. 29

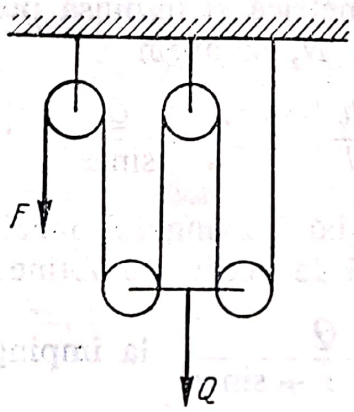


Fig. 30

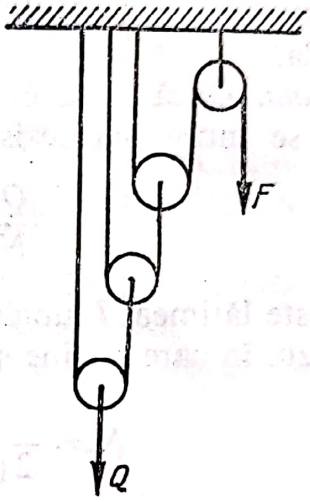


Fig. 31

f) Pentru scripeţii compuşi cu un singur fir din figurile 29 şi 30, avem

$$F = \frac{Q}{2n}$$

unde n este numărul scripeţilor mobili.

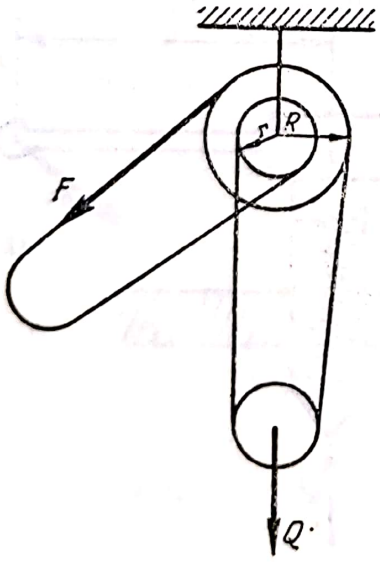


Fig. 32

g) Pentru scripeţii mobili cu mai multe fire (fig. 31) avem

$$F = \frac{Q}{2^n}$$

unde n este numărul scripeţilor mobili.

h) Pentru scripetele diferenţial (fig. 32) avem

$$F = \frac{R - r}{2R} Q$$

unde R este raza roţii mari, iar r este raza roţii mici.

Scanned with OKEN Scanner

i) Pentru troliul din fig. 33 și pentru cricul cu roți dințate din fig. 34, avem relațiile

$$F = \frac{r}{R} Q \qquad \text{și} \qquad F = \frac{rr'}{RR'} Q$$

unde F, Q, r, r', R și R' sînt indicate în figuri.

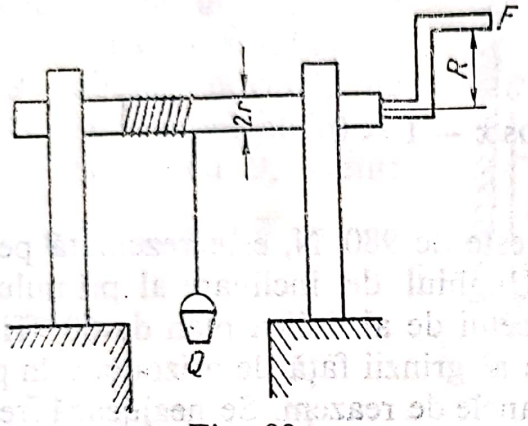


Fig. 33

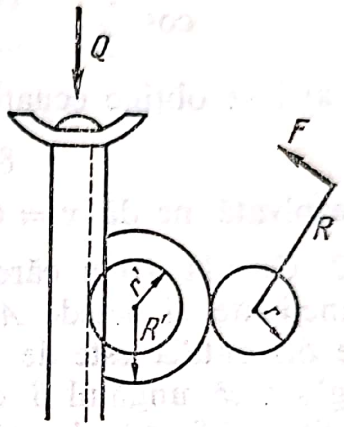


Fig. 34

b. Probleme

1.51. Se dă o cupă semisferică cu centrul în O și cu raza OA orizontală. Peste un scripete mic plasat în A trece un cordon care susține la extremități două greutăți P și $2P$; prima greutate atîrnă vertical în afara cupei, iar a doua alunecă pe fața interioară a semisferei (fig. 35). Să se găsească poziția de echilibru a acestui sistem de greutăți.

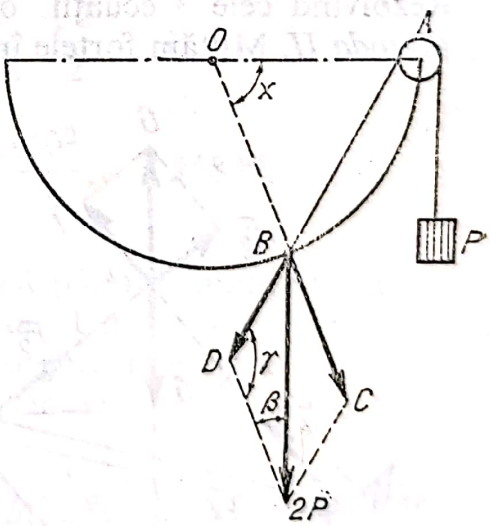


Fig. 35

Rezolvare. Se ia ca necunoscută, în planul vertical dus prin OA, arcul AB, cuprins între scripete și poziția de echilibru a greutății $2P$.

Se descompune forța $2P$ în două componente, una BC după prelungirea razei OB, (componenta normală a greutății $2P$), iar cealaltă BD, după direcția AB a cordonului.

Prima este echilibrată de reacțiunea normală a cupei, iar a doua este egală și opusă cu tensiunea cordonului, adică $BD = P$.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul BDE, se obține

$$\frac{BE}{\sin \gamma} = \frac{BD}{\sin \beta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă că $BE = 2P$, $BD = P$, $\gamma = \widehat{ABC} = 180° - \dfrac{180° - x}{2} = 90 + \dfrac{x}{2}$, $\beta = \widehat{CBE} = 90° - x$, se obține

$$\frac{2P}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{P}{\cos x}, \qquad \cos\frac{x}{2} = 2\cos x.$$

De aici se obține ecuația

$$8\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

care rezolvată ne dă $x = 67°4'$.

1.52. Grinda AB a cărei greutate este de 980 N, este rezemată pe două plane înclinate și netede AD și DB. Unghiul de înclinare al primului plan față de orizontală este de 30°, iar al celui de al doilea plan de 60° (fig. 36). Să se găsească unghiul β de înclinare al grinzii față de orizontală în poziția de echilibru și forțele de apăsare pe planele de reazem. Se neglijează frecările.

Rezolvare. *Metoda I.* Notînd cu F_1 și F_2 reacțiunile din A și B și scriind ecuațiile de echilibru, obținem

$$F_1\cos 60° - F_2\cos 30° = 0, \quad F_1\cos 30° + F_2\cos 60° - G = 0,$$
$$G\cdot\frac{l}{2}\cos\beta = F_2\, l\sin(30° + \beta).$$

Rezolvînd cele 3 ecuații obținem $F_1 = 848$ N; $F_2 = 490$ N și $\beta = 30$. *Metoda II.* Mutăm forțele în punctul O de intersecție al lui F_1 cu F_2 și din triunghiul forțelor rezultă imediat că $F_2 = \dfrac{G}{2} = 490$ N.

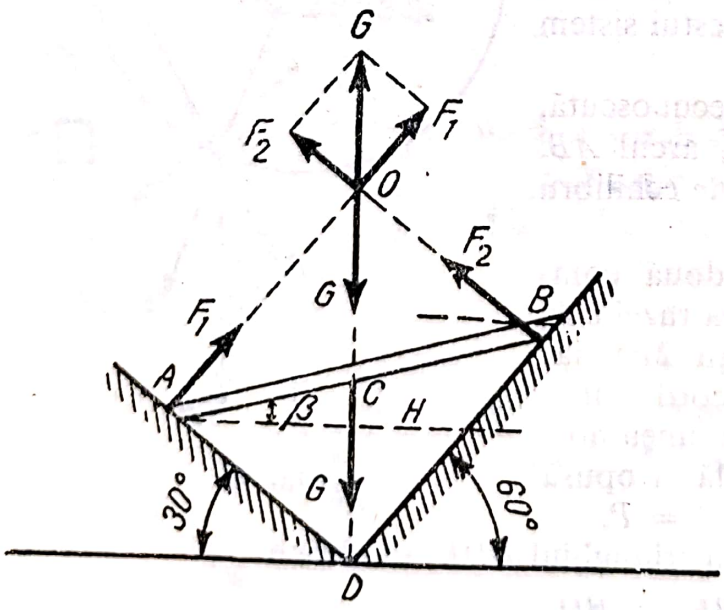


Fig. 36

Forța F_1 și unghiul β se obțin din legea sinusurilor

$$\frac{F_1}{\sin 60°} = \frac{F_2}{\sin 30°} = \frac{G}{\sin 90°}.$$

1.53. Un cub avînd greutatea egală cu $9{,}81\cdot 10^3$ N se sprijină cu muchia D pe o ieșitură dintr-un perete vertical și este atîrnat de muchia B cu frînghia AB fixată de

perete. Frînghia face un unghi de 45° cu peretele. Să se determine tensiunea în fir și forța de apăsare a cubului asupra ieșiturii (fig. 37).

Rezolvare. Cubul tinde să se rotească în jurul punctului D. Pentru echilibru trebuie ca suma momentelor pozitive în raport cu D să fie egală cu suma momentelor negative.

Forțele care lucrează asupra sistemului sînt: greutatea G verticală, tensiunea T în fir și forța F cu care zidul apasă asupra cubului, normală pe ieșitură. Luînd momentele forțelor în raport cu D, avem:

$$G\frac{a}{2} = Ta\sqrt{2}$$

de unde rezultă

$$T = \frac{G}{2\sqrt{2}} = \frac{G\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 1{,}41}{4} = 3\,458 \text{ N}.$$

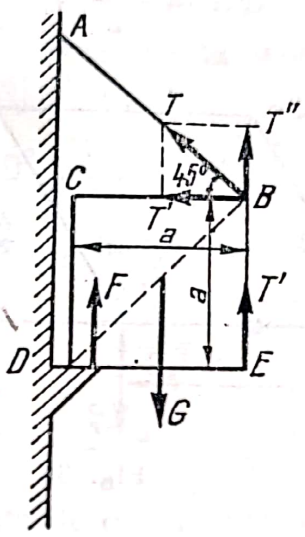


Fig. 37

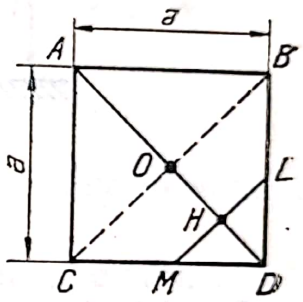


Fig. 38

Pentru aflarea forței F, se scrie echilibrul pe verticală:

$$F + T\sin 45° = G, \quad F + \frac{G}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = G,$$

$$F = G - \frac{G}{4} = \frac{3G}{4} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^3}{4} = 7\,358 \text{ N}.$$

1.54. Trei lucrători trebuie să ducă o placă pătrată, omogenă, de latură a și greutate $3P$ menținînd planul său orizontal. Unul ține de vîrful A. Ceilalți doi țin de periferia plăcii, plasîndu-se pe o perpendiculară la diagonala AD. Să se afle poziția celor doi lucrători care țin de periferie, astfel încît toți trei să fie egal încărcați (fig. 38).

Rezolvare. Greutatea totală a plăcii $3P$, este aplicată în centrul de greutate O al pătratului. Cei trei lucrători fiind încărcați egal, fiecare dintre ei va suporta o greutate P. Să presupunem că doi lucrători sînt plasați în L și M.

Rezultanta $2P$ a forțelor din L și M este aplicată în punctul H la distanța OH față de punctul O. Pentru ca placa să rămînă în echilibru în poziția

orizontală, trebuie ca suma momentelor pozitive în raport cu punctul O, să fie egală cu suma momentelor negative în raport cu același punct, adică

$$2P \cdot OH = P \cdot OA$$

de unde se deduce

$$OH = \frac{OA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

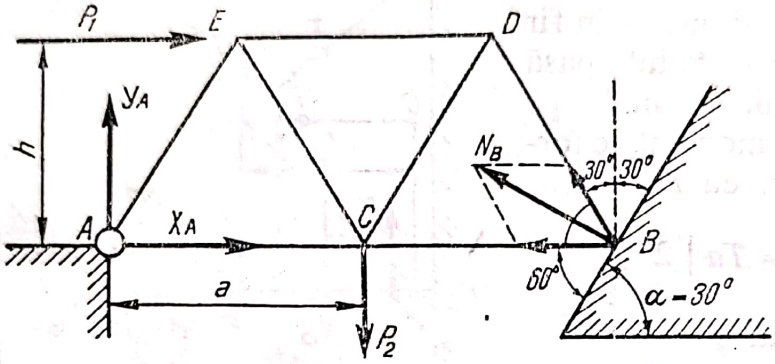


Fig. 39

Rezultă că cei doi lucrători trebuie să susțină placa în punctele L și M aflate la mijlocul laturilor BD și CD.

1.55. O grindă cu zăbrele cu deschiderea $2a = 6{,}92$ m și cu înălțimea $h = 3$ m este fixată în A printr-o articulație, iar în B se reazemă pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Dacă asupra grinzii acționează forțele $P_1 = 49 \cdot 10^3$ N și $P_2 = 29{,}4 \cdot 10^3$ N în punctele E și C (fig. 39) se cer:

a) Reacțiunile din A și B. b) Eforturile din barele BC și BD.

Rezolvare. a) Se suprimă articulația A introducînd componentele reacțiunii X_A și Y_A și reazemul simplu din B introducînd în locul lui reacțiunea N_B normală pe planul înclinat. Făcînd proiecțiile forțelor pe axele de coordonate, se obține

$$X_A + P_1 - N_B \cos 30° = 0, \tag{1}$$

$$Y_A - P_2 + N_B \cos 60° = 0. \tag{2}$$

Momentele forțelor în raport cu A, ne dau

$$P_1 h + P_2 a - N_B \cdot 2a \sin 30° = 0. \tag{3}$$

Din ecuația (3) rezultă

$$N_B = \frac{P_1 h + P_2 a}{a} = \frac{10^3 (49 \cdot 3 + 29{,}4 \cdot 3{,}46)}{3{,}46} = 71{,}8 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuațiile (1) și (2) rezultă

$$X_A = N_B \cos 30° - P_1 = 71{,}8 \cdot 10^3 \cdot 0{,}865 - 49 \cdot 10^3 = 13{,}10 \cdot 10^3 \text{ N},$$

$$Y_A = P_2 - N_B \cos 60° = 29{,}4 \cdot 10^3 - 35{,}9 \cdot 10^3 = -6{,}5 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Rezultînd o valoare negativă, înseamnă că sensul lui Y_A este invers celui presupus de noi inițial, adică vertical în jos

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 10^3 \sqrt{13{,}10^2 + 6{,}5} = 14{,}6 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

b) Se descompune reacțiunea N_B după direcțiile BC și BD și se obține

$$S_{BC} = S_{BD} = \frac{N_B}{2 \cos 30} = \frac{14{,}6 \cdot 10^3}{1{,}73} = 8{,}43 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

1.56. Un om de 70 kg susține o greutate de 147 N cu ajutorul unui fir trecut peste un scripete.

a) Care este forța R exercitată de om asupra terenului, cînd firul este în poziție verticală?

b) Cum variază forța R cînd omul se depărtează de scripete și care este forța R cînd firul este înclinat cu 45°?

c) Cît de mare trebuie să fie pasul omului pentru ca el să poată susține greutatea în cazul firului înclinat cu 45°?

Firul și picioarele omului sînt în același plan, iar firul întîlnește verticala centrului de greutate al omului la 1,20 m deasupra terenului (fig. 40).

(Adm. Școala Politehnică, București, 1943)

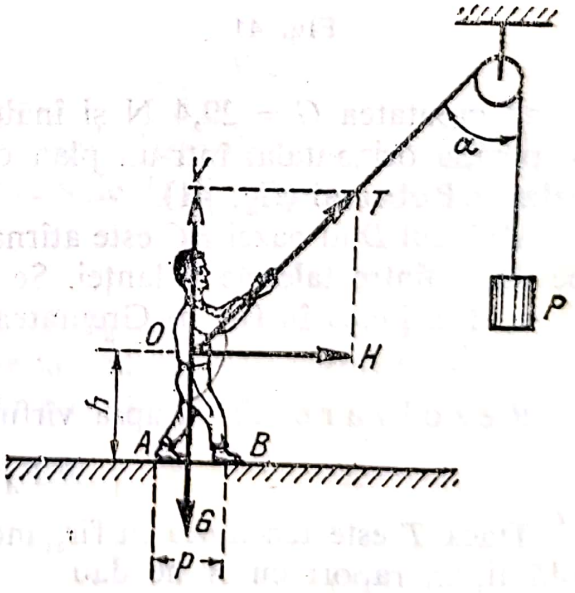


Fig. 40

Rezolvare. a) Greutatea omului, $G = mg = 70 \cdot 9{,}8 = 686$ N.

Forța exercitată de om asupra terenului este

$$R = 686 - 147 = 539 \text{ N}.$$

b) Fie α unghiul făcut de fir cu verticala centrului de greutate al omului. Tensiunea în fir fiind egală cu $T = 147$ N, componenta verticală a acesteia este egală cu $V = T \cos \alpha = 147 \cos \alpha$, iar forța este

$$R = \sqrt{G^2 + T^2 - 2GT \cos \alpha}.$$

Cu cît ne depărtăm de scripete, unghiul α crește, cos α scade, iar forța R crește.

Pentru $\alpha = 45°$, $R = \sqrt{686^2 + 147^2 - 686 \times 147 \cdot \sqrt{2}} = 591{,}6$ N.

c) Fie $AB = p$, pasul omului, $H = T \sin \alpha$ și $V = T \cos \alpha$ componenta orizontală și verticală a tensiunii în fir. Luînd momentele forțelor în raport cu punctul de răsturnare B, avem

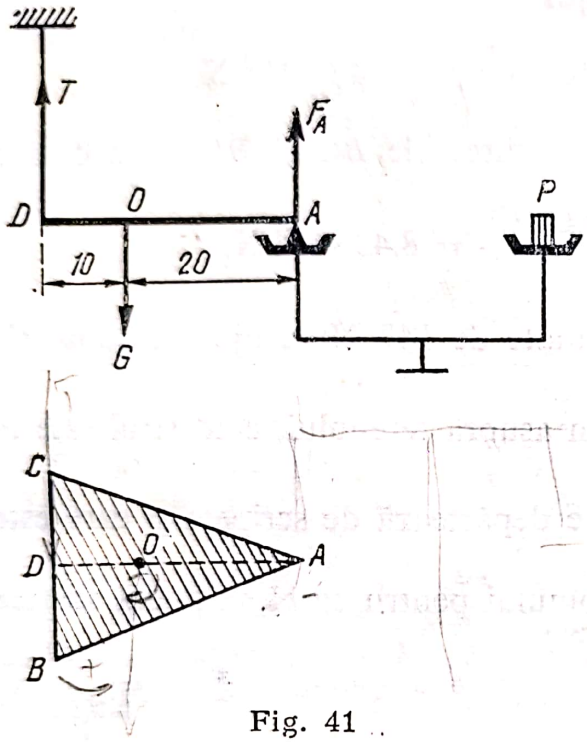


Fig. 41

$$(G - V)\frac{p}{2} = Hh$$

unde h este distanța de la sol la centrul de greutate al omului.

Din această ecuație rezultă

$$p = \frac{2Hh}{G - V} = \frac{2\,hT \sin \alpha}{G - T \cos \alpha}$$

Pentru $\alpha = 45°$, se obține

$$p = \frac{2 \cdot 1{,}20 \cdot 147 \cdot 0{,}705}{686 - 147 \cdot 0{,}705} =$$

$$= \frac{248{,}7}{582{,}36} = 0{,}428 \text{ m} = 42{,}8 \text{ cm}.$$

1.57. O placă metalică în formă de triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) avînd greutatea $G = 29{,}4$ N și înălțimea $AD = h = 30$ cm, este menținută în poziția orizontală, într-un plan orizontal, cu ajutorul unui fir și al unei balanțe Roberval (fig. 41).

Mijlocul D al bazei BC este atîrnat de firul vertical, iar vîrful A se găsește pe unul dintre talerele balanței. Se cere:

a) Tensiunea în fir. b) Greutatea P care trebuie pusă în celălalt taler al balanței.

Rezolvare. a) Asupra vîrfului A al plăcii acționează o forță

$$F_A = R. \qquad (1)$$

Dacă T este tensiunea în fir, momentele forțelor care acționează asupra plăcii, în raport cu A ne dau

$$T \cdot AD = G \cdot OA.$$

Din această relație se scoate

$$T = \frac{AO}{AD} \cdot G = \frac{2}{30} \cdot 29{,}4 = 19{,}6 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Din relația

$$T + F_A = G$$

se scoate

$$F_A = G - T = 29{,}4 - 19{,}6 = 9{,}8 \text{ N}.$$

Din (1) se deduce

$$P = F_A = 9{,}8 \text{ N}.$$

1.58. O scîndură AB cu lungimea $d = 1$ m și cu greutatea neglijabilă, este susținută de două arcuri R_1 și R_2, care au capetele superioare fixate de tavan iar cele inferioare fixate de scîndură în punctele A și B (fig. 42). În stare liberă, cele două arcuri au lungimile egale, iar coeficienții lor de elasticitate sînt: $K_1 = 980$ N/m și respectiv $K_2 = 1\,470$ N/m. Așezîndu-se pe scîndură o greutate $G = 980$ N, scîndura se înclină cu un unghi $\alpha = 30°$ față de orizontală, iar greutatea rămîne nemișcată pe scîndură. Se cere:

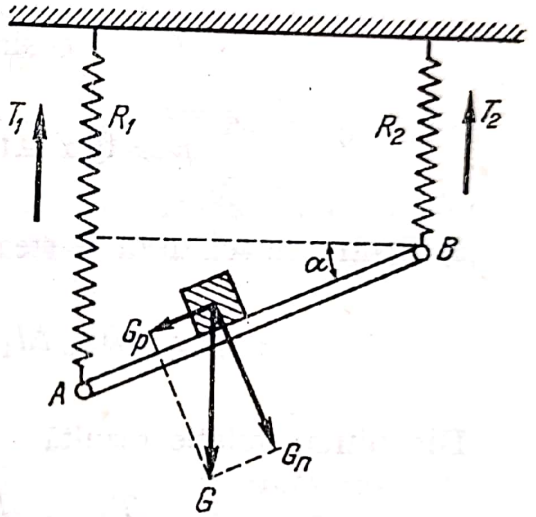


Fig. 42

a) La ce distanță de capătul A a fost așezată greutatea G pe scîndură și care sînt eforturile în cele două arcuri? b) Coeficientul de frecare dintre scîndură și corp. c) La ce distanță de capătul A trebuie să mutăm corpul pe scîndură ca aceasta să stea în poziție orizontală și care sînt eforturile în arcuri în acest caz? d) Cum variază înclinarea scîndurii în funcție de distanța la care se așază greutatea?

(G.M.F. nr. 2/1963)

Rezolvare. a) Dacă notăm cu T_1 și T_2 eforturile în arcuri și cu x distanța la care s-a așezat greutatea G și se iau momentele forțelor în raport cu centrul de greutate al lui G, ecuațiile de echilibru sînt

$$\left.\begin{aligned} T_1 + T_2 &= G = 980, \\ T_1 x &= T_2 (d - x). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

După plasarea greutății, arcurile se alungesc cu

$$\Delta l_1 = \frac{T_1}{K_1} \quad \text{și} \quad \Delta l_2 = \frac{T_2}{K_2};$$

Ținînd seamă de cele stabilite mai sus și de relația

$$\Delta l_1 - \Delta l_2 = d \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

se obține

$$\frac{T_1}{K_1} - \frac{T_2}{K_2} = \frac{1}{2}; \qquad 3T_1 - 2T_2 = 1\,470,$$

$$T_1 = 686\,\text{N}, \quad T_2 = 294\,\text{N}, \quad x = 0{,}3\,\text{m}.$$

b) Coeficientul de frecare rezultă din condiția ca G să nu alunece:

$$G \sin \alpha \leqslant \mu G \cos \alpha,$$

$$\mu \geqslant \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}576.$$

c) Pentru ca scîndura să stea orizontală trebuie să avem

$$\alpha = 0; \quad \Delta l_1 = \Delta l_2; \quad \frac{T_1'}{K_1} = \frac{T_2'}{K_2}.$$

Din ultima relație rezultă

$$\frac{T_1'}{T_2'} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{980}{1\,470} = \frac{1}{1{,}5},$$

de unde

$$T_2' = 1{,}5\, T_1'. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$T_1' = 392\,N \quad \text{si} \quad T_2' = 588\,\text{N}.$$

Din ecuația de momente rezultă

$$40\, x' = 60\,(1 - x'), \quad x' = 0{,}60\,\text{m}.$$

d) Din relațiile de mai înainte se obține

$$\sin \alpha = \frac{G}{d^2}\left(\frac{d-x}{K_1} - \frac{x}{K_2}\right) = 1 - \frac{5}{3}x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că α scade cînd x crește și se anulează pentru $x = \frac{3}{5} = 0{,}60$ m. Dacă x crește în continuare scîndura se apleacă în jos cu capătul B.

1.59. O placă metalică $ABCDEA$ este așezată pe o masă orizontală, astfel că porțiunea $ABMNEA$ se reazemă pe masă, iar restul plăcii $MNDCM$ stă liber în consolă (fig. 43). Să se determine lungimea maximă x cu care poate fi trasă placa de pe masă fără să se răstoarne în jurul muchiei MN a mesei, știind că greutatea plăcii este de p dyne/cm².

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1942)

Rezolvare. Greutatea porțiunii triunghiulare ABE este

$$G_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 \cdot p \cdot 10^{-5} = 75\, p \cdot 10^{-5}\ \text{N}.$$

Greutatea porțiunii $BEMN$ este $G_2 = 10\,(30 - x)\, p \cdot 10^{-5}$ N, iar greutatea porțiunii în consolă $G_3 = 10\, px \cdot 10^{-5}$ N.

Pentru ca placa să nu se răstoarne, trebuie ca suma momentelor forțelor G_1 și G_2 în raport cu muchia MN a mesei, să fie egală cu momentul forței G_3 în raport cu aceeași muchie, adică

$$75\, p\,(35 - x) + 10\, p\,(30 - x) \cdot \frac{30 - x}{2} = 10\, px\, \frac{x}{2}.$$

Din această ecuație se scoate $x = 19$ cm.

1.60. Un disc circular de 5 mm grosime, avînd 80 cm diametru, este suspendat cu un fir într-un punct situat la 4 cm de centrul său. În ce poziție trebuie să se așeze pe acest disc un altul de 20 mm grosime și 20 cm diametru pentru ca sistemul de discuri să stea orizontal (fig. 44).

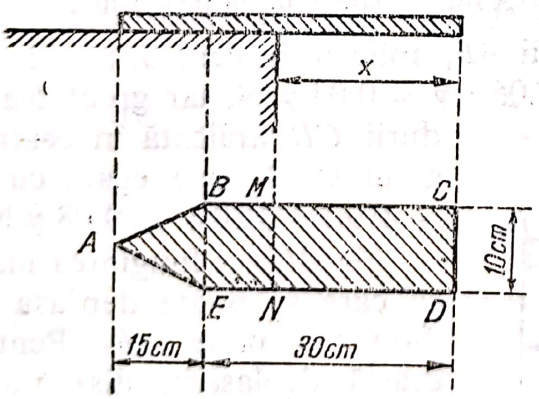


Fig. 43

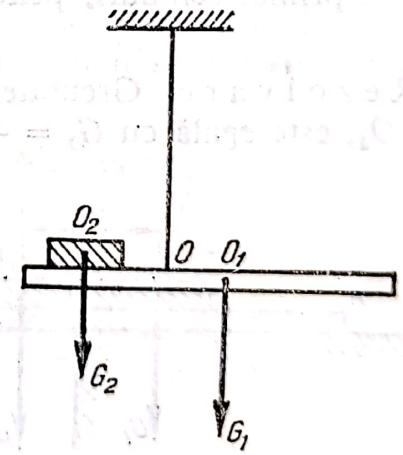


Fig. 44

(Adm. Școala Politehnică, București, 1946)

Rezolvare. Greutăţile celor două discuri sînt, respectiv,

$$G_1 = \frac{3{,}14 \cdot 80^2}{4} \cdot 0{,}5\,\gamma = 2512\,\gamma$$

şi

$$G_2 = \frac{3{,}14 \cdot 20^2}{4} \cdot 2\,\gamma' = 628\,\gamma'$$

γ şi γ' fiind greutăţile specifice ale discurilor.

Pentru echilibru, trebuie să avem

$$G_1 \cdot OO_1 = G_2 \cdot OO_2$$

de unde rezultă

$$OO_2 = \frac{G_1}{G_2} \cdot OO_1 = \frac{2512\gamma}{628\gamma'} \cdot 4 = 16 \cdot \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Dacă discurile sînt din acelaşi material, $\gamma = \gamma'$ atunci $OO_2 = 16$ cm, iar distanţa dintre centrele celor două discuri, $O_1O_2 = 20$ cm.

1.61. O scîndură din lemn de brad de 4 m lungime, 20 cm lăţime şi 5 cm grosime este aşezată pe un planşeu orizontal, astfel că stă în gol pe o lungime de 1 m. Peste această scîndură se împinge în afară o altă scîndură, din acelaşi material, de 4 m lungime, 20 cm lăţime şi 10 cm grosime (fig. 45). Cu cît se poate scoate în afară capătul celei de-a doua scînduri, dincolo de capătul primei scînduri, pentru ca să nu se producă răsturnarea lor.

(Adm. Şcoala Politehnică, Bucureşti, 1945)

Rezolvare. Greutatea scîndurii AB, aplicată în centrul său de greutate O_1, este egală cu $G_1 = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}05 \cdot \gamma = 0{,}04\,\gamma$ N, iar greutatea scîndurii CD, aplicată în centrul de greutate O_2 este egală cu $G_2 = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}10\,\gamma = 0{,}08\,\gamma$ N.

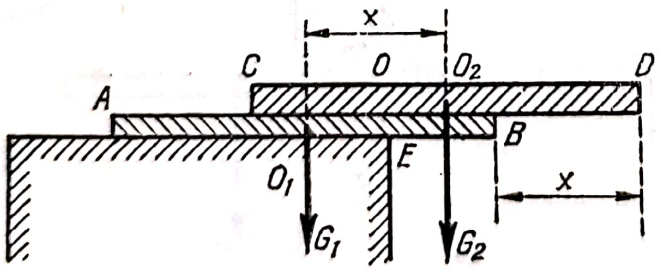


Fig. 45

Fie $BD = x$ lungimea maximă cu care se poate deplasa scîndura CD peste AB. Pentru această deplasare, distanţa centrelor O_1O_2 este egală tot cu x. Pentru ca sistemul să nu se răstoarne, trebuie ca x să fie atît de mare, încît centrul de greutate O al sistemului să nu depăşească marginea mesei, adică să cadă în interiorul suprafeţei de sprijin. Cum EB este 1 m, rezultă că O_1O poate să fie egal cel mult, cu 1 m. Pentru poziţia de

Scanned with OKEN Scanner

deplasare maximă, cînd centrul O se află pe marginea mesei, condiția de echilibru este

$$G_1 \cdot O_1O = G_2 \cdot OO_2. \qquad (1)$$

Dar $OO_2 = x - OO_1 = x - 1$; astfel relația (1) devine

$$4 \cdot 1 = 8(x - 1)$$

de unde rezultă $x = 1{,}5$ m.

Condiția ca sistemul să nu se răstoarne este deci

$$x \leqslant 1{,}5 \text{ m}.$$

1.62. O sîrmă subțire este formată dintr-o porțiune semicirculară de rază $R = 10$ cm și dintr-o porțiune rectilinie de lungime $l = 1{,}20$ m. Extremitatea părții curbate se sprijină pe colțul unei mese (fig. 46).

Se cere unghiul de înclinare α față de verticala în poziția de echilibru.

(R.F.Ch., nr. 2/1966)

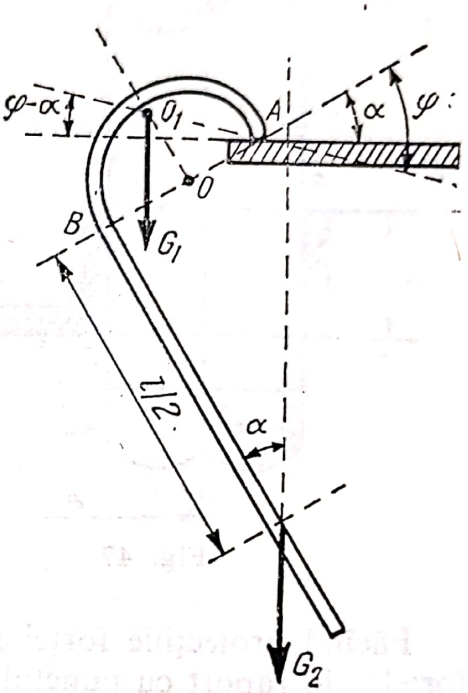


Fig. 46

Rezolvare. Centrul de greutate al porțiunii curbe, de greutate G_1, se află la distanța $OO_1 = \eta = \dfrac{2R}{\pi}$. Dacă p este greutatea sîrmei pe metru liniar, G_2 greutatea porțiunii rectilinii, A punctul de sprijin, iar φ unghiul făcut de O_1A cu diametrul AB, condiția de echilibru este

$$G_1 \cdot O_1A \cos(\varphi - \alpha) = G_2 \left(\frac{l}{2} \sin\alpha - 2R\cos\alpha\right).$$

Ținînd seamă că $G_1 = \pi Rp$, $G_2 = pl$,

$$O_1A = \sqrt{R^2 + \eta^2} = \frac{R}{\pi}\sqrt{\pi^2 + 4}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\eta}{R} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637,$$

$\varphi = 32°30'$ ecuația de echilibru devine

$$R^2\sqrt{\pi^2 + 4}\cos(\varphi - \alpha) = l\left(\frac{l}{2}\sin\alpha - 2R\cos\alpha\right).$$

Făcînd înlocuirile și rezolvînd ecuația, se obține $\alpha = 21°10'$.

1.63. Cîrligul cu care se urcă telefoniștii pe stîlpi pentru reparații are forma din fig. 47. Dacă diametrul stîlpului, $d = 30$ cm, înălțimea cîrligului, $h = 18$ cm, greutatea telefonistului $G = 690$ N, iar distanța de la centrul cîrligului pînă în punctul în care se pune piciorul, $a = 30$ cm, se cere: a) Coeficientul de frecare dintre cîrlig și stîlp pentru ca telefonistul să nu alunece. b) Reacțiunile suportate de stîlp în timpul lucrului. c) Forța de frecare dintre stîlp și cîrlig.

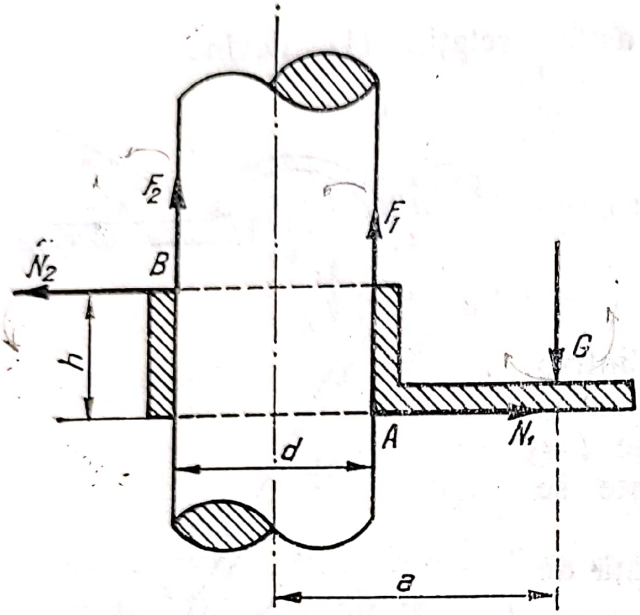


Fig. 47

Rezolvare. a) Apăsările cîrligului asupra stîlpului se exercită în punctele de contact A și B de pe marginea de jos din dreapta și cea de sus din stînga. Reacțiunile N_1 și N_2 opuse de stîlp și forțele de frecare F_1 și F_2 din aceste puncte, au direcțiile și sensurile din figură.

Făcînd proiecțiile forțelor pe orizontală și verticală și luînd momentele forțelor în raport cu punctul A, se obțin ecuațiile de echilibru

$$N_1 - N_2 = 0, \tag{1}$$

$$F_1 + F_2 = G, \tag{2}$$

$$G(a - r) = N_2 h - F_2 \cdot 2r. \tag{3}$$

Din ecuația (1) se obține

$$N_1 = N_2 = N.$$

Ținînd seamă că $F_1 = \mu N_1 = \mu N$ și $F_2 = \mu N_2 = \mu N$, ecuația (2) devine

$$2\mu N = G. \tag{4}$$

Făcînd înlocuirile în (3) se obține

$$\mu = \frac{h}{2a} = \frac{18}{2 \cdot 30} = \frac{18}{60} = 0{,}3.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Din ecuația (4) se scoate

$$N_1 = N_2 = N = \frac{G}{2\mu} = \frac{690}{0{,}6} = 1\,150 \text{ N}.$$

c) $F_1 = F_2 = \mu N = 0{,}3 \cdot 1150 = 345$ N.

1.64. Din tablă de oțel de grosime a trebuie să se scoată o tablă de grosime b. Această operație se execută cu ajutorul unui laminor (fig. 48.) Tabla

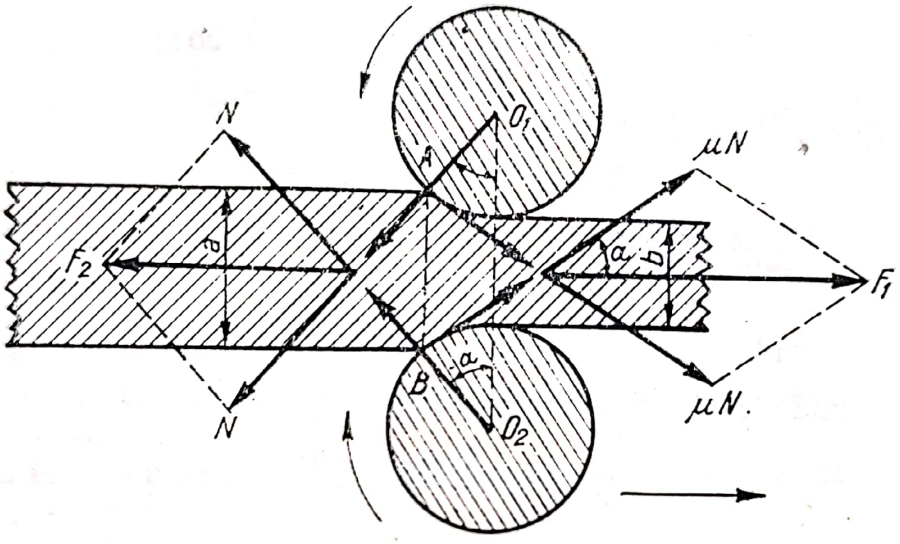


Fig. 48

de oțel înroșită se introduce între cele două valțuri ale laminorului de diametru D, care o transformă în tablă de grosimea cerută. Coeficientul de frecare dintre oțelul înroșit și cilindrii de oțel ai laminorului fiind egal cu $\mu = 0{,}1$, se cere să se determine diametrul minim D pentru cazul în care $a = 8$ mm și $b = 5$ mm.

Rezolvare. Cei doi cilindri trăgînd materialul spre interior (dreapta), în colțurile A și B trebuie să existe două forțe tangențiale dirijate spre interior. Cilindrii apasă în același timp asupra materialului, în colțurile A și B cu forțe de apăsare radiale N, care fac unghiul α cu linia centrelor celor doi cilindri. Forțele radiale și tangențiale fiind perpendiculare, rezultă că forțele tangențiale sînt forțele de frecare dintre material și cilindri și sînt egale cu μN. Pentru ca materialul (tabla) să avanseze spre interior, trebuie ca rezultanta forțelor tangențiale să fie mai mare decît a celor radiale, adică

$$2\mu N \cos\alpha \geqslant 2N \sin\alpha.$$

Din această relație rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm $\mu = \operatorname{tg}\varphi$, se obține

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi,\ \alpha \leqslant \varphi;\ \cos\varphi \leqslant \cos\alpha. \tag{1}$$

Mărimea diametrului se determină din trapezul ABO_2O_1, în care

$$O_1O_2 = \frac{D}{2} + \frac{D}{2} + b = D + b. \tag{2}$$

Pe de altă parte, se poate scrie

$$O_1O_2 = a + 2 \cdot \frac{D}{2}\cos\alpha = a + D\cos\alpha. \tag{3}$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă

$$D + b = a + D\cos\alpha. \tag{4}$$

Din relația (4) se obține

$$\cos\alpha = \frac{D + b - a}{D} \tag{5}$$

Ținînd seamă de (1) relația (5) devine

$$\cos\varphi \leqslant \frac{D + b - a}{D}. \tag{6}$$

Din relația (6) se obține

$$D \geqslant \frac{a - b}{1 - \cos\varphi}. \tag{7}$$

La limită, $\cos\varphi = \cos\varphi = 0{,}995$ și făcînd înlocuirile în (7) se obține

$$D_{min} = \frac{8 - 5}{1 - 0{,}995} = \frac{3}{0{,}005} = 600\ \text{mm} = 0{,}60\ \text{m}.$$

1.65. Un cilindru gol, cu pereții subțiri, deschis la ambele capete, avînd raza R, este așezat pe un plan orizontal.

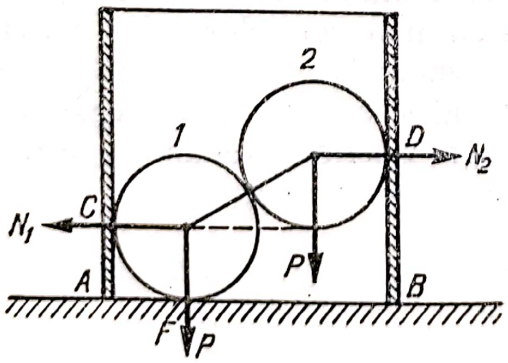


Fig.

În interiorul acestui cilindru se introduc două bile de rază r și greutate P (fig. 49). Se cere greutatea minimă pe care trebuie s-o aibă cilindrul pentru ca el să nu se răstoarne, neglijînd frecările.

Rezolvare. Să presupunem că scoatem bilele din cilindru introducînd în locul lor reacțiunile N_1 și N_2, care au direcțiile și sensurile din figură.

Scanned with OKEN Scanner

Asupra cilindrului vor acționa deci forțele N_1 și N_2, reacțiunea mesei în B și greutatea cilindrului G.

Proiecțiile forțelor pe orizontală și verticală ne dau

$$\sum X_i = N_2 - N_1 = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = G - N_B = 0. \tag{2}$$

Pentru ca cilindrul să nu se răstoarne în jurul punctului B, va trebui să avem

$$G \cdot R + N_1 \cdot AC \geqslant N_2 \cdot DB. \tag{3}$$

Ținînd seamă că $AC = r$, $DB = 2r$ și $N_2 = N_1$, ecuația (3) devine

$$GR \geqslant rN_1. \tag{4}$$

Se scoate acum cilindrul. Pentru ca bilele să rămînă în poziția dinainte, va trebui să se introducă în locul cilindrului scos, reacțiunile acestuia asupra bilelor, egale și de sens contrar cu cele din figură.

Asupra bilelor solidare (făcînd un singur corp) vor lucra deci reacțiunile N_1 și N_2, greutățile bilelor și reacțiunea mesei din punctul de contact F al bilei 1 cu masa.

Scriind ecuațiile de proiecții și momentul forțelor în raport cu punctul de contact F, se obține

$$\sum X_i = N_1 - N_2 = 0, \tag{5}$$

$$\sum Y_i = 2P - N_F = 0, \tag{6}$$

$$N_2 \cdot 2r - N_1 r - P(2R - 2r) = 0. \tag{7}$$

Din ecuațiile (5) și (7) rezultă

$$N_1 r = 2P(R - r). \tag{8}$$

Ținînd seamă de (8) relația (4) devine

$$GR \geqslant 2P(R - r).$$

Din această ultimă relație rezultă

$$G_{min} = 2P\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

1.66. Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$ față de orizontală se află un corp cu greutatea $G = 490$ N. Corpul este tras în sus de o forță Q, care

Scanned with OKEN Scanner

face cu planul înclinat un unghi $\beta = 30°$ (fig. 50). Cunoscînd coeficientul de frecare dintre corp și plan, $\mu = 0{,}27$, se cere:

a) Între ce limite variază Q pentru a menține corpul în echilibru? b) forța maximă de apăsare pe plan. c) Forța de frecare maximă.

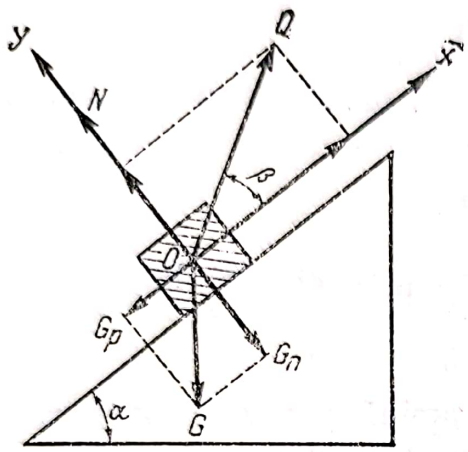


Fig. 50

Rezolvare. a) Izolăm corpul de plan introducînd reacțiunea N și luăm ca axe de coordonate direcția planului și o perpendiculară la aceasta. Dacă corpul tinde să se urce pe plan, forța de frecare este inversă mișcării și ecuațiile de echilibru sînt

$$\sum X = Q\cos\beta - G\sin\alpha - \mu N = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = N - G\cos\alpha + Q\sin\beta = 0. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se obține

$$Q_{máx} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}\cdot G =$$

$$= \frac{0{,}705\,(1 + 0{,}27)}{0{,}865 + 0{,}27\cdot 0{,}500}\cdot 490 = 439\ \text{N}.$$

Dacă corpul tinde să cadă pe plan, forța de frecare este inversă mișcării și avem

$$\sum X = Q\cos\beta - G\sin\alpha + \mu N = 0, \qquad (3)$$

$$\sum Y = N - G\cos\alpha + Q\sin\beta = 0. \qquad (4)$$

Din ecuațiile (3) și (4) se obține

$$Q_{min} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta}\cdot G = \frac{0{,}705\,(1 - 0{,}27)}{0{,}865 - 0{,}27\cdot 0{,}5}\cdot 490 = 345\ \text{N}.$$

b) $N_{max} = G\cos\alpha - Q_{min}\cdot\sin\beta = 173\ \text{N}.$

c) $F_{max} = \mu N_{max} = 0{,}27\cdot 173 = 46{,}7\text{N}.$

1.67. O bară de lungime $l = 2$ m și greutate $P = 19{,}6$ N se sprijină pe două reazeme A și B aflate la distanța $a = 0{,}40$ m unul de altul. Direcția barei face cu orizontala un unghi $\alpha = 30°$ (fig. 51). Coeficientul de frecare între reazeme și bară fiind $\mu = 0{,}2$, se cer valorile reacțiunilor din A și B și distanța maximă $AD = x$ cu care poate să iasă bara în afara reazemului A pentru a rămîne în echilibru.

Rezolvare. Proiectînd forțele pe direcția barei și pe o perpendiculară la aceasta, obținem

$$P \sin \alpha = \mu (N_1 + N_2), \tag{1}$$

$$P \cos \alpha = N_1 - N_2. \tag{2}$$

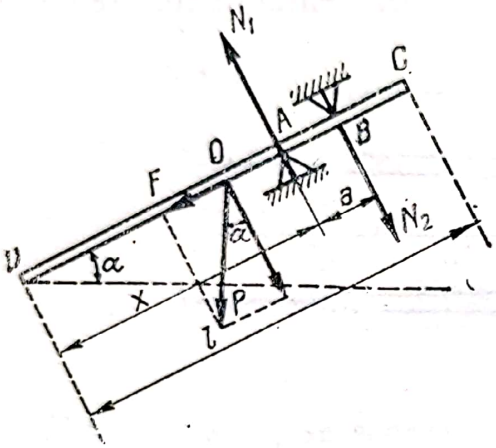


Fig. 51

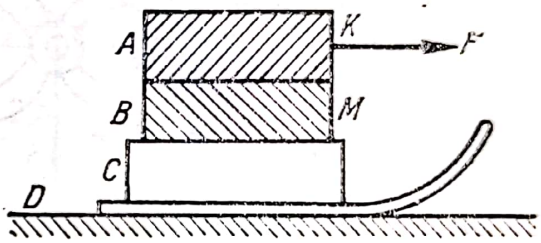


Fig. 52

Momentele forțelor în raport cu A, ne dau

$$\left(x - \frac{l}{2}\right) P \cos \alpha = aN_2. \tag{3}$$

Rezolvînd ecuațiile (1), (2) și (3) obținem

$$N_1 = 32{,}98\text{N}; \quad N_2 = 16{,}03\text{N}; \quad x = 1{,}38\text{ m}.$$

1.68. Pe sania C, avînd greutatea de 98 N și care se mișcă pe planul D, este așezată încărcătura B avînd greutatea de 294 N, peste care este așezată încărcătura A în greutate de 392 N (fig. 52). Coeficienții de frecare sînt: 0,16 între A și B, 0,20 între B și C și 0,1 între C și D. Forța $F = 98$ N este aplicată asupra sarcinii A în punctul K. Se cere:

a) Pe care plan se va produce alunecarea și dacă, în acest caz se va mișca sania. b) Ce se va întîmpla cu sania dacă forța F va fi aplicată în punctul M?

Rezolvare. a) Forța de frecare între A și B este

$$F_1 = 392 \cdot 0{,}16 = 62{,}72\text{ N}.$$

Între B și C, forța de frecare este $F_2 = 686 \cdot 0{,}2 = 137{,}2$ N, iar între C și D, forța de frecare este $F_3 = 784 \cdot 0{,}1 = 78{,}4$ N.

Forța F învingînd pe cea mai mică dintre forțele de frecare, corpul A va aluneca peste B, iar sania nu se va deplasa.

Scanned with OKEN Scanner

b) Forța de frecare între B și C este de 137,2 N, iar între C și D este de 78,4.N.

De data aceasta, forța F fiind mai mare decît forța de frecare dintre sanie și teren și mai mică decît forța de frecare dintre B și C, sania se va deplasa.

1.69. Pentru scoaterea unui cui dintr-un perete se folosește un clește cu care se trage axial cu forța $2F = 196$ N (fig. 53). Coeficientul de frecare dintre

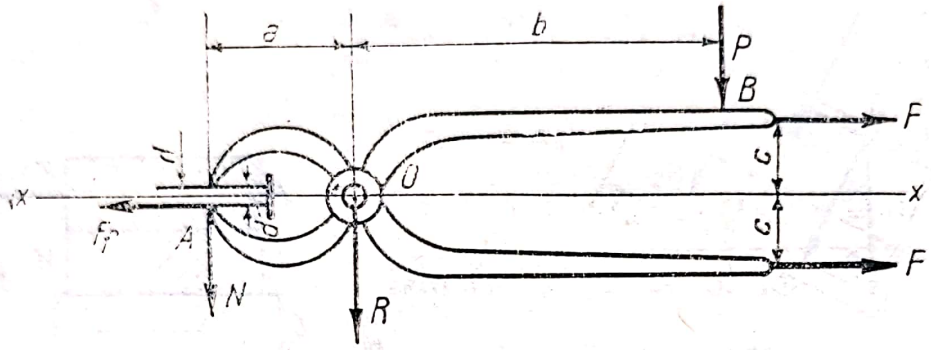


Fig. 53

clește și cui fiind $\mu = 0{,}4$, să se determine forța P ce trebuie aplicată la brațele cleștelui pentru ca acesta să nu alunece în lungul cuiului; care este, în acest caz, forța N care apasă asupra cuiului și reacțiunea din articulația O, dacă $a = 38$ mm, $b = 135$ mm, $c = 30$ mm și $d = 6$ mm?

Rezolvare. Cleștele fiind simetric în raport cu axa xx' care trece prin articulația O, se poate studia echilibrul unei singure porțiuni din el. Pentru ca cleștele să nu alunece de-a lungul cuiului, trebuie ca forța F să fie egală cu forța de frecare, adică

$$F = F_f = 98 \text{ N}.$$

Cuiul va reacționa asupra porțiunii de clește AOB cu forța N, iar articulația O va reacționa asupra cleștelui cu forța R.

Forța de frecare dintre cui și clește fiind egală cu

$$F_f = \mu N = 98 \text{ N}.$$

rezultă

$$N = \frac{F_f}{\mu} = \frac{98}{0{,}4} = 245 \text{ N}.$$

Reacțiunea R fiind rezultanta forțelor paralele N și P, avem

$$R = N + P. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca bara AOB să fie în echilibru, trebuie ca momentul forțelor P, F și F_f, în raport cu O, să fie egal cu momentul forței N, în raport cu punctul de rotație O, adică

$$P \cdot b + F \cdot c + F_f \cdot \frac{d}{2} = Na$$

de unde rezultă

$$P = \frac{Na - Fc - F_f \cdot \frac{d}{2}}{b} = \frac{245 \cdot 38 - 98 \cdot 30 - 98 \cdot 3}{135} =$$

$$= \frac{9310 - 2940 - 294}{135} = 45 \text{ N}.$$

Din relația (1) se scoate

$$R = 245 + 45 = 290 \text{ N}.$$

1.70. Pentru presarea unui obiect este necesară o forță $Q = 1\,176$ N, care este realizată cu ajutorul presei din fig. 54, în care $AC = 60$ cm, $BC = 15$ cm, $ED = 30$ cm, $FE = 10$ cm. Care este forța F_1 aplicată în A?

Rezolvare. Aparatul se compune din două pîrghii: pîrghia AC cu punctul de rotație în C și pîrghia FD cu punctul de rotație în F.

Dacă se notează cu X forța comună celor două pîrghii, care ia naștere în bara de legătură BD, se poate scrie pentru pîrghia AC

$$F_1 \cdot AC = X \cdot BC,$$

de unde rezultă

$$X = \frac{AC}{BC} F_1 = \frac{60}{15} F_1 = 4 F_1. \qquad (1)$$

Pentru pîrghia FD se poate scrie

$$X \cdot FD = Q \cdot EF,$$

de undă rezultă

$$X = \frac{EF}{FD} Q = \frac{10}{30} \cdot 1\,176 = 392 \text{ N}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se obține

$$4F_1 = 392 \text{ N}; \quad F_1 = 98 \text{ N}.$$

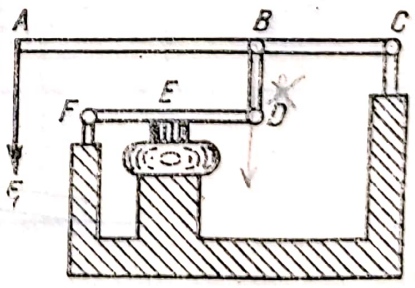


Fig. 54

Scanned with OKEN Scanner

1.71. Pe o scîndură cu lungimea de 1 m stă un om cu greutatea de 661,5 N, la distanța de 0,20 m de capătul A (fig. 55). Ce sarcină Q agățată de sistemul de scripeți indicat în figură poate să țină scîndura suspendată în poziția orizontală?

Rezolvare. Forța exercitată de om asupra scîndurii este

$$R = G - T_1 = 661{,}5 - T_1 \cdot$$

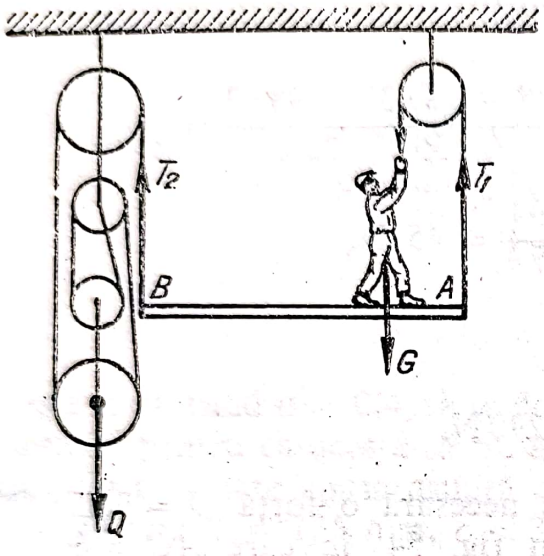


Fig. 55

Această forță fiind egală cu rezultanta forțelor T_1 și T_2, obținem

$$R = T_1 + T_2\,; \quad 661{,}5 - T_1 = T_1 + T_2,$$

de unde rezultă

$$2T_1 + T_2 = 661{,}5 \text{ N}. \qquad (1)$$

Pe de altă parte avem

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4 \cdot \qquad (2)$$

Din ecuațiile (1) și (2) rezultă

$$T_1 = 294 \text{ N} \quad \text{și} \quad T_2 = 73{,}5 \text{ N}.$$

Pentru sistemul de scripeți se obține

$$T_2 = \frac{Q}{2n} = \frac{Q}{2 \cdot 2} = \frac{Q}{4},$$

de unde rezultă

$$Q = 4 \cdot T_2 = 4 \cdot 73{,}5 = 294 \text{ N}.$$

1.72. Ni se cere să ridicăm de jos o grindă grea de oțel cu ajutorul unui levier drept AB și cu un cric la fel cu cel din fig. 34, avînd următoarele elemente:

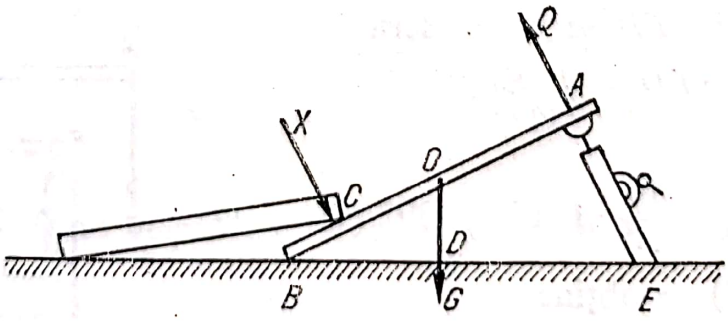


Fig. 56

$r = 10$ cm, $r' = 12$ cm, $R = 30$ cm, $R' = 20$ cm și $F = 245$ N. Lungimea levierului este $l = 2$ m, iar greutatea sa $G = 49$ N. Levierul este introdus sub grindă pe lungimea $BC = a = 40$ cm (fig. 56). Capătul A al levierului fiind ridicat la înălțimea de 1,20 m, se cere să se calculeze forța cu care grinda apasă pe levier.

Rezolvare. Forța Q cu care cricul împinge extremitatea A a levierului, este

$$Q = \frac{RR'}{rr'} F = \frac{30 \cdot 20}{10 \cdot 12} \cdot 245 = 1\,225\,\text{N}.$$

Dacă se notează cu X forța cu care grinda apasă pe levier și se iau momentele forțelor în raport cu B, se obține

$$X \cdot BC + G \cdot BD = Q \cdot AB. \qquad (1)$$

Ținînd seama că

$$BD = \frac{OB}{AB} \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 - 1{,}44} = 0{,}8 \text{ m}.$$

și făcînd înlocuirile în (1), se obține

$$0{,}4X + 49 . 0{,}8 = 1\,225 \cdot 2,$$

de unde rezultă

$$X = \frac{2450 - 39{,}2}{0{,}4} = 6\,027 \text{ N}.$$

1.73. Un copil cu greutatea de 392 N se urcă pe o scîndură AB de lungime $l = 2$ m și greutate $G = 29{,}4$ N, care se reazemă cu capătul A de teren, iar capătul B este suspendat de un sistem de scripeți compuși (fig. 57). Scripetele mare fix are raza $R = 15$ cm, iar scripetele mic fix, solidar cu cel mare, are raza $r = 5$ cm. La ce distanță de capătul A trebuie să se urce copilul pentru a ține în echilibru o greutate $Q = 2\,058$ N? Unghiul făcut de scîndură cu terenul este egal cu α.

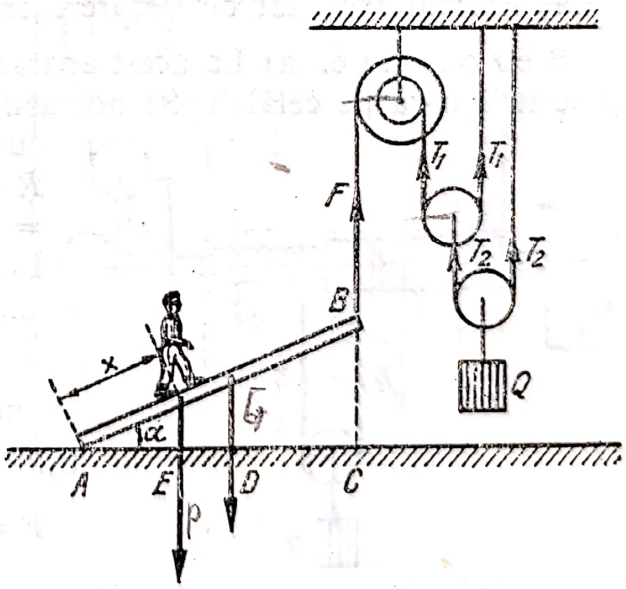


Fig. 57

Rezolvare. Momentele forțelor care acționează asupra scîndurii, în raport cu punctul A, ne dau

$$P \cdot AE + G \cdot AD = F \cdot AC, \qquad (1)$$

unde F este tensiunea în firul care susține scîndura. Ținînd seama că $P = 392$ N; $AE = x \cos\alpha$; $G = 29{,}4$ N; $AD = \frac{l}{2}\cos\alpha = \cos\alpha$; $AC = l\cos\alpha = 2\cos\alpha$ și înlocuind în relația (1) se obține

$$392\, x\cos\alpha + 29{,}4\cos\alpha = 2F\cos\alpha,$$

de unde rezultă

$$392\, x + 29{,}4 = 2F. \qquad (2)$$

Luînd momentele forțelor care acționează asupra scripeților ficși, în raport cu axa acestor scripeți, se obține

$$T_1 r = FR,$$

de unde rezultă

$$F = \frac{r}{R}T_1 = \frac{rT_2}{2R} = \frac{rQ}{4R} = \frac{1029}{6}.$$

Făcînd înlocuirile în (2), se obține

$$392\, x + 29{,}4 = 2\cdot\frac{1029}{6} = 343\,; \quad x = 0{,}8 \text{ m}.$$

1.74. Doi lucrători ridică o greutate $Q = 27440$ N cu ajutorul unui vîrtej diferențial (fig. 58). Diametrele tamburilor sînt de 32 și 30 cm, iar raza manivelei de 45 cm. Viteza de rotație este de 8 rot/min, iar randamentul η este de 65%. Se cere:

a) Efortul exercitat de fiecare lucrător. b) Viteza de ridicare a greutății.

Rezolvare. a) La acest aparat cablul se desfășoară de pe un tambur și se înfășoară pe celălalt. Se notează cu $r_1 = 16$ cm raza tamburului mare cu $r_2 = 15$ cm raza tamburului mic, cu $R = 45$ cm raza manivelei și cu $T_1 = Q/2 = 13720$ N tensiunea în cablu. Luînd momentele forțelor în raport cu axa tamburelor, se obține

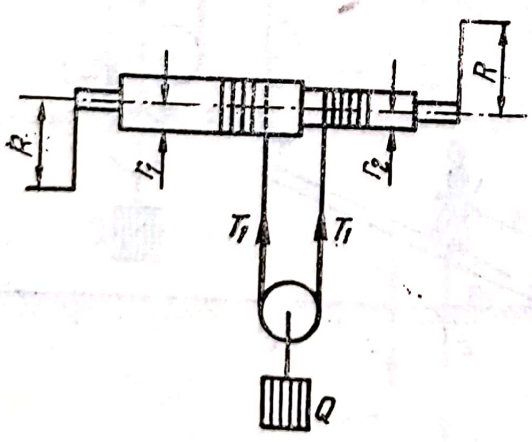


Fig. 58

$$2FR + T_1 r_2 = T_1 r_1, \qquad (1)$$

unde F este efortul util care acționează manivela. Din (1) rezultă

$$F = \frac{r_1 - r_2}{2R}T_1 = \frac{r_1 - r_2}{4R}Q = \frac{27440}{180} = 152{,}4 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efortul depus de un lucrător este

$$F' = \frac{F}{\eta} = \frac{152{,}4}{0{,}65} = 234{,}5 \text{ N}.$$

b) La fiecare rotație, cablul se ridică cu înălțimea

$$h = \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2} = \pi(r_1 - r_2)\cdot$$

Viteza de ridicare va fi deci

$$v = \pi n(r_1 - r_2) = 3{,}14 \cdot 8 \cdot 0{,}01 = 0{,}2512 \text{ m/min}.$$

1.75. O placă metalică omogenă $ABCD$ cu dimensiunile $AB = CD = 1$ m și $AD = BC = 0{,}3$ m și cu greutatea $G = 294$ N, este suspendată într-un plan vertical cu ajutorul unor cabluri și scripeți, așa cum se vede în fig. 59. Să se determine greutățile P și Q care țin placa orizontală, în următoarele cazuri:

a) Placa $ABCD$ este dreaptă. b) Placa are colțul de jos îndoit avînd forma $ADFBE$.

Rezolvare. a) În felul acesta, centrul de greutate al plăcii se află la mijloc și tensiunile în fire sînt egale:

$$T_1 = T_2 = \frac{294}{2} = 147 \text{ N}.$$

Rezultă că

$$P = T_2 = 147 \text{ N}.$$

Valoarea lui Q se scoate din relația

$$T_1 = \frac{Q}{2^n}; \quad Q = 2^3 T_1 =$$

$$= 2^3 \cdot 147 = 1\,176 \text{ N}.$$

b) Presupunînd că placa este omogenă, greutatea ei pe unitatea de suprafață este

$$q = \frac{294}{1 \cdot 0{,}3} = 980 \text{ N/m}^2.$$

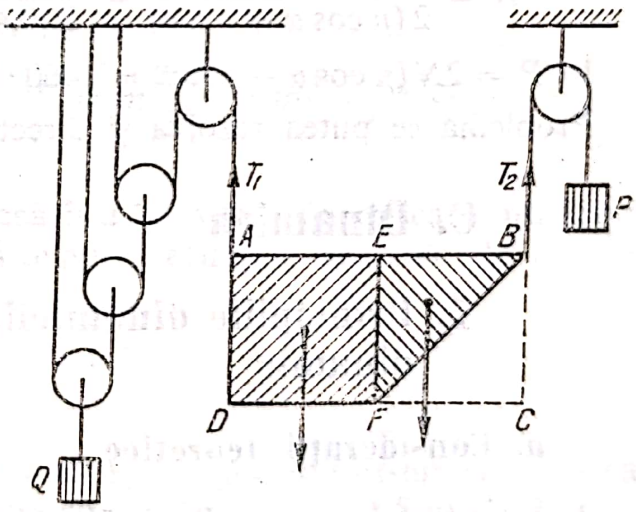


Fig. 59

În acest caz placa este formată din dreptunghiul $AEDF$ de greutate

$$G_1 = 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 980 = 205{,}8 \text{ N}$$

Scanned with OKEN Scanner

aplicată la distanța de 0,35 m față de A și din două porțiuni triunghiulare suprapuse BEF cu greutatea

$$G_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 980 = 88{,}20 \text{ N}$$

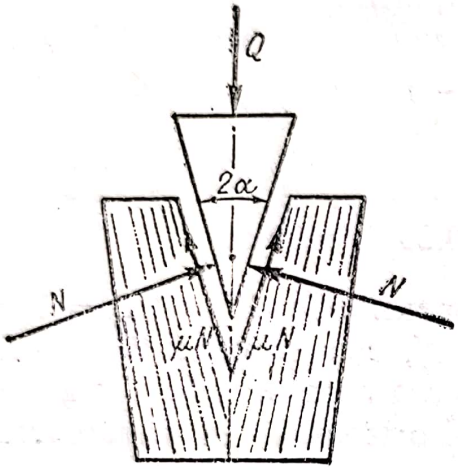


Fig. 60

aflată la distanța de 0,2 m față de punctul B și la 0,8 m față de A.

Notînd cu T'_1 și T'_2 noile tensiuni în fire și luînd momentele în raport cu B, se obține

$$T'_1 \cdot 1 = G_1 \cdot 0{,}65 + G_2 \cdot 0{,}2\,; \quad T'_1 = 151{,}41 \text{ N},$$

$$Q' = 2^3 \cdot T'_1 = 8 \cdot 151{,}41 = 1211{,}28 \text{ N},$$

$$P' = T'^{\text{II}}_2 = G - T'_1 = 294 - 151{,}41 = 142{,}59 \text{ N}.$$

1.76. O pană de oțel are baza $2a = 12$ cm și înălțimea $h = 20$ cm; ea este bătută cu un ciocan, cu o forță $Q = 980$ N într-o buturugă de lemn pe care vrem s-o spargem (fig. 60). Coeficientul de frecare dintre lemn și oțel fiind $\mu = 0{,}4$, — se cere:

a) Reacțiunea normală pe fața penei. b) Forța necesară pentru scoaterea penei din buturugă.

Rezolvare. a) Ținînd seamă că $\operatorname{tg}\alpha = a/h = 6/20 = 0{,}6$, $\sin\alpha = 0{,}289$ și $\cos\alpha = 0{,}957$ rezultă

$$N = \frac{Q}{2(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{980}{2(0{,}4 \cdot 0{,}957 + 0{,}289)} = 730 \text{ N}.$$

b) $P = 2N(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) = 1460 \cdot 0{,}0938 = 137$ N.

Problema se putea rezolva și direct, cu ajutorul ecuațiilor de echilibru.

C. Dinamica

7. Principiile dinamicii, forțele de inerție, echilibrul dinamic

a. Considerații teoretice

1. Între forțele care acționează asupra unui corp de masă m și accelerațiile dobîndite de corp, există relația

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \ldots = \frac{F_n}{a_n} = \frac{G}{g} = m.$$

Din această relație rezultă principiul de bază al dinamicii

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta forțelor exterioare și de legătură, care acționează asupra corpului în mișcare, iar produsul $m\vec{a}$ este forța de inerție.

2. Forțele de inerție apar în mișcările în care variază mărimea sau direcția vitezei.

a) În mișcarea rectilinie uniformă viteza nu variază, deci nu există accelerație și forță de inerție.

b) În mișcarea rectilinie uniform variată, forța de inerție este de sens contrar cu accelerația

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

c) În mișcarea circulară uniformă, direcția vitezei variază în fiecare moment. Aici apare o forță de inerție centrifugă:

$$F_c = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2.$$

d) În mișcarea circulară uniform variată, în care variază și mărimea și direcția vitezei, apar două forțe de inerție, una normală și alta tangentă la traiectorie

$$F_n = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2, \quad F_t = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{v - v_0}{t}.$$

3. Principiul lui d'Alambert. Dacă într-un sistem în mișcare introducem forțele de inerție, putem aplica sistemului ecuațiile generale de echilibru arătate în statică.

b. Probleme

1.77. O persoană avînd masa $m = 60$ kg se găsește într-un ascensor care se deplasează și la urcare și la coborîre cu accelerația $a = 1{,}5$ m/s².

a) Să se calculeze forțele F și F' exercitate de persoană asupra ascensorului, la coborîre și urcare.

b) Cît trebuie să fie accelerația ascensorului pentru ca forța exercitată de persoană să fie nulă?

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Dacă considerăm sensul pozitiv al accelerației în jos, se pot scrie, pentru coborîre și urcare, următoarele relații

$$mg - F = ma, \tag{1}$$

$$mg - F' = -ma. \tag{2}$$

Din (1) se scoate valoarea forței la coborîre

$$F = m(g - a) = 60(9{,}8 - 1{,}5) = 498 \text{ N}.$$

Din (2) se scoate valoarea forței la urcare

$$F' = m(g + a) = 60(9{,}8 + 1{,}5) = 678 \text{ N}.$$

b) Pentru ca forțele exercitate de persoană să fie zero, trebuie să avem

$$g - a = 0. \quad g + a = 0.$$

Din aceste două relații se scoate

$$a = \pm g = \pm 9{,}80 \text{ m/s}^2.$$

1.78. Un tramvai cu masa $M = 20$t merge între două stații timp de un minut; el pornește din prima stație uniform accelerat timp de 10 s, iar oprirea în stația următoare se face în 8 s. Restul drumului merge uniform. Cunoscînd coeficientul de frecare cu șinele $\mu = 0{,}051$, se cere:

a) Viteza cu care tramvaiul merge uniform.

b) Distanța dintre stații. c) Forța de tracțiune în timpul pornirii.

Rezolvare. a) La oprire, curentul fiind întrerupt, asupra tramvaiului acționează numai forța de inerție și de frecare și avem

$$Ma_2 = \mu Mg, \quad a_2 = \mu g = 0{,}051 \cdot 9{,}81 = 0{,}50 \text{ m/s}^2,$$

$$v = a_2 t_2 = 0{,}5 \cdot 8 = 4 \text{ m/s} = 14{,}4 \text{ km/h}.$$

b) În perioada de pornire accelerația este

$$a_1 = \frac{v}{t_1} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \text{ m/s}^2.$$

Timpul de mers cu viteză constantă t_3 este egal cu 42 s, iar distanța dintre stații

$$S = v\left(\frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2} + t_3\right) = 4\left(\frac{10}{2} + \frac{8}{2} + 42\right) = 204 \text{ m}.$$

c) $F_t = Ma_1 + \mu Mg = M(a_1 + \mu g) = 20 \cdot 10^3 \cdot 0{,}9 = 18 \cdot 10^3$ N.

Scanned with OKEN Scanner

1.79. Un corp cu masa $m = 100$ kg este tras pe un plan orizontal de două forțe concurente F_1 și F_2 situate într-un plan vertical și care fac între ele un unghi de 90° (fig. 61). Rezultanta celor două forțe este paralelă cu planul orizontal.

Sub acțiunea acestor forțe și a forței de frecare, corpul capătă o mișcare uniform accelerată cu accelerația $a_1 = 1$ m/s².

După 10 s, acțiunea forțelor F_1 și F_2 încetează. Cunoscînd mărimea forței $F_1 = 150$ N și coeficientul de frecare $\mu = 0{,}2$ dintre corp și plan și considerînd $g = 10$ m/s², se cere:

a) Mărimea forței F_2 și direcția forțelor F_1 și F_2 față de orizontală.

b) Spațiul total străbătut de corp și timpul de mișcare.

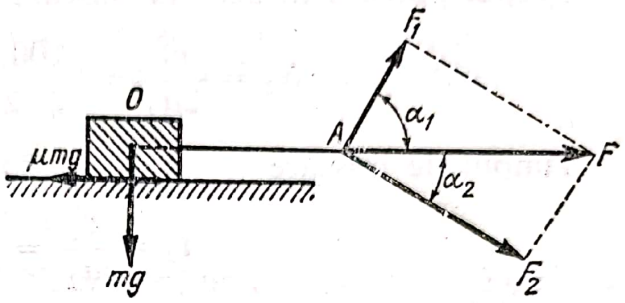


Fig. 61

Rezolvare. a) Rezultanta F a forțelor F_1 și F_2 fiind orizontală putem scrie

$$F = \mu mg + ma_1,$$

$$F = m(a_1 + \mu g) = 100(1 + 0{,}2 \cdot 10) = 100 \cdot 3 = 300 \text{ N}.$$

Dacă α_1 și α_2 sînt unghiurile făcute de F_1 și de F_2 cu orizontala, se poate scrie

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{300}{\sin 90^\circ} = 300.$$

Din această relație rezultă

$$\sin \alpha_2 = \frac{F_1}{300} = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 30^\circ \text{ si } \alpha_1 = 60^\circ,$$

$$F_2 = 300 \sin 60^\circ = 300 \cdot 0{,}865 = 259{,}5 \text{ N}.$$

b) Viteza corpului după timpul $t_1 = 10$ s, este

$$v_1 = v_0 + a_1 t_1 = 0 + 1 \cdot 10 = 10 \text{ m/s}.$$

Spațiul parcurs după timpul t_1, este

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1 \cdot 100}{2} = 50 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

După încetarea acțiunii forței F, corpul se mișcă mai departe uniform întîrziat sub acțiunea forței de frecare și a forței de inerție, cu viteza inițială v_1 și cu accelerația a_2, dată de relația

$$a_2 = \mu g = 0{,}2 \cdot 10 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Spațiul parcurs în această mișcare este

$$S_2 = \frac{v_1^2}{2a_2} = \frac{100}{2 \cdot 2} = \frac{100}{4} = 25 \text{ m}.$$

Timpul de mișcare

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ s}.$$

Spațiul total este

$$S = S_1 + S_2 = 50 + 25 = 75 \text{ m}.$$

Timpul total de mișcare este

$$t = t_1 + t_2 = 10 + 5 = 15 \text{ s}.$$

1.80. Un tren se deplasează pe o cale ferată orizontală. Fiind frînat, el se oprește după 40 s. În acest timp, un pendul, aflat într-un compartiment, rămîne deviat cu 10 cm pe orizontală (fig. 62). Cunoscînd lungimea pendulului $l = 2$ m și considerîndu-se $g = 10$ m/s². se cere:

a) Viteza trenului la începutul frînării. b) Spațiul parcurs pînă la oprire. c) Coeficientul de frecare cu șinele.

(R.F.Ch., nr. 5/1965)

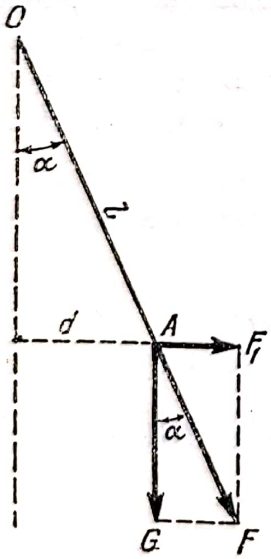


Fig. 62

Rezolvare. a) Pentru ca pendulul să fie în echilibru, trebuie să avem

$$\frac{F_1}{G} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}, \qquad (1)$$

unde F_1 este forța de inerție, G — greutatea, m — masa pendulului, iar a — accelerația terenului.

Pe de altă parte, din examinarea figurii rezultă că

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{d}{l} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05.$$

Înlocuind în relația (1) avem

$$\frac{a}{g} = 0{,}05, \quad a = 0{,}05 \cdot 10 = 0{,}5 \text{ m/s}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza inițială este dată de relația

$$v = v_0 - at = 0, \quad v_0 = at = 0{,}5 \cdot 40 = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h}.$$

b) $S = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{400}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{400}{1} = 400$ m.

c) Aburul fiind oprit, nu mai există forță de tracțiune, iar forța de inerție a trenului servește pentru învingerea forței de frecare. Din relația $Ma = \mu Mg$, deducem

$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05.$$

1.81. Un corp cu greutatea $G = 490$ N, aflat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$, este tras în sus de o forță Q, care face cu direcția planului un unghi $\beta = 30°$ (v. fig. 50). Coeficientul de frecare cu planul fiind egal cu $\mu = 0{,}27$, se cere:

a) Valoarea forței Q, astfel încît corpul să ajungă în vîrful planului în 5 s cu viteza constantă de 2 m/s, b) Valoarea forței Q, astfel încît corpul să pornească de jos cu viteza inițială de 2 m/s și să se oprească în vîrful planului, c) În cît timp ajunge corpul la baza planului, dacă acțiunea forței Q încetează cînd corpul se află în vîrful planului?

Indicație și răspuns. În mișcarea uniformă, rezultanta forțelor este zero. Pentru mișcarea uniform întîrziată se aplică principiul lui d'Alambert și se obține

$$Q_1 = 510 \text{ N}, \quad Q_2 = 495 \text{ N}, \quad t = 2 \text{ s}.$$

1.82. Intr-o mașină Atwood, fiecare cilindru are masa $M = 100$ g. Unul din cilindri se încarcă cu două greutăți adiționale avînd fiecare masa $m = 10$ g. Una dintre greutățile adiționale are o formă care nu-i permite trecerea prin cursorul inelar. Se cere:

a) La ce distanță x de origine trebuie fixat cursorul inelar pentru ca sistemul, abandonat fără viteza inițială să parcurgă în două secunde înălțimea totală a mașinii, $h = 1{,}50$ m. b) La ce distanță va trebui fixat cursorul pentru ca la finele cursei cilindrul încărcat să aibă viteza de 1 ,5 m/s. Se va neglija greutatea scripetelui și rezistența aerului.

Rezolvare. Pînă la atingerea cursorului, sistemul are accelerație a_1 și este pus în mișcare de forța $F = 2mg$.

Masa totală în mișcare fiind egală cu $2(M + m)$, avem

$$2mg = 2(M + m)\, a_1,$$

$$a_1 = \frac{m}{M + m} \cdot g = \frac{0{,}010}{0{,}100 + 0{,}010} 9{,}81 = 0{,}89 \text{ m/s}^2 \cdot$$

Spațiul x străbătut pînă la cursor este

$$x = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 0{,}445\, t_1^2 \cdot \tag{1}$$

După trecerea prin cursorul inelar, sistemul va avea accelerația a_2, forța care produce mișcarea este egală cu $F' = mg$, iar masa în mișcare fiind egală cu $2M + m$ putem scrie

$$mg = (2M + m)\, a_2 ,$$

$$a_2 = \frac{m}{2M + m} g = \frac{0{,}010}{0{,}200 + 0{,}01} \cdot 9{,}81 = 0{,}47 \text{ m/s}^2 \cdot$$

Viteza inițială la finele spațiului x este

$$v_0 = a_1 t_1 = 0{,}89\, t_1 .$$

Spațiul parcurs după trecerea cursorului

$$h - x = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 0{,}89\, t_1 t_2 + 0{,}235 t_2^2 \cdot \tag{2}$$

Eliminînd pe x între ecuațiile (1) și (2) și ținînd seamă că $t_1 + t_2 = 2$, se obține ecuația

$$111\, t_1^2 - 444\, t_1 + 302 = 0$$

care rezolvată conduce la $t_1 = 0{,}87$ s.

Înlocuind pe t_1 în (1) se obține $x = 0{,}33$ m.

b) În acest caz se poate scrie

$$x' = \frac{1}{2} a_1 t_1'^2 = 1{,}5 - \left(v_0' t_2' + \frac{1}{2} a_2 t_2'^2 \right), \tag{3}$$

$$v' = v_0' + a_2 t_2' = 1{,}5, \tag{4}$$

$$v_0' = a_1 t_1' . \tag{5}$$

Din relațiile (3), (4) și (5) se obține $t'_1 = 1{,}5$ s și $x' = 1{,}01$ m.

1.83. Un corp A cu masa $m_1 = 2$ kg este legat de corpul B cu masa $m_2 = 8$ kg, printr-un fir de greutate neglijabilă, petrecut peste un scripete fix (fig. 63). Corpul B se mișcă pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare $\mu = 0{,}1$. După o secundă de la pornirea sistemului, se rupe firul și se cere:

Scanned with OKEN Scanner

a) Distanța la care trebuie să se afle corpul B pe planul orizontal în momentul începerii mișcării, astfel încît el să se oprească la marginea planului orizontal cum și timpul de mișcare a acestui corp.

b) Timpul și viteza de cădere a corpului A, dacă în momentul ruperii firului, el se află la înălțimea de 6,2 m deasupra solului. Se va considera $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Rezolvare. a) Accelerația mișcării pînă în momentul ruperii firului este

$$a_1 = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} \cdot g =$$

$$= \frac{2 - 0{,}8}{10} \cdot 10 = 1{,}2 m/s^2.$$

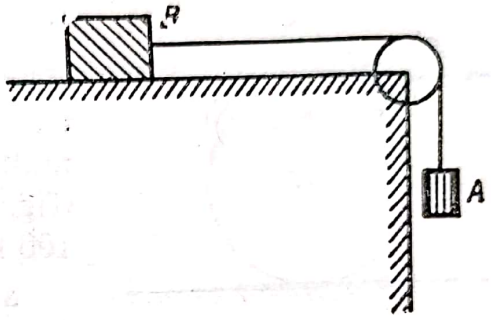


Fig. 63

Spațiul parcurs de B pînă în momentul ruperii firului este

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 1 = 0{,}60\ \text{m}.$$

Viteza corpurilor A și B în momentul ruperii firului este

$$v_1 = a_1 t_1 = 1{,}2 \cdot 1 = 1{,}2\ \text{m/s}.$$

După ruperea firului, corpul B are o mișcare uniform încetinită cu viteza inițială v_1 și cu accelerația

$$a_2 = \mu g = 0{,}1 . 10 = 1\ \text{m/s}^2.$$

Spațiul străbătut în această mișcare va fi

$$S_2 = \frac{v_1^2}{2a_2} = \frac{1{,}2^2}{2 \cdot 1} = \frac{1{,}44}{2} = 0{,}72\ \text{m}.$$

Timpul întrebuințat în această mișcare

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = \frac{1{,}2}{1} = 1{,}2\ \text{s}.$$

Spațiul total parcurs de corpul B este

$$S = S_1 + S_2 = 0{,}60 + 0{,}72 = 1{,}32\ \text{m}.$$

Timpul total de mișcare a acestui corp este

$$t = t_1 + t_2 = 1 + 1{,}2 = 2{,}2\ \text{s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Corpul A cade vertical cu viteza inițială $v_0 = v_1 = 1{,}2$ m/s. Viteza de cădere pe sol este

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = \sqrt{1{,}44 + 124} = 11{,}2 \text{ m/s}.$$

Timpul de cădere al acestui corp este

$$t = \frac{2h}{v_1 + v} = \frac{12{,}4}{12{,}4} = 1 \text{ s}.$$

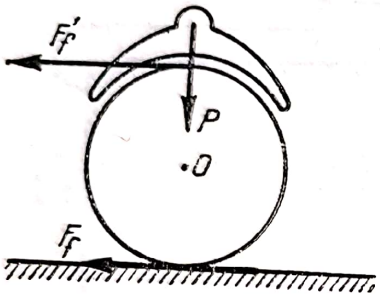


Fig. 64

1.84. Pe o șosea asfaltată și orizontală, un ciclist se deplasează cu viteza de 14,4 km/h. Pentru oprire folosește o frînă, care acționează simultan pe fiecare roată cu cîte o forță $P = 100$ N (fig. 64). Ciclistul și bicicleta cîntăresc împreună 100 kg. Dacă $g = 10$ m/s, se cere:

a) Accelerația de frînare, dacă între roată și frînă, coeficientul de frecare $\mu_1 = 0{,}25$. b) Distanța parcursă pînă la oprire. c) Forța minimă necesară pentru blocarea roților, așa ca ele să alunece pe șosea pînă la oprire, coeficientul de frecare dintre roți și asfalt fiind $\mu_2 = 0{,}2$. d) Distanța parcursă pînă la oprire cu roțile blocate.

(Olimpiada de fizică, 964)

Rezolvare. a) Viteza bicicletei este

$$v = \frac{14{,}4}{3{,}6} = 4 \text{ m/s}.$$

Forța de frecare dintre frînă și roată este

$$F'_f = \mu_1 P = 0{,}25 \cdot 100 = 25 \text{ N}.$$

Această forță trebuie să echilibreze jumătate din forța de inerție datorită frînării, adică

$$F'_f = \frac{1}{2} m a_1,$$

de unde

$$a_1 = \frac{2F'_f}{m} = \frac{2 \cdot 25}{100} = \frac{50}{100} = 0{,}5 \text{ m/s}^2$$

b) $$S_1 = \frac{v^2}{2a_1} = \frac{16}{2 \cdot 0{,}5} = 16 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Corpul A cade vertical cu viteza inițială $v_0 = v_1 = 1{,}2$ m/s. Viteza de cădere pe sol este

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = \sqrt{1{,}44 + 124} = 11{,}2 \text{ m/s}.$$

Timpul de cădere al acestui corp este

$$t = \frac{2h}{v_1 + v} = \frac{12{,}4}{12{,}4} = 1 \text{ s}.$$

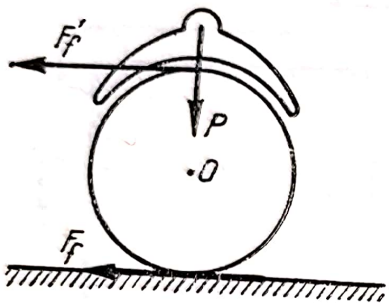


Fig. 64

1.84. Pe o șosea asfaltată și orizontală, un ciclist se deplasează cu viteza de 14,4 km/h. Pentru oprire folosește o frînă, care acționează simultan pe fiecare roată cu cîte o forță $P = 100$ N (fig. 64). Ciclistul și bicicleta cîntăresc împreună 100 kg. Dacă $g = 10$ m/s, se cere: a) Accelerația de frînare, dacă între roată și frînă, coeficientul de frecare $\mu_1 = 0{,}25$. b) Distanța parcursă pînă la oprire. c) Forța minimă necesară pentru blocarea roților, așa ca ele să alunece pe șosea pînă la oprire, coeficientul de frecare dintre roți și asfalt fiind $\mu_2 = 0{,}2$. d) Distanța parcursă pînă la oprire cu roțile blocate.

(Olimpiada de fizică, 964)

Rezolvare. a) Viteza bicicletei este

$$v = \frac{14{,}4}{3{,}6} = 4 \text{ m/s}.$$

Forța de frecare dintre frînă și roată este

$$F'_f = \mu_1 P = 0{,}25 \cdot 100 = 25 \text{ N}.$$

Această forță trebuie să echilibreze jumătate din forța de inerție datorită frînării, adică

$$F'_f = \frac{1}{2} m a_1,$$

de unde

$$a_1 = \frac{2F'_f}{m} = \frac{2 \cdot 25}{100} = \frac{50}{100} = 0{,}5 \text{ m/s}^2$$

b) $$S_1 = \frac{v^2}{2a_1} = \frac{16}{2 \cdot 0{,}5} = 16 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Pentru ca roata să se blocheze, trebuie ca forța de frecare dintre frînă și roată și forța de frecare dintre roată și asfalt să fie egale și de același sens, adică

$$\mu_1 P_{min} = \mu_2 \frac{mg}{2}.$$

Din această relație rezultă

$$F_{min} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{mg}{2} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}25} \cdot \frac{1\,000}{2} = 400\ \text{N}.$$

d) Forța totală de frecare dintre roți și asfalt trebuie să echilibreze forța de inerție datorită alunecării, adică

$$\mu_2 mg = ma_2.$$

Din această ecuație rezultă

$$a_2 = \mu_2 g = 0{,}2 \cdot 10 = 2\ \text{m/s}^2.$$

Spațiul parcurs este

$$S_2 = \frac{v^2}{2a_2} = \frac{16}{2 \cdot 2} = \frac{16}{4} = 4\ \text{m}.$$

1.85. Pe după un scripete fix este trecută o sfoară la ale cărei capete sînt legate două greutăți; la un capăt este legată greutatea Q cu masa $m = 2$ kg, iar la celălalt capăt este legată greutatea P cu masa $m' = 1$ kg. Scripetele este prins de un dinamometru atîrnat de tavan (fig. 65). Neglijîndu-se frecările, greutățile scripetelui și a sforii, să se calculeze ce greutate va indica dinamometrul.

(G.M.F., nr. 2/1958)

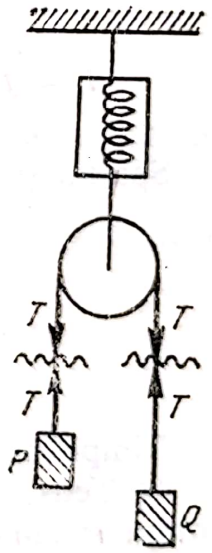


Fig. 65

Rezolvare. Greutățile P și Q fiind în mișcare, au accelerații,

$$a = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot g = \frac{2 - 1}{2 + 1} g = \frac{g}{3}.$$

Tensiunile în ramurile sforii fiind egale, avem

$$mg - T = ma; \quad T = m(g - a) = 2\left(g - \frac{g}{3}\right) = \frac{4g}{3}.$$

Dinamometrul va indica o forță

$$F = 2T = \frac{8g}{3} = \frac{8 \cdot 9{,}81}{3} = 26{,}16\ \text{N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.86. Pentru evitarea construcțiilor grele de canale și ecluze, între localitățile Charleroi și Bruxelles din Belgia, vapoarele circulă pe uscat fiind introduse într-un bazin cu apă, care merge pe șine, pe un plan înclinat cu lungimea $S = 1430$ m și cu înălțimea $h = 68$ m (fig. 66). Bazinul este susținut de cabluri înfășurate pe tambure cu diametrul $D = 5$ m, acționate mecanic. Pentru ca apa să nu se reverse, viteza bazinului crește treptat cu cîte 4 cm/s, de la zero pînă la 1,2 m/s.

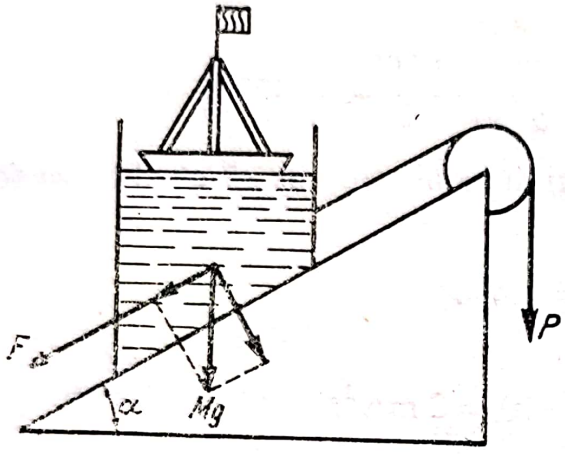


Fig. 66

Presupunînd că bazinul și vasul cîntăresc împreună 5000 t, coeficientul de frecare cu șinele, $\mu = 0{,}01$, iar $g = 10$ m/s², se cere: a) Timpul de parcurgere a spațiului dintre cele două localități, (în care vasul se oprește) la coborîre și urcare. b) Efortul maxim din cabluri în timpul celor două parcursuri. c) Care este accelerația unghiulară a tamburului pînă la atingerea vitezei constante de 1,2 m/s și după cîte rotații se ajunge la această viteză?

Rezolvare. a) Timpii și spațiile din perioadele de pornire dintr-o localitate și oprire în cealaltă sînt

$$t_1 = t_2 = \frac{v}{a} = \frac{1{,}2}{0{,}04} = 30'', \qquad s_1 = s_2 = \frac{v^2}{2a} = \frac{1{,}44}{0{,}08} = 18 \text{ m}.$$

Spațiul și timpul din mișcarea uniformă sînt

$$S_2 = S - 2s_1 = 1430 - 36 = 1394 \text{ m},$$

$$t_3 = \frac{S_2}{v} = \frac{1394}{1{,}2} = 1161{,}7 \text{ s} = 19'22''.$$

Timpul total de coborîre sau urcare, $t = 2t_1 + t_3 = 1221{,}7$ s $= 20'21{,}7''$.

b) Tensiunile în cablu la coborîre, în mișcarea uniform accelerată, uniformă și uniform încetinită, sînt

$$T_1 = Mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - Ma,$$

$$T_2 = Mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

$$T_3 = Mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + Ma,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde M este masa totală a vasului și bazinului, iar α este unghiul planului înclinat cu orizontala.

Tensiunile în cablu la urcare, în mișcarea uniform accelerată, uniformă și uniform încetinită sînt

$$T_1' = Mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + Ma,$$

$$T_2' = Mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

$$T_3' = Mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - Ma.$$

Rezultă că tensiunea maximă în cabluri are loc la urcare, în perioada de pornire uniform accelerată și are valoarea

$$T_{max} = 5\cdot 10^7 (0{,}0475 + 0{,}00998) + 2\cdot 10^5 = 3\,074\cdot 10^3 \text{ N}.$$

c) $\varepsilon = \dfrac{a_t}{R} = \dfrac{0{,}04}{2{,}5} = 0{,}016 \text{ rad/s}^2,$

$$n = \frac{s_1}{\pi D} = \frac{18}{3{,}14\cdot 5} = \frac{18}{15{,}70} = 1{,}14 \text{ rot}.$$

1.87. Un om de greutate $G = 768{,}32$ N merge în tramvai, în picioare, fără să se țină de ceva. Tramvaiul se oprește brusc și omul face instinctiv un pas înainte fără să cadă. Se cere:

a) Viteza tramvaiului în momentul în care începe oprirea, dacă centrul de greutate al omului se află la distanța $h = 1{,}225$ m de la podea, pasul făcut de om, $p = 0{,}50$ m, iar oprirea tramvaiului se face în timpul $t = 2{,}5''$.

b) Spațiul parcurs de tramvai în timpul frînării, dacă se socotește $g = 9{,}8$ m/s².

R e z o l v a r e. a) În timpul frînării apare forța $F = ma = Ga/g$. Pentru echilibru trebuie să avem

$$Fh = G\frac{p}{2},$$

$$F = \frac{Gp}{2h} = \frac{768{,}32\cdot 0{,}5}{2\cdot 1{,}225} = 156{,}8 \text{ N}.$$

Din expresia lui F, scrisă la început, se deduce

$$a = \frac{gF}{G} = \frac{9{,}80\cdot 156{,}8}{768{,}32} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza inițială în momentul frînării este

$$v_0 = a\,t = 2 \cdot 2{,}5 = 5 \text{ m/s} = 18 \text{ km/h}.$$

b) Spațiul parcurs de tramvai în timpul frînării este

$$S = \frac{v_0 t}{2} = \frac{5 \cdot 2{,}5}{2} = 6{,}25 \text{ m}.$$

1.88. După parcurgerea în mișcare uniform accelerată a unei porțiuni de 250 m de cale ferată rectilinie și orizontală, cu viteza inițială de 54 km/h, o drezină de 10 t intră într-o curbă cu viteza de 72 km/h și iese din curbă cu viteza de 43,2 km/h. Curba este un sfert de cerc, cu raza de 500 m, iar coeficientul de frecare cu șina, $\mu = 0{,}025$. Considerîndu-se $g = 10$ m/s² și neglijînd rezistența aerului, se cer:

a) Forțele de tracțiune dezvoltate de motorul drezinei pe cele două trasee.
b) Forțele orizontale care apasă pe șine, la intrarea și la ieșirea din curbă.
c) Timpul de parcurgere a celor două trasee de cale ferată.

Rezolvare. a) Viteza inițială și vitezele de intrare și de ieșire din curbă sînt $v_0 = 15$ m/s, $v_1 = 20$ m/s și $v_2 = 12$ m/s.

Pe primul traseu, drezina are o mișcare uniform accelerată, cu accelerația

$$a_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2S_1} = \frac{400 - 225}{2 \cdot 250} = \frac{175}{500} = 0{,}35 \text{ m/s}^2.$$

Forța de tracțiune pe acest traseu este dată de ecuația de echilibru dinamic

$$F_1 - F_f - F_i = 0$$

de unde

$$F_1 = F_f + F_i = \mu\, mg + ma = m\,(\mu g + a) =$$

$$= 10\,000\,(0{,}025 \cdot 10 + 0{,}35) = 10\,000 \cdot 0{,}60 = 6000 \text{ N}.$$

Pe porțiunea curbă, drezina are o mișcare uniform încetinită.
Lungimea curbei este

$$S_2 = \frac{2\,\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 500}{2} = 785 \text{ m}.$$

Accelerația tangențială în curbă este

$$a_2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,S_2} = \frac{144 - 400}{2 \cdot 785} = -\frac{256}{1\,570} = -0{,}16 \text{ m/s}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forța de tracțiune, tangentă la traiectorie este

$$F_2 = F_f - F_i = m(\mu g - a_2) =$$
$$= 10\,000\,(0{,}025 \cdot 10 - 0{,}16) = 10\,000 \cdot 0{,}09 = 900 \text{ T},$$

b) Forța orizontală care apasă pe șină este forța de inerție centrifugă,

$$F_{1c} = m\frac{v_1^2}{R} = 10\,000 \cdot \frac{400}{500} = 8000 \text{ N},$$

$$F_{2c} = m\frac{v_2^2}{R} = 10\,000 \cdot \frac{144}{500} = 2880 \text{ N}.$$

c) Timpul de parcurgere a celor două trasee, este

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a_1} = \frac{20-15}{0{,}35} = 14{,}3 \text{ s},$$

$$t_2 = \frac{v_1 - v_2}{a_2} = \frac{20-12}{0{,}16} = 50 \text{ s}.$$

1.89. O găleată plină cu apă, legată la capătul unei frînghii cu lungimea de 0,50 m, se rotește în plan vertical. Care este turația cea mai mică care trebuie imprimată găleții, pentru ca la trecerea ei prin punctul cel mai înalt al traiectoriei circulare, apa să nu cadă?

(R.M.F., nr. 11/1951)

Rezolvare.

$$m\omega^2 R = mg,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}80}{0{,}5}} = \sqrt{19{,}60} = 4{,}42 \text{ rad/s} = \frac{\pi n}{30},$$

$$n = \frac{4{,}42 \cdot 3}{3{,}14} = 42 \text{ rot/min}.$$

1.90. Un avion care zboară cu viteza de 360 km/h descrie un luping cu raza de 200 m într-un plan vertical.

Cît de mare este forța care presează pilotul în avion în punctul inferior și în cel superior al lupingului, dacă greutatea pilotului este de 686 N?

(R.M.F., nr. 10/1951)

Rezolvare. În punctul inferior, forța de presare este egală cu forța centrifugă plus greutatea pilotului, adică

$$F = m\frac{v^2}{R} + P = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{R} + P = \frac{P}{g}\left(\frac{v^2}{R} + g\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă că $v = 360\,000/3600 = 100$ m/s, se obține

$$F = \frac{686}{9{,}8}\left(\frac{10\,000}{200} + 9{,}8\right) = 4186 \text{ N}.$$

În punctul superior, forța de presare este egală cu forța centrifugală minus greutatea pilotului, adică

$$F' = \frac{P}{g}\left(\frac{v^2}{R} - g\right) = \frac{686}{9{,}8}\left(\frac{10\,000}{200} - 9{,}8\right) = 2814 \text{ N}.$$

1.91. O mașină centrifugă de laborator are diametrul roții conducătoare de 20 cm, iar diametrul roții conduse prin intermediul unei curele, este de 5 cm (fig. 67). Axul regulatorului de viteză al mașinii este solidar cu roata condusă, iar bilele regulatorului cîntăresc cîte 100 g fiecare.

Lungimea tijelor care unesc centrele bilelor cu capătul axului regulatorului sînt de cîte 6 cm. Dacă se neglijează greutatea manșonului și a tijelor și se consideră $g = 10$ m/s², se cere:

a) Turația normală a mașinii, dacă tijele bilelor fac cîte 45° cu axul regulatorului. b) Viteza liniară a bilelor în regim normal. c). Eforturile suportate de bile. d) Ce unghiuri vor face tijele cu axul regulatorului, dacă turația mașinii scade cu 9,18% față de turația normală?

Rezolvare. a) Ținînd seamă că

$$\frac{F_c}{mg} = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g} = \operatorname{tg}\alpha, \quad r = l\sin\alpha \text{ avem}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}} = \frac{\pi n_2}{30}.$$

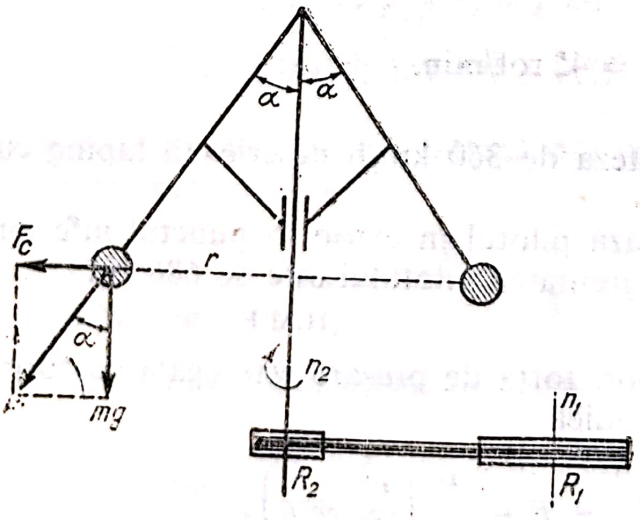


Fig. 67

Din această relație rezultă

$$n_2 = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}} = \frac{30}{3{,}14}\sqrt{\frac{10}{0{,}06 \cdot 0{,}705}} = 146 \text{ rot/min}.$$

Roata conducătoare va avea turația

$$n_1 = \frac{R_2}{R_1} n_2 = \frac{5}{20} \cdot 146 = 36{,}5 \text{ rot/min}.$$

b) $v = r\omega = \frac{3\sqrt{2}}{100} \cdot 15{,}3 = 0{,}647$ m/s.

c) $F = \sqrt{F_c^2 + m^2 g^2} = \sqrt{m^2 r^2 \omega^4 + m^2 g^2} = m\sqrt{(r\omega^2)^2 + g^2} =$

$$= 0{,}1\sqrt{196} = 1{,}4 \text{ N}.$$

d) În acest caz turația mașinii este egală cu $n'_1 = 33{,}15$ rot/min, iar turația axei regulatorului, $n'_2 = 132{,}60$ rot/min.

Viteza unghiulară a regulatorului

$$\omega'_2 = \frac{\pi n'_2}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 132{,}6}{30} = 13{,}88 \text{ rad/s}.$$

Pe de altă parte avem relația

$$\cos\alpha = \frac{g}{l\omega'^2_2} = \frac{10}{0{,}06 \cdot 192{,}65} = \frac{10}{11{,}56} = 0{,}865 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de undă rezultă $\alpha = 30°$.

1.92. Un băiat învîrtește într-un plan vertical o piatră cu masa de 1 kg, atîrnată de un fir care poate să suporte o tensiune egală cu 137,2 N. Axa de rotație se află la o distanță $h_0 = 4$ m de la pămînt; raza cercului descris de piatră este $l = 1$ m.

Cu ce viteză unghiulară trebuie să învîrtească băiatul piatra pentru ca firul să se rupă? La ce distanță s, de la băiat, va cădea piatra?

(G.M.F., nr. 3/1955)

Rezolvare. Tensiunea maximă în fir este

$$T = 137{,}2 = mg + ml\omega^2.$$

Din această relație rezultă

$$\omega = \sqrt{\frac{T - mg}{ml}} = \sqrt{\frac{137{,}2 - 9{,}8}{1 \cdot 1}} = 11{,}3 \text{ rad/s}.$$

Viteza orizontală a pietrei în punctul cel mai de jos al traiectoriei sale este

$$v_0 = l\omega = 1 \cdot 11{,}3 = 11{,}3 \text{ m/s}.$$

Distanța căutată este

$$x = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2(h_0 - l)}{g}} = 11{,}3\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{9{,}8}} = 8{,}81 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.93. Pe un disc care se învîrtește este fixat un fir cu plumb care se stabilește la unghiul α față de verticală (fig. 68). Fiind cunoscută distanța r de la punctul de suspensie pînă la axa de rotație și lungimea firului, l, să se afle viteza unghiulară de rotație.

(G.M.F., nr. 1/1953)

R e z o l v a r e. Tensiunea T a firului este rezultanta greutății plumbului mg și a forței centrifuge F, și avem

$$F = m g \operatorname{tg} \alpha = m R \omega^2.$$

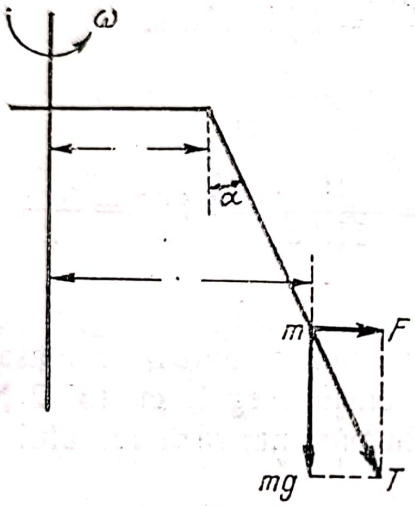


Fig. 68

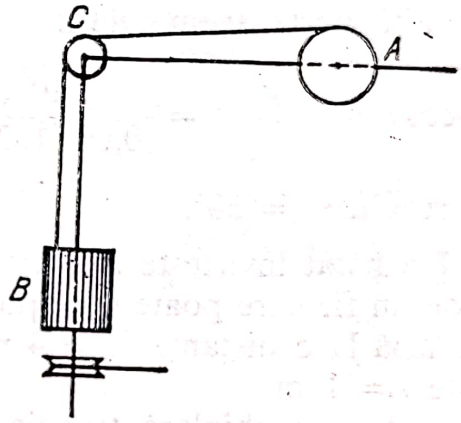


Fig. 69

Dar $R = r + l \sin \alpha$, astfel încît

$$g \cdot \operatorname{tg} \alpha = \omega^2 (r + l \sin \alpha),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r + l \sin \alpha}}.$$

1.94. Două bare sînt fixate una de alta făcînd între ele un unghi drept (fig. 69). Pe bara orizontală alunecă bila A cu masa de 50 g, iar pe bara verticală alunecă masa B de 200 g. Bilele A și B sînt legate între ele cu un fir, care trece peste scripetele C. Întregul dispozitiv se rotește în jurul barei verticale.

Cîte rotații pe minut trebuie să aibă aparatul, astfel încît forța centrifugă care lucrează asupra bilei A, plasată la 5 cm față de bara verticală, să poată ridica masa B?

R e z o l v a r e. Ca masa B să poată fi ridicată, trebuie ca greutatea ei să fie mai mică sau cel mult egală cu tensiunea dezvoltată în fir. Dar, tensiunea

în fir este egală cu forța centrifugă care acționează asupra bilei A, astfel încît se poate scrie

$$50 \cdot 5 \cdot \omega^2 = 200 \cdot 980,$$

$$\omega = \frac{200 \cdot 980}{50 \cdot 5} = \frac{196\,000}{250} = 28 \text{ rad/s} = \frac{\pi n}{30},$$

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 28}{3{,}14} = 268 \text{ rot/min}.$$

1.95. În timpul trecerii unui tren printr-o curbă, cu viteza $v = 54$ km/h, se cîntărește un corp cu un cîntar cu arc suspendat de tavanul vagonului, cîntarul indicînd 98 N (fig. 70).

Greutatea corpului fiind egală cu 96,04 N și neglijînd masa cîntarului, se cere să se calculeze raza de curbură a căii și unghiul pe care îl face direcția cîntarului cu verticala.

Rezolvare. Indicația cîntarului cu arc reprezintă rezultanta F a forței centrifuge F_c și a greutății corpului, P.

Întrucît P și F_c sînt perpendiculare una pe alta, avem

$$F_c = \sqrt{F^2 - P^2}. \qquad (1)$$

Făcînd înlocuirile în (1), se obține

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{R} = \sqrt{F^2 - P^2},$$

$$R = \frac{Pv^2}{g\sqrt{F^2 - P^2}} = \frac{96{,}04 \cdot 225}{9{,}8\sqrt{9\,604 - 9\,223}} = \frac{96{,}04 \cdot 225}{9{,}8 \cdot 19{,}6} = 112{,}5 \text{ m}.$$

Unghiul făcut de direcția cîntarului cu verticala este

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_c}{P} = \frac{19{,}6}{96{,}04} = 0{,}204, \quad \alpha = 11°30'.$$

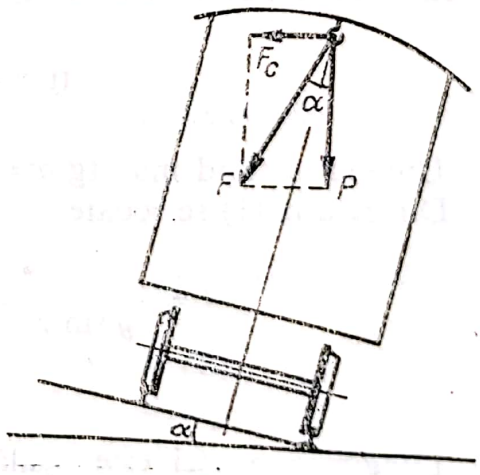


Fig. 70

1.96. Volantul unei mașini are greutatea $G = 384{,}16$ N și execută 300 rot/min. Dintr-o greșeală, centrul de greutate al volantului a fost deplasat cu distanța $r = 1$ mm față de centrul axului său de rotație. Ce solicitări suportă axul?

Rezolvare. Forța centrifugă care ia naștere este

$$F_c = m\,r\,\omega^2 = m\,r\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = 384{,}16 \cdot 0{,}001 \cdot 986 = 379\ \text{N}.$$

Solicitările maxime și minime ale axului sînt

$$F_{max} = G + F_c = 384{,}16 + 379 = 763{,}16\ \text{N},$$

$$F_{min} = G - F_c = 384{,}16 - 379 = \quad 5{,}16\ \text{N}.$$

1.97. Un schior, pornind din repaus, alunecă fără frecare pe o pantă cu înclinarea de 30 m la 1 000 m. Ajungînd într-un loc perfect orizontal, schiorul face o cotitură cu raza de 32,40 m. Spre a nu cădea din cauza forței centrifuge, el se apleacă spre interior cu un unghi $\beta = 45°$. Se cere:

a) Cu ce viteză a intrat schiorul în curbă. b) Timpul cît a mers pe pantă și lungimea pantei.

Se va considera $g = 10\ \text{m/s}^2$ și se vor neglija frecările.

(Adm. Inst. Politehnic Brașov, 1963)

Rezolvare. a) Viteza în curbă se deduce din relația

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{F_c}{mg} = \frac{m\dfrac{v^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{Rg}.$$

$$v = \sqrt{Rg \cdot \operatorname{tg}\beta} = \sqrt{32{,}4 \cdot 10 \cdot 1} = 18\ \text{m/s} = 64{,}8\ \text{km/h}.$$

b) Viteza cu care intră în curbă este egală cu viteza la baza pantei, adică

$$v = at = gt\,\sin\alpha. \qquad (1)$$

Înclinarea pantei este tangenta unghiului făcut de pantă cu orizontala

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{30}{1\,000} = \frac{3}{100}.$$

Unghiul α fiind mic, $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha$.

Din relația (1) se scoate

$$t = \frac{v}{g\sin\alpha} = \frac{18}{10 \cdot \dfrac{3}{100}} = \frac{1800}{30} = 60\ \text{s}.$$

Lungimea pantei este egală cu : $S = \dfrac{v \cdot t}{2} = \dfrac{18 \cdot 60}{2} = 540\ \text{m}.$

Scanned with OKEN Scanner

1.98. Un automobil parcurge o porțiune de șosea în formă de arc de cerc cu raza de 50 m, coeficientul de frecare la alunecare laterală pe șosea fiind egal cu $\mu = 0{,}5$.

Distanța dintre roți $l = 1{,}5$ m, iar înălțimea centrului de greutate deasupra șoselei, $h = 0{,}5$ m. Considerîndu-se $g = 10$ m/s^2 se cere:

a) Care este viteza la care apare alunecarea laterală a automobilului? b) La ce viteză se produce răsturnarea laterală a automobilului? c) Care dintre aceste viteze limită este atinsă mai repede?

(Adm. Instit. Construcții, Buc., 1965)

Rezolvare. a) Pentru ca automobilul să alunece lateral trebuie ca forța centrifugă de inerție să fie mai mare sau cel puțin egală cu forța de frecare, adică

$$m\frac{v^2}{R} \geqslant \mu mg; \qquad v = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0{,}5 \cdot 10 \cdot 50} = 15{,}8 \text{ m/s} = 58 \text{ km/h}.$$

b) Răsturnarea se produce atunci cînd momentul de răsturnare în raport cu punctul de sprijin al roții este egal cu momentul de stabilitate, adică

$$m\frac{v_1^2}{R}h = mg\frac{l}{2},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{lgR}{2h}} = \sqrt{\frac{1{,}5 \cdot 10 \cdot 50}{2 \cdot 0{,}5}} = 27{,}4 \text{ m/s} = 98{,}5 \text{ km/h}.$$

c) Viteza de alunecare este mai repede atinsă decît cea de răsturnare.

8. Lucru mecanic, putere, energie. Teorema energiei cinetice, impulsul, legea conservării impulsului

a. Considerații teoretice

1. Lucrul mecanic este o mărime scalară, egală cu produsul dintre intensitatea forței și proiecția ei pe direcția deplasării

$$L = Fs\cos\alpha.$$

Unitatea de lucru mecanic în SI se numește joule (J), iar în sistemul CGS, erg (erg):

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn} \cdot \text{cm} = 10^{-7} \text{ J}; \quad 1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}.$$

În tehnică se întrebuințează unități mai mari, watt-ora (Wh) și kilowatt-ora (kWh)

$$1 \text{ Wh} = 3{,}6 \cdot 10^3 \text{ J}, \qquad 1 \text{ kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Puterea este lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp

$$P = \frac{L}{t}.$$

Unitatea de putere în SI este joule/s (J/s) sau watt (W) cu multiplul său kilowatt (kW)

$$1\,\text{kW} = 1\,000\,\text{W}.$$

În tehnică, puterea se mai măsoară și în cai putere (CP)

$$1\,\text{CP} = 736\,\text{W} = 0{,}736\,\text{kW}.$$

În mișcarea uniformă și în mișcarea uniform accelerată, în cazul în care forța rămîne constantă ca mărime, puterea este dată de relațiile

$$P = Fv \text{ si } P_m = Fv_m = \frac{1}{2} F (v_i + v_f),$$

unde F este forța, v — viteza constantă, v_m — viteza medie, v_i — viteza inițială, v_f — viteza finală.

3. Energia cinetică este energia unui corp în mișcare

$$W_c = \frac{1}{2} mv^2,$$

unde m este masa, iar v — viteza corpului.

Energia potențială sau de poziție în cîmpul gravitațional, considerat uniform, este dată de relația

$$W_p = Gh + W_0 = mgh + W_0,$$

unde G este greutatea corpului, h — înălțimea la care se află corpul față de un plan de referință, iar W_0 — energia potențială la nivelul planului de referință.

Energia mecanică totală este constantă:

$$W_t = W_c + W_p = \text{const}$$

în cazul sistemelor conservative adică, în particular, atunci cînd nu intervin frecări.

Energiile se măsoară în aceleași unități ca și lucrul mecanic.

4. Variația energiei cinetice a unui corp este egală cu lucrul mecanic al forțelor care acționează asupra corpului în timpul acestei variații, exclusiv forța de inerție, adică

$$\frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = F s,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde m este masa corpului, v_f — viteza finală, v_i — viteza inițială, s — spațiul, F — rezultanta forțelor exterioare și de legătură.

5. Între impulsul de forță sau percuție, $F\Delta t$ și impulsul de masă sau cantitatea de mișcare $m\Delta v$, există relația

$$F\Delta t = m\Delta v$$

Aceasta este teorema impulsului sau cantității de mișcare. Dacă F este constant teorema este valabilă pe orice interval de timp.

6. Dacă asupra unui sistem de puncte materiale nu acționează nici o forță exterioară sau dacă rezultanta forțelor exterioare este nulă, impulsul total al sistemului rămîne constant

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_i = \text{const.}$$

Aceasta este teorema conservării cantității de mișcare.

b. Probleme

1.99. Se aruncă un proiectil de greutate $G = 2{,}45$ N cu o viteză de 200 m/s într-o direcție care face 45° cu orizontala. Să se calculeze:

a) Lucrul mecanic efectuat de proiectil de la plecare pînă în vîrful traiectoriei. b) Puterea corespunzătoare în W și în CP.

Rezolvare. a) Înălțimea maximă de ridicare a proiectilului este

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{40.000 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 9{,}81} = 1\,019 \text{ m.}$$

Timpul de urcare pînă la înălțimea maximă este

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{200 \sin 45°}{9{,}81} = 14{,}37 \text{ s.}$$

Lucrul mecanic este

$$L = Gh_{max} = 2{,}45 \cdot 1\,019 = 2496{,}55 \text{ J.}$$

b) Puterea proiectilului este

$$P = \frac{L}{t} = \frac{2496{,}55}{14{,}37} = 173{,}7 \text{ W} = 0{,}236 \text{ CP.}$$

1.100. Într-o fabrică, un rezervor situat la 10 m înălțime este umplut cu apă cu ajutorul unei pompe acționată de un motor. Lucrul mecanic necesar pentru umplere este de $3332 \cdot 10^4$ J.

Scanned with OKEN Scanner

Înainte de naționalizarea principalelor întreprinderi industriale, munca nefiind mecanizată, pompa era manevrată de 4 oameni ficcare dezvoltînd o putere de 0,19 CP. Știind că lucrul mecanic folosit pentru ridicarea apei este numai jumătate din lucrul cheltuit de lucrători, se întreabă:

a) Care este capacitatea rezervorului? b) Cît timp folosesc lucrătorii pentru a-l umple?

(Concursul de Fizică, etapa I, 1952)

Rezolvare. a) Din expresia lucrului mecanic $L = Gh$ rezultă greutatea apei

$$G = \frac{L}{h} = \frac{3332 \cdot 10^4}{10} = 3332 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Volumul rezervorului

$$V = \frac{G}{\gamma} = \frac{3332 \cdot 10^3}{9800} = 340 \text{ m}^3.$$

b) Puterea cheltuită de cei patru oameni este egală cu $4 \cdot 0{,}19 \cdot 736 = 560$ W, din care numai 280 W sînt utilizați la ridicarea apei în rezervor. Rezultă că

$$t = \frac{L}{P} = \frac{3332 \cdot 10^4}{280} = 119\,000 \text{ s} = 33^h\,3'\,20''.$$

1.101. Un tren de $392 \cdot 10^4$ N merge cu 80 km/h și trece printr-un strat de zăpadă. La ieșire, trenul are numai 30 km/h.

a) Care este energia consumată de tren la trecerea prin stratul de zăpadă, știind că locomotiva a lucrat cu același consum de abur ? b) Știind că stratul are lungimea $S = 1$ km să se afle rezistența R întîmpinată de tren.

(Olimpiada de Fizică, Timișoara, 1955)

Rezolvare. a) Întrucît $v_0 = 22{,}22$ m/s, iar $v = 8{,}35$ m/s energia cinetică consumată de tren este

$$\Delta W_c = \frac{G}{2g}(v_0^2 - v^2) = \frac{392 \cdot 10^4}{2 \cdot 9{,}8}(22{,}22^2 - 8{,}35^2) = 8486 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

b) Din teorema energiei cinetice rezultă

$$R = \frac{\Delta W_c}{S} = \frac{8486 \cdot 10^4}{10^3} = 84860 \text{ N}.$$

1.102. Un automobil cu masa $m = 490$ kg se mișcă uniform cu viteza de 10 m/s. Fiind frînat la un moment dat, se oprește după 10 s. Se cere:

Scanned with OKEN Scanner

a) Energia cinetică a automobilului înainte de frînare. b) Accelerația mișcării în timpul frînării. c) Spațiul parcurs în timpul frînării pînă la oprire. d) Forța de frînare.

(Olimpiada de Fizică, Timișoara, 1955)

Rezolvare

a) $W_c = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 490 \cdot 100 = 24\,500$ J.

b) $v_0 - at = 0; \quad a = \frac{v_0}{t} = \frac{10}{10} = 1 \ \text{m/s}^2$.

c) $s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 = 50$ m.

d) Dacă R este forța de frînare, opusă mișcării, avem,

$$- Rs = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2),$$

de unde, ținînd seamă că $v = 0$, se deduce

$$R = \frac{m v_0^2}{2 s} = \frac{490 \cdot 100}{2 \cdot 50} = 490 \text{ N}.$$

1.103. Cum se poate arunca o bucată de gheață mai departe, aruncînd-o sub un unghi de 45° cu orizontala sau aruncînd-o pe gheața unui lac, coeficientul de frecare între gheață și gheață fiind $\mu = 0{,}02$. Se va neglija rezistența aerului. Masa gheții și viteza de aruncare sînt aceleași în ambele ipoteze.

(R.M.F., nr. 9/1951)

Rezolvare. Spațiul străbătut de bucata de gheață aruncată oblic este

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 90^0}{g} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Aruncată pe lac, bucata de gheață întîmpină rezistența de frecare $F = \mu G = \mu mg = 0{,}02\, mg$ și produce un lucru mecanic rezistent $L = - Fs = - 0{,}02\, mgs$, unde s este spațiul străbătut pe lac.

Aplicînd teorema energiei cinetice se obține

$$- 0{,}02\, mgs = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza finală v fiind egală cu zero, rezultă

$$-0{,}02\,gs = -\frac{v_0^2}{2}, \quad s = \frac{v_0^2}{0{,}04\,g} = \frac{25\,v_0^2}{g} > x.$$

Pe gheață corpul ajunge mai departe decît prin aer.

1.104. Pentru nivelarea unui teren s-a întrebuințat un buldozer de 5 t cu puterea de 35 kW. Lama de săpat are lățimea de 2,25 m și viteza de înaintare de 0,50 m/s. Cu acest buldozer trebuie săpată o suprafață de 4050 m². Coeficientul de frecare cu terenul este egal cu $\mu = 0{,}5$. Știind că randamentul mecanic al motorului, $\eta = 75\ \%$ și considerîndu-se $g = 10$ m/s², se cere: a) Timpul cît durează nivelarea. b) Lucrul mecanic consumat. c) Forța de tracțiune dezvoltată de motor. d) Rezistența opusă de teren la avansarea lamei.

Rezolvare. a) Buldozerul sapă într-o secundă o suprafață

$$s = lv = 2{,}25 \cdot 0{,}5 = 1{,}125\ \text{m}^2.$$

Pentru săparea întregii suprafețe va fi necesar un timp

$$t = \frac{S}{s} = \frac{4050}{1{,}125} = 3600\ \text{s} = 1\ \text{h},$$

b) Lucrul mecanic consumat este

$$L_c = P_m \cdot t = 35\,000 \cdot 3600 = 126 \cdot 10^6\ \text{J}.$$

c) $F_m = \dfrac{P_m}{v} = \dfrac{35\,000}{0{,}5} = 70\,000\ \text{N}.$

d) Puterea utilizată pentru săpare:

$$P_u = \eta \cdot P_m = 0{,}75 \cdot 35 = 26{,}2\ \text{kW} = 26\,200\ \text{W}.$$

Forța de tracțiune necesară pentru săparea terenului este

$$F_t = \frac{P_u}{v} = \frac{26\,200}{0{,}5} = 52\,400\ \text{N}.$$

Mișcarea fiind uniformă, forța de tracțiune trebuie să învingă forța de frecare și rezistența opusă de teren, adică

$$F_t = F_f + F_r$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$F_r = F_t - F_f = 52\,400 - 0{,}5 \cdot 5\,000 \cdot 10 =$$
$$= 52\,400 - 25\,000 = 27\,400 \text{ N}.$$

1.105. Doi muncitori încarcă cu lopeţile, de pe teren în camion, o grămadă de nisip, care are volumul $V = 2{,}4$ m³ şi densitatea $\rho = 1\,500$ kg/m³.

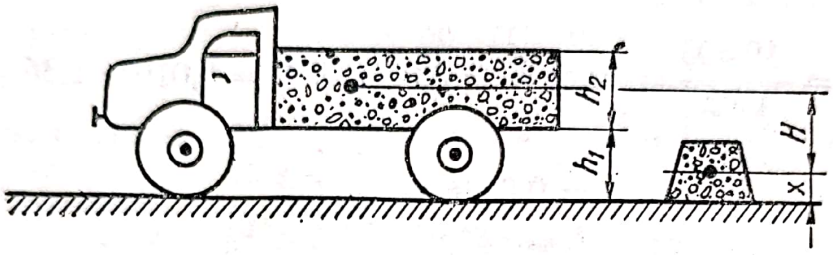


Fig. 71

Grămada de nisip are secţiunea transversală un trapez isoscel cu baza mare $a = 1{,}60$ m, baza mică $b = 0{,}40$ m şi înălţimea $h = 1$ m. Platforma camionului se află la înălţimea $h_1 = 1{,}30$ m deasupra terenului şi are lungimea $L = 3$ m şi lăţimea $l = 2$ m (fig. 71). Într-o lopată se pot ridica 5 kg de nisip a cărei încărcare în camion durează 5 s. Dacă muncitorii lucrează la fel, se cere:

a) Lucrul mecanic cheltuit de un muncitor. b) Timpul de încărcare. c) Puterea depusă de un muncitor în kW şi CP.

R e z o l v a r e. a) Centrul de greutate al grămezii de nisip se află deasupra terenului, la distanţa

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1{,}6 + 0{,}8}{1{,}6 + 0{,}4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2{,}4}{2} = 0{,}40 \text{ m}.$$

Înălţimea nisipului în camion este

$$h_2 = \frac{V}{S} = \frac{2{,}4}{3 \cdot 2} = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}40 \text{ m}.$$

Înălţimea la care se ridică nisipul aruncat (v. fig. 71) în camion este

$$H = h_1 + \frac{h_2}{2} - x = 1{,}3 + 0{,}2 - 0{,}4 = 1{,}1 \text{ m}.$$

Cantitatea de nisip ridicată de un muncitor este

$$m = \frac{V}{2} \rho = \frac{2{,}4}{2} \cdot 1\,500 = 1\,800 \text{ kg}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Lucrul mecanic efectuat de un muncitor

$$L = mgH = 1800 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}1 = 19\,400 \text{ J}.$$

b) Fiecare muncitor va încărca un număr de $1\,800 : 5 = 360$ lopeți. Timpul de încărcare pentru un muncitor va fi

$$t = 360 \cdot 5 = 1\,800 \text{ s} = 0{,}5 \text{ ore}.$$

c) $P = \frac{L}{t} = \frac{19\,400}{1\,800} = 10{,}8 \text{ W} = 0{,}0108 \text{ kW} = 0{,}0108 \cdot 1{,}36 =$

$$= 0{,}0146 = \frac{1}{70} \text{ CP}.$$

1.106. O prismă pătratică dreaptă este formată prin alipirea a două cuburi cu latura $a = 0{,}20$ m; unul din cuburi este din oțel cu densitatea $\rho_1 = 7\,800$ kg/m³, iar celălalt din aluminiu cu densitatea $\rho_2 = 2\,700$ kg/m³ (fig. 72). Se cere:

a) Valoarea forței orizontale F care trebuie aplicată la mijlocul unei laturi a bazei de sus a prismei pentru a o răsturna în jurul muchiei opuse a bazei de jos, presupunînd că sus se află cubul de oțel. b) Lucrul mecanic necesar răsturnării.

(Adm. Fac. Matematică-Mecanică, Cluj, 1965)

Rezolvare. a) Greutățile cuburilor, aplicate în O_1 și O_2 sînt

$$G_1 = a^3 \rho_1 g = 0{,}2^3 \cdot 7800 \cdot 9{,}8 = 0{,}008 \cdot 7800 \cdot 9{,}8 = 611{,}52 \text{ N},$$

$$G_2 = a^3 \rho_2 g = 0{,}2^3 \cdot 2700 \cdot 9{,}8 = 0{,}008 \cdot 2700 \cdot 9{,}8 = 211{,}68 \text{ N}.$$

Rezultanta acestor două forțe aplicată în O, este

$$G = G_1 + G_2 = 611{,}52 + 211{,}68 = 823{,}2 \text{ N}.$$

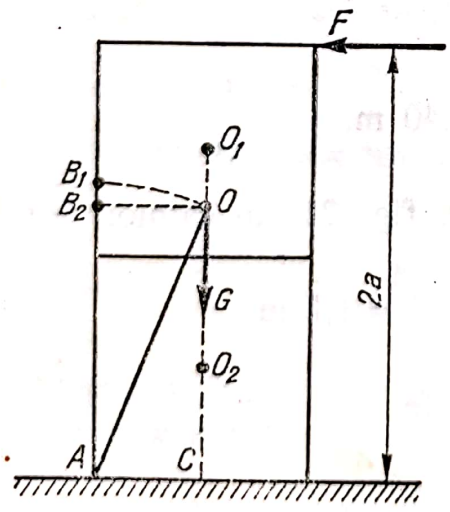


Fig. 72

Pentru răsturnarea prismei, va trebui să avem

$$2aF \geqslant G\frac{a}{2}.$$

Forța minimă de răsturnare

$$F_{min} = \frac{G}{4} = \frac{832{,}2}{4} = 208{,}05 \text{ N}.$$

b) Punctul O se află la distanța $CO = h$, dată de relația

$$Gh = G_1 \frac{3a}{2} + G_2 \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(3G_1 + G_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din această relație rezultă

$$h = \frac{a}{2} \cdot \frac{3G_1 + G_2}{G} = 0{,}1 \cdot \frac{1834{,}56 + 211{,}68}{832{,}2} = 0{,}248 \text{ m}.$$

Pentru ca prisma să se răstoarne trebuie ca centrul de greutate al corpului să se ridice din O în B_1, pe verticala punctului A de răsturnare.

Centrul de greutate se va deplasa pe verticală cu

$$s = B_1B_2 = AB_1 - AB_2 = AO - OC = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - h =$$

$$= \sqrt{0{,}248^2 + 0{,}1^2} - 0{,}248 = 0{,}02 \text{ m}.$$

Lucrul mecanic necesar răsturnării este

$$L_r = Gs = 823{,}2 \cdot 0{,}02 = 16{,}464 \text{ J}.$$

1.107. Pentru curățirea unei fîntîni cu adîncimea totală $H = 10$ m și cu diametrul $D = 2$ m se scoate apa cu un vas de 628 l. Cablul de susținere se înfășoară pe tamburul unei roți dințate, care angrenează cu un șurub melc cu pasul $p = 31{,}4$ mm și cu turația $N = 1\,500$ rot/min. Roata dințată are $z = 40$ dinți, iar tamburul ei are $r = 16$ cm. Șurubul primește mișcarea de la un motor termic cu randamentul $\eta = 37\,\%$ printr-o curea de transmisie și o roată de rază $R' = 25$ cm fixată pe axa șurubului (fig. 73). Lucrul mecanic necesar pentru scoaterea apei este $L = 565\,200$ J. Neținînd seamă de greutatea vasului și a cablului, de frecări și de forța arhimedică și considerînd $g = 10$ m/s² se cere:

a) Adîncimea h a apei din fîntînă și numărul de vase care se scot pentru golirea ei. b) Viteza de ridicare a vasului. c) Forța de acționare la periferia roții R' și puterea motorului. d) Timpul necesar pentru golirea apei și numărul de rotații făcute de tambur în acest scop.

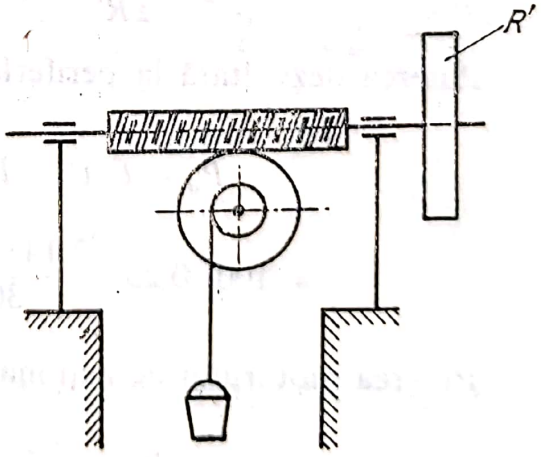


Fig. 73

Rezolvare. a) Lucrul mecanic util pentru scoaterea apei

$$L_u = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \rho g h \left(H - \frac{h}{2}\right),$$

$$565200 = \frac{3{,}14 \cdot 4}{4} \cdot 1000 \cdot 10 \cdot h\left(10 - \frac{h}{2}\right).$$

Din această ecuație se obține

$$157\,h^2 - 3140\,h + 5652 = 0, \quad h = 2 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Volumul apei din fîntînă este

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h = \frac{3{,}14 \cdot 4}{4} \cdot 2 = 6{,}28 \text{ m}^3 .$$

Rezultă că se vor scoate 6 280 : 628 = 10 vase.

b) Roata și tamburul vor executa

$$n = \frac{N}{z} = \frac{1500}{40} = 37{,}5 \text{ rot/min},$$

$$v = r\omega = r \frac{\pi n}{30} = 0{,}16 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 37{,}5}{30} = 0{,}628 \text{ m/s}.$$

c) Egalînd lucrul mecanic efectuat într-o rotație de roata cu șurub, cu lucrul mecanic efectuat de vas, se obține

$$2\pi R' F' = sG, \tag{1}$$

unde s este lungimea arcului de înfășurare după tambur într-o rotație a șurubului. Din relațiile

$$\frac{s}{p} = \frac{r}{R} \quad \text{și} \quad 2\pi R = zp$$

se obține

$$s = \frac{2\pi r}{z} .$$

Ținînd seamă că $G = mg = 628 \cdot 10 = 6\,280$ N, se obține din relația (1)

$$F' = \frac{r}{zR'} G = \frac{0.16}{40 \cdot 0{,}25} \cdot 6280 = 100 \text{ N}.$$

Puterea dezvoltată la periferia roții

$$P_u = F' v' = F' \cdot R' \omega' = F' R' \cdot \frac{\pi N}{30} =$$

$$= 100 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 1500}{30} = 3925 \text{ W} = 3{,}925 \text{ kW}.$$

Puterea motorului de acționare este

$$P_m = \frac{P_u}{\eta} = \frac{3{,}925}{0{,}37} = 10{,}6 \text{ kW}.$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Timpul necesar pentru golirea apei este

$$t = \frac{L_u}{P_u} = \frac{565200}{3925} = 144 \text{ s} = 2'24'' \cdot$$

Spaţiul parcurs de vas pentru ridicarea apei

$$S = vt = 0{,}628 \cdot 144 = 90{,}5 \text{ m}.$$

Numărul de rotaţii executate de tambur

$$n' = \frac{S}{2\pi r} = \frac{90{,}5}{6{,}28 \cdot 0{,}16} = \frac{90{,}5}{1} = 91 \text{ rot}.$$

1.108. Cu aparatul medical din fig. 74 se măsoară energia mecanică a animalelor mici bolnave (cîini, pisici etc.) în vederea stabilirii diagnosticului. Animalul merge pe o bandă rulantă înclinată, menţinîndu-se la aceeaşi înălţime deasupra podelii. Banda se roteşte pe două role, din care una este dublă avînd razele R şi r. Peste rola de rază r se înfăşoară o greutate Q care uniformizează mersul. Dacă se consideră $R = 5$ cm, $r = 1$ cm, lungimea benzii $l = 1$ m, înălţimea între axele rolelor $h = 0{,}60$ m, greutatea $Q = 107{,}8$ N, numărul de rotaţii $n = 20$ şi timpul de funcţionare $t = 10$ s se cere:

a) Greutatea căţelului. b) Lucrul mecanic şi puterea dezvoltate de căţel. c) Viteza căţelului faţă de bandă.

R e z o l v a r e. a) Datorită componentei paralele cu planul înclinat a greutăţii G banda se roteşte pe role în sens invers cu mersul căţelului, iar greutatea Q rămîne pe loc.

Mişcarea benzii fiind uniformă avem $G_p = F_f$; ecuaţia de echilibru a rolei este

$$Qr = F_f R = G_p R = G \frac{h}{l} R,$$

$$G = \frac{Qrl}{Rh} =$$

$$= \frac{107{,}8 \cdot 0{,}01 \cdot 1}{0{,}05 \cdot 0{,}6} = 35{,}9 \text{ N}.$$

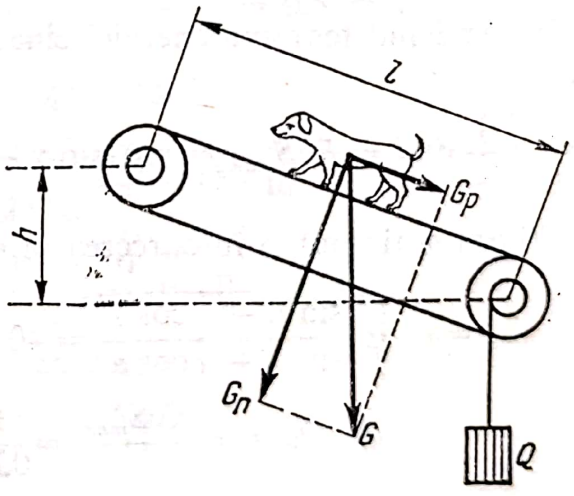


Fig. 74

b) Spaţiul parcurs de bandă pe rolă este $s = 2\pi Rn$, iar lucrul mecanic efectuat de căţel

$$L = G_p s = G \frac{h}{l} \cdot 2\pi Rn = 2\pi rnQ = 6{,}28 \cdot 0{,}01 \cdot 20 \cdot 107{,}8 = 135{,}4 \text{ J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Puterea dezvoltată de cățel, $P = \frac{L}{t} = \frac{135,4}{10} = 13,54$ W.

c) Cățelul rămînînd în permanență la aceeași înălțime, înseamnă că viteza lui este egală și de sens contrar cu viteza bandei

$$v = R\omega = R \cdot \frac{2\pi}{T} = 0,05 \cdot \frac{6,28}{0,50} = 0,628 \text{ m/s}.$$

Lucrurile se petrec ca și cum cățelul ar sta pe loc și s-ar învîrti numai banda. Pe un plan înclinat obișnuit, ar trebui o lungime prea mare.

1.109. Un corp cu masa $m = 50$ g se aruncă cu viteza inițială $v_0 = 40$ m/s pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Coeficientul de frecare dintre corp și plan fiind egal cu $\mu = 0,2$, se cere:

a) Spațiul maxim și timpul de urcare a corpului pe plan. b) Timpul de întoarcere a corpului în poziția inițială. c) Energia cinetică a corpului în momentul revenirii lui în poziția inițială.

Rezolvare. a) Aplicînd teorema energiei cinetice avem

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = F S_{max} = mg (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) S_{max},$$

$$S_{max} = \frac{v_0^2}{2g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = \frac{40^2}{19,6 \cdot 0,673} = \frac{1600}{13,19} = 121 \text{ m},$$

$$t = \frac{2 S_{max}}{v_0} = \frac{242}{40} = 6,05 \text{ s}.$$

b) Aplicînd teorema energiei cinetice la coborîrea pe plan se obține relația

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = F' S_{max} = mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot \frac{v_0^2}{2g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Viteza și timpul la întoarcerea în poziția inițială sînt

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} = 40 \sqrt{\frac{0,327}{0,673}} = 40 \cdot 0,69 = 27,6 \text{ m/s},$$

$$t_1 = \frac{2 S_{max}}{v_1} = \frac{242}{27,6} = 8,76 \text{ s}.$$

c) $E_c = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,050 \cdot 761,76 \approx 19$ J.

1.110. Un autoturism cu masa $m = 800$ kg merge cu viteza constantă de 54 km/h pe o șosea rectilinie și orizontală, dezvoltînd o putere

Scanned with OKEN Scanner

$P_1 = 15$ kW. În drumul său întîlneşte un pod drept şi orizontal pe care trebuie să-l treacă cu viteză redusă.

La capătul podului, şoferul încetineşte mersul şi ajunge la celălalt capăt cu viteza de 36 km/h, iar puterea medie dezvoltată de motor pe pod este $P_2 = 7{,}5$ kW. După aceea, şoferul accelerează mersul pînă la 72 km/h consumînd o putere $P_3 = 27$ kW. Dacă se neglijează rezistenţa aerului şi se consideră $g = 10$ m/s², se cere:

a) Coeficientul de frecare (acelaşi pe şosea şi pod). b) Lungimea podului. c) Spaţiul total străbătut şi timpul depus de la încetinirea mişcării pînă la atingerea vitezei de 72 km/h.

Rezolvare. a) Forţa de tracţiune în mişcarea uniformă este

$$F_1 = \frac{P_1}{v_1} = \frac{15000}{15} = 1000 \text{ N},$$

$$\mu = \frac{F_1}{mg} = \frac{1000}{800 \cdot 10} = \frac{1000}{8000} = 0{,}125.$$

b) Forţa de tracţiune la trecerea pe pod este

$$F_2 = \frac{2P_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 7500}{15 + 10} = \frac{15000}{25} = 600 \text{ N}.$$

În această mişcare, uniform încetinită avem

$$F_2 - \mu mg + ma_1 = 0,$$

$$a_1 = \frac{\mu mg - F_2}{m} = \frac{0{,}125 \cdot 800 \cdot 10 - 600}{800} = 0{,}5 \text{ m/s}^2.$$

Lungimea podului şi timpul de parcurgere sînt

$$S_1 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot a_1} = \frac{225 - 100}{2 \cdot 0{,}5} = 125 \text{ m},$$

$$t_1 = \frac{v_1 - v_2}{a_1} = \frac{15 - 10}{0{,}5} = 10 \text{ s}.$$

c) Forţa de tracţiune în această mişcare este

$$F_3 = \frac{2P_3}{v_2 + v_3} = \frac{2 \cdot 27000}{10 + 20} = \frac{54000}{30} = 1800 \text{ N},$$

iar acceleraţia mişcării se deduce din

$$F_3 - \mu mg = ma_2,$$

$$a_2 = \frac{F_3 - \mu mg}{m} = \frac{1800 - 0{,}125 \cdot 800 \cdot 10}{800} = \frac{800}{800} = 1 \text{ m/s}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Timpul și spațiul în această mișcare sînt

$$t_2 = \frac{v_3 - v_2}{a_2} = \frac{20 - 10}{1} = 10 \text{ s},$$

$$S_2 = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2a_2} = \frac{400 - 100}{2 \cdot 1} = \frac{300}{2} = 150 \text{ m}.$$

Spațiul și timpul total sînt

$$S = S_1 + S_2 = 125 + 150 = 275 \text{ m},$$

$$t = t_1 + t_2 = 10 + 10 = 20 \text{ s}.$$

1.111. O locomotivă de 50 t trece cu viteză constantă peste un pod convex în formă de arc de cerc cu deschiderea de 200 m (fig. 75). Puterea dezvoltată de locomotivă este egală cu 600 kW, iar forța de tracțiune constantă este de 30 000 N. Cînd locomotiva ajunge în punctul cel mai înalt al podului, forțele de apăsare produse la trecerea ei pe cele patru reazeme sînt egale cu cîte 100 000 N. Neglijînd rezistența aerului și considerînd $g = 10$ m/s², se cere:

a) Viteza locomotivei pe pod. b) Raza de curbură a podului. c) Coeficientul de frecare. d) Lungimea podului și lucrul mecanic. e) Viteza unghiulară în mișcarea de rotație a locomotivei pe pod.

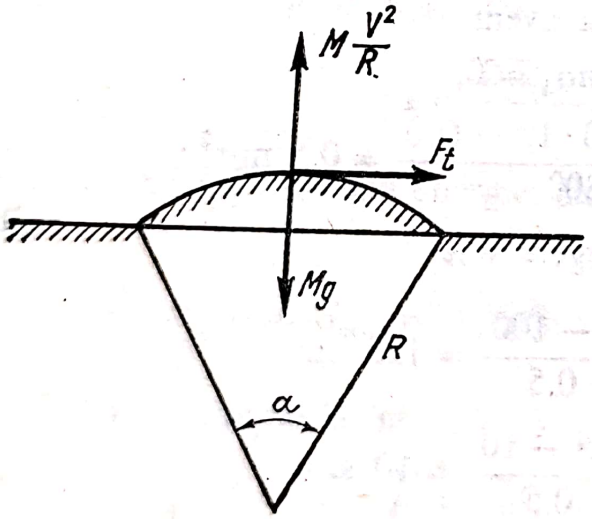


Fig. 75

Rezolvare. a) Din relația $P = F_t v$, se deduce

$$v = \frac{P}{F_t} = \frac{600000}{30000} = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h}.$$

b) Rezultanta forțelor exercitate asupra podului, cînd locomotiva se află în punctul cel mai înalt, este

$$M\left(g - \frac{v^2}{R}\right) = 4F = 4 \cdot 100000 = 400000,$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{Mg - 4F}{M} = \frac{500000 - 400000}{50000} = \frac{100000}{50000} = 2,$$

$$R = \frac{v^2}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Mișcarea fiind uniformă avem

$$F_t = \mu Mg,$$

$$\mu = \frac{F_t}{Mg} = \frac{30000}{500000} = 0{,}06.$$

d) Dacă deschiderea podului este egală cu raza, înseamnă că unghiul la centru este egal cu $\alpha = 60° = \pi/3$ rad.

Lungimea podului este

$$S = R\alpha = 200 \cdot \frac{\pi}{3} = 209 \text{ m}.$$

Lucrul mecanic:

$$L = F_t S = 30000 \cdot 209 = 6270000 \text{ J}.$$

Timpul necesar pentru trecerea podului:

$$t = \frac{L}{P} = \frac{6270000}{600000} = 10{,}45 \text{ s}.$$

e) Viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{20}{200} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ rad/s}.$$

1.112. Un vagon cu masa $m_1 = 10$ t se deplasează pe un traseu orizontal cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s. După un timp $t_1 = 6$ s el ciocnește un al doilea vagon cu masa $m_2 = 30$ t, care stă pe linie și cu care își continuă mișcarea împreună pînă la oprire. Coeficientul de frecare, în tot timpul mișcării, este $\mu = 0{,}1$. Se cere:

a) Spațiul parcurs de primul vagon pînă la ciocnire și viteza lui în momentul ciocnirii. b) Viteza cu care pornesc cele două vagoane după ciocnire c) Spațiul parcurs de cele două vagoane pînă la oprire. Se va considera $g = 10$ m/s².

(Olimpiada de fizică, 1964)

Rezolvare. a) Ținînd seamă că forța care acționează asupra vagonului este constantă și de sens contrar mișcării, teorema impulsului dă

$$-\mu m_1 g t_1 = m_1 (v_1 - v_0).$$

Din această relație rezultă

$$v_1 = v_0 - \mu g t_1 = 10 - 0{,}1 \cdot 10 \cdot 6 = 4 \text{ m/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd teorema energiei cinetice, avem

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_0^2) = - \mu m_1 g S_1,$$

$$S_1 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2\mu g} = \frac{100 - 16}{2} = \frac{84}{2} = 42 \text{ m}.$$

b) Aplicînd legea conservării impulsului obținem

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 ,$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{10}{40} \cdot 4 = 1 \text{ m/s}.$$

c) Aplicînd teorema energiei cinetice obținem

$$- \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_2^2 = - \mu (m_1 + m_2) g S_2 ,$$

$$S_2 = \frac{v_2^2}{2\mu g} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10} = 0{,}5 \text{ m}.$$

1.113. O barcă cu masa M se află nemișcată pe o apă liniștită. În barcă se află o persoană cu masa m, care trece de la un capăt la celălalt al bărcii. Dacă lungimea bărcii este egală cu l și se neglijează rezistența ei la înaintare, se cere să se calculeze deplasarea bărcii. Aplicație: $M = 140$ kg, $m = 60$ kg, $l = 2$ m.

Rezolvare. Dacă notăm cu v viteza persoanei și cu u viteza pe care o capătă barca, timpul necesar persoanei pentru parcurgerea lungimii l este egal cu timpul necesar bărcii pentru a se deplasa cu distanța x, adică

$$\frac{l}{v} = \frac{x}{u} . \qquad (1)$$

Legea conservării impulsului dă

$$mv = (M + m) u. \qquad (2)$$

Din relația (1) și (2) se obține

$$x = \frac{m}{M + m} \cdot l = \frac{60}{140 + 60} \cdot 2 = \frac{120}{200} = 0{,}60 \text{ m}.$$

1.114. Trei bărci de aceeași masă M merg una în urma celeilalte cu aceeași viteză v. Din barca de la mijloc se aruncă simultan în barca din față și în cea

Scanned with OKEN Scanner

din spate, cu viteza u față de barca din mijloc, două greutăți de masă m. Care sînt vitezele bărcilor după aruncarea greutăților m?

Rezolvare. Greutatea m aruncată în barca din față va avea viteza $v + u$ și impulsul $m(v + u)$.

Dacă la impulsul inițial Mv al acestei bărci adăugăm impulsul primit, se obține impulsul final, adică

$$Mv + m(v + u) = (M + m)v_1,$$

$$v_1 = \frac{Mv + m(v + u)}{M + m}.$$

Barca din urmă va primi un impuls $m(v - u)$ și se poate scrie

$$Mv + m(v - u) = (M + m)v_3,$$

$$v_3 = \frac{Mv + m(v - u)}{M + m}.$$

Din barca de la mijloc se scad cele două impulsuri trimise în bărcile din față și din spate, astfel încît

$$Mv - m(v + u) - m(v - u) = (M - 2m)v_2.$$

Din această relație rezultă

$$v_2 = v.$$

1.115. De pe un vagonet cu masa $M = 500$ kg, care merge pe un drum orizontal cu viteza constantă $u = 4$ m/s, se lansează, sub un unghi $\alpha = 30°$ față de orizontală, în sensul mersului, o rachetă cu masa $m_1 = 5$ kg. Gazele din rachetă cîntăresc $m_2 = 0{,}5$ kg și după explozia lor instantanee, racheta se ridică la înălțimea maximă $h_{max} = 19{,}6$ m. Se cere:

a) Viteza inițială de lansare a rachetei. b) Viteza de evacuare a gazelor arse. c) Viteza cu care se deplasează vagonetul după lansarea rachetei.

Rezolvare

$$\text{a) } v_0 = \frac{\sqrt{2gh_{max}}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}80 \cdot 19{,}6}}{0{,}5} = 39{,}2 \text{ m/s}.$$

b) Impulsul gazelor fiind egal cu cel primit de rachetă, se poate scrie

$$m_2 v = m_1 v_0,$$

$$v = \frac{m_1}{m_2} \cdot v_0 = \frac{5}{0{,}5} \cdot 39{,}2 = 392 \text{ m/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Legea conservării impulsului pentru vagonet, dă

$$Mu - m_2 v \cos\alpha = Mu',$$

$$u' = \frac{Mu - m_2 v \cos\alpha}{M} = \frac{500 \cdot 4 - 0{,}5 \cdot 392 \cdot 0{,}867}{500} = 3{,}66 \text{ m/s}.$$

1.116. Un muncitor cîntărind 75 kg, împinge pe o linie dreaptă și orizontală, un vagonet de 225 kg, care se mișcă uniform accelerat plecînd din repaus. După ce a parcurs o treime din drum, el se aruncă pe vagonet cu o viteză de 2 m/s față de acesta și își continuă astfel drumul. Să se afle cu ce forță trebuie să acționeze muncitorul asupra vagonetului pentru ca el să se oprească la capătul liniei, care are o lungime de 300 m, dacă coeficientul de frecare dintre roți și șină este $\mu = 0{,}01$. Se va lua $g = 10$ m/s^2.

(R. F. Ch., nr. 11/1964)

Rezolvare. Pe prima porțiune de drum $AB = S_1 = 100$ m, asupra vagonetului acționează, paralel cu drumul, forța de împingere F și forța de frecare μMg, de sens contrar cu F (M = masa vagonetului).

Dacă se notează cu v_1 viteza cu care sosește vagonetul în punctul B și se aplică teorema energiei cinetice între punctele A și B, se obține

$$\frac{1}{2} M v_1^2 = (F - \mu Mg) S_1.$$

Făcînd înlocuirile, se obține

$$112{,}5\, v_1^2 = (F - 22{,}5)\, 100. \tag{1}$$

Dacă se notează cu m — masa muncitorului și cu v_2 — viteza cu care se aruncă muncitorul în vagonet, viteza de plecare v a vagonetului din punctul B este dată de legea conservării impulsului

$$Mv_1 + mv_2 = (M + m)\, v. \tag{2}$$

Ținînd seamă că

$$v_2 = v_1 + 2 \tag{3}$$

și făcînd înlocuirile în (2), se obține

$$v = v_1 + 0{,}5. \tag{4}$$

Pe porțiunea a doua de drum, $BC = S_2 = 200$ m, asupra vagonetului acționează numai forța de frecare.

Aplicînd teorema energiei cinetice pe această porțiune de drum se obține

$$\frac{1}{2} (M + m)\, (0 - v^2) = -\mu (M + m)\, g\, S_2. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţia (5) rezultă

$$v = \sqrt{2\mu g S_2} = \sqrt{2 \cdot 0{,}01 \cdot 10 \cdot 200} = \sqrt{40} = 6{,}32 \text{ m/s}.$$

Scoţînd valoarea lui v_1 din (4) şi înlocuind în (1) se obţine

$$F = \frac{112{,}5 \cdot 5{,}82^2}{100} + 22{,}5 = \frac{112{,}5 \cdot 33{,}87}{100} + 22{,}5 =$$

$$= 38{,}10 + 22{,}5 = 60{,}6 \text{ N}.$$

1.117. La capetele unui fir trecut peste un scripete fix se găsesc doi cilindri de cîte 880 g fiecare (fig. 76). O bilă cu masa de 200 g este lăsată să cadă într-unul din cilindri de la înălţimea $h = 4{,}9$ m. Se cere:

a) Cu ce viteză se pune în mişcare sistemul şi ce fel de mişcare execută.

b) Care este viteza şi spaţiul parcurs de sistem după 5s? Se neglijează frecările.

(R. F. Ch. nr. 9/1964)

Rezolvare. a) În momentul căderii în cilindru, bila are viteza

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 4{,}9} = 9{,}8 \text{ m/s}.$$

Viteza iniţială a cilindrilor $v_1 = 0$.

Aplicînd sistemului teorema conservării impulsului, obţinem

$$m_2 v_2 = (2m_1 + m_2) v_0.$$

Din această relaţie se scoate viteza v_0 cu care se pune în mişcare sistemul după căderea bilei

$$v_0 = \frac{m_2 v_2}{2m_1 + m_2} = \frac{0{,}200 \cdot 9{,}8}{1{,}760 + 0{,}200} = \frac{1{,}960}{1{,}960} = 1 \text{ m/s}.$$

Sistemul va executa o mişcare uniform accelerată cu viteza iniţială $v_0 = 1$ m/s.

b) Forţa care pune sistemul în mişcare este greutatea bilei, $m_2 g$ şi, conform legii a doua a lui Newton, avem

$$(2m_1 + m_2) a = m_2 g,$$

$$a = \frac{m_2}{2m_1 + m_2} \cdot g = \frac{0{,}200}{1{,}960} \cdot 9{,}8 = 1 \text{ m/s}^2.$$

Viteza sistemului după 5 s este

$$v = v_0 + at = 1 + 1 \cdot 5 = 1 + 5 = 6 \text{ m/s}.$$

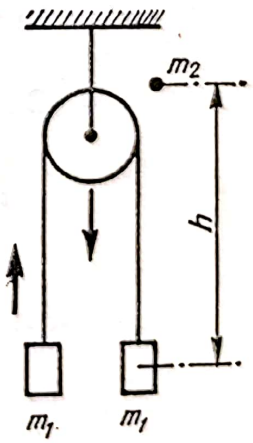


Fig. 76

Spațiul parcurs după 5 s este

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 1 \cdot 5 + \frac{1 \cdot 25}{2} = 5 + 12{,}5 = 17{,}5 \text{ m}.$$

1.118. Un obuz explodează în momentul în care atinge înălțimea maximă a traiectoriei sale, $h_{max} = 19{,}6$ m, despărțindu-se în două părți egale. După

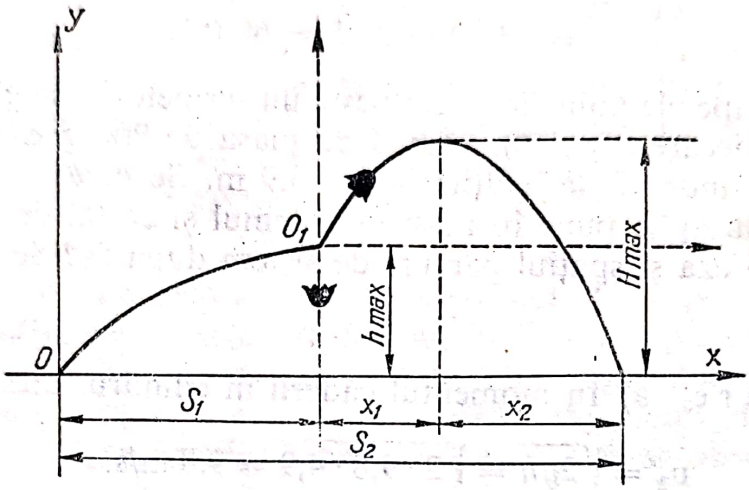


Fig. 77

o secundă de la explozie, una dintre părți cade pe pământ, sub locul unde s-a produs explozia, la distanța $S_1 = 1\,000$ m față de locul de tragere (fig. 77). Dacă se neglijează rezistența aerului, se cere:

a) Componentele, orizontală u_0 și verticală v_0 ale vitezei inițiale de tragere și unghiul α sub care s-a tras. b) Înălțimea maximă la care s-a ridicat jumătatea a doua a obuzului. c) Distanța S_2 la care va cădea această a doua jumătate pe sol, față de locul de tragere.

Rezolvare

a) $v_0 = \sqrt{2gh_{max}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 19{,}6} = 19{,}6$ m/s,

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{19{,}6}{9{,}8} = 2 \text{ s},$$

$x = u_0 t$

$$u_0 = \frac{S_1}{t} = \frac{1\,000}{2} = 500 \text{ m/s},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{u_0} = \frac{19{,}6}{500} = 0{,}0392.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Datorită exploziei, partea care cade sub locul exploziei, are viteza verticală v_1 dată de relația

$$h_{max} = v_1 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2, \; 19{,}6 = v_1 \cdot 1 + 4{,}9 \cdot 1.$$

Din această relație rezultă $v_1 = 14{,}7$ m/s. Viteza verticală în punctul O_1 a întregului obuz fiind egală cu zero, iar viteza verticală a jumătății a doua fiind egală cu v_2, legea conservării impulsului după verticală dă

$$m \cdot 0 = \frac{m}{2} v_1 - \frac{m}{2} v_2.$$

Din această relație rezultă $v_2 = v_1 = 14{,}7$ m/s.

Înălțimea maximă la care se ridică această parte față de pământ este

$$H_{max} = h_{max} + \frac{v_2^2}{2g} = 19{,}6 + \frac{14{,}7^2}{19{,}6} = 30{,}625 \text{ m}.$$

c) În punctul O_1 obuzul are viteza orizontală $u_1 = u_0 = 500$ m/s; jumătatea care cade sub locul exploziei nu are viteză orizontală, iar a doua jumătate de obuz are viteza orizontală u_2 dată de legea conservării impulsului după orizontală

$$m \cdot u_1 = \frac{m}{2} \cdot 0 + \frac{m}{2} \cdot u_2.$$

Din această relație rezultă

$$u_2 = 2 u_1 = 2 \cdot 500 = 1\,000 \text{ m/s}.$$

Din figură se observă ușor că

$$x_1 = u_2 t_2 = u_2 \cdot \frac{v_2}{g} = 1\,000 \cdot \frac{14{,}7}{9{,}8} = 1\,500 \text{ m},$$

$$x_2 = u_2 t_3 = u_2 \sqrt{\frac{2 H_{max}}{g}} = 1\,000 \sqrt{\frac{61{,}25}{9{,}8}} = 1\,000 \sqrt{6{,}25} =$$

$$= 1\,000 \cdot 2{,}5 = 2\,500 \text{ m},$$

$$S_2 = S_1 + x_1 + x_2 = 1\,000 + 1\,500 + 2\,500 = 5\,000 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

9. Atracția universală, gravitația, rachete și sateliți

a. Considerații teoretice

1. *Legea atracției universale.* Două corpuri se atrag cu o forță proporțională cu produsul maselor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele

$$F = k \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

unde constanta $k = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ dyn·cm²/g² $= 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg².

2. Dacă unul din corpuri este Pământul de masă M, iar celălalt un obiect de masă m pe suprafața Pământului, forța de atracție este egală cu greutatea corpului

$$F = k \frac{Mm}{R^2} = mg,$$

unde $R \approx 6\,400$ km este raza Pământului, iar g — accelerația gravitației la suprafața Pământului.

3. Variația lui g cu latitudinea este dată de relația

$$g\lambda = g_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \lambda}{289}\right),$$

unde λ este latitudinea locului în grade, iar $g_0 = 9{,}806$ m/s², este valoarea lui g la latitudinea de 45°. La ecuator, $g_e = 9{,}781$ m/s² iar la poli $g_p = 9{,}83$ m/s².

4. Variația lui g cu altitudinea este dată de relația

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

unde g_0 este accelerația gravitației la suprafața Pământului, iar g_h — accelerația gravitației la înălțimea h.

Pentru înălțimi mici față de R, avem

$$g_h = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

5. *Legea a treia a lui Keppler.* Între duratele de revoluție T_1 și T_2 și cuburile semiaxelor mari ale elipselor pe care se mișcă planetele în jurul Soarelui, există relația

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

Scanned with OKEN Scanner

6. În mișcarea pe orbită, forța centrifugă este egală cu greutatea satelitului la înălțimea respectivă.

7. *Rachetele cu masă variabilă.* Viteza unei rachete la sfîrșitul arderii gazelor, este dată de formula lui Țiolkovski

$$v = c \ln\left(1 + \frac{m_0}{m_k}\right),$$

unde c este viteza de evacuare a gazelor arse, ln — logaritmul natural, m_0 — masa inițială a gazelor (combustibilului) iar m_k — masa constantă a rachetei.

8. Suprasarcina n este raportul dintre greutatea cosmonautului la o înălțime oarecare în timpul ascensiunii și greutatea lui la sol.

Imponderabilitatea este echilibrarea greutății cosmonautului și a obiectelor zburătoare.

b. Probleme

1.119. Cunoscînd „raza" orbitei Pămîntului presupusă circulară $R_1 = 150 \cdot 10^6$ km, raza Soarelui $R_2 = 6 \cdot 10^5$ km și perioada de revoluție $T = 1$ an a Pămîntului în jurul Soarelui, să se calculeze accelerația în căderea liberă a corpurilor pe Soare.

(G.M.F., nr. 2/1955)

Rezolvare. Accelerația centripetă a Pămîntului este egală cu

$$a_n = \frac{v^2}{R_1} = \frac{\left(\frac{2\pi R_1}{T}\right)^2}{R_1} = \frac{4\pi^2 R_1}{T^2}.$$

Pe de altă parte, notînd cu G_0 accelerația în căderea liberă pe suprafața Soarelui, avem

$$a_n = \frac{G_0 R_2^2}{(R_2 + R_1)^2}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se obține

$$G_0 = \frac{4\pi^2 R_1 (R_2 + R_1)^2}{R_2^2 T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 150 \cdot 10^6 (6 \cdot 10^5 + 150 \cdot 10^6)^2}{(6 \cdot 10^5)^2 \cdot (365{,}25 \cdot 86\,400)^2} = 27 g_0,$$

unde g_0 este accelerația gravitației pe Pămînt.

1.120. Știind că Luna efectuează o rotație completă în jurul Pămîntului în 27 zile și 7 ore, se cere să se calculeze raza orbitei Lunii.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Accelerația centripetă a Lunii este

$$g_r = \frac{4\pi^2 r}{T_1^2},$$

r fiind raza orbitei Lunii, iar T_1 perioada de rotație în jurul Pămîntului (T_1 = = 27 zile 7 ore = 2385000 s).

Pe de altă parte

$$g_r = \frac{g_0 R^2}{(R+r)^2},$$

de unde rezultă

$$\frac{g_0 T_1^2 R^2}{4\pi^2 r} = (R+r)^2,$$

unde R este raza și g_0 accelerația gravitației Pămîntului.

Dacă notăm $x = \frac{r}{R}$, se obține

$$x^3 + 2x^2 + x = 2{,}1068 \cdot 10^6,$$

de unde rezultă $x = 59{,}1$ și $r \approx 60\ R$.

1.121. Timpul de revoluție al lui Jupiter este de 12 ori mai mare decît timpul de revoluție al Pămîntului. Cîți kilometri sînt de la Jupiter pînă la Soare, dacă distanța de la Pămînt la Soare este egală cu $150 \cdot 10^6$ km. Se consideră că orbitele planetelor sînt circulare.

Rezolvare. Dacă R_1 și R_2 sînt distanțele de la Pămînt și de la Jupiter pînă la Soare, iar T_1 și T_2 duratele lor de revoluție, avem conform legii a treia a lui Kepler,

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$$

Deoarece $T_2 = 12\ T_1$, se obține

$$\frac{1}{144} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

de unde rezultă

$$R_2 = R_1 \sqrt[3]{144} = 150 \cdot 10^6 \cdot 5{,}25 = 787 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.122. Raza planetei Marte este egală cu 0,53 din raza Pămîntului, iar masa ei reprezintă 0,11 din masa Pămîntului. De cîte ori este mai mică accelerația gravitației de pe planeta Marte decît accelerația gravitației de pe Pămînt?

Rezolvare. Accelerațiile gravitației pe Pămînt și pe Marte sînt

$$(1) \qquad g_0 = k\frac{M}{R^2} \quad \text{si} \quad g' = k\frac{M'}{R'^2} \qquad (2)$$

unde M, M', R, R' sînt masele și razele Pămîntului și planetei Marte.

Împărțind (2) cu (1) și ținînd seamă că $M' = 0{,}11\,M$ și $R' = 0{,}55\,R$, se obține

$$g' = \frac{M'}{M}\left(\frac{R}{R'}\right)^2 g_0 = 0{,}11 \cdot \frac{1}{0{,}55^2} \cdot g_0 = 0{,}39\,g_0 \approx \frac{g_0}{2{,}6}.$$

1.123. Să se calculeze masa și densitatea medie a Pămîntului cunoscînd accelerația gravitației la suprafața sa.

Rezolvare. Din expresia accelerației se deduce

$$M = \frac{g_0 R^2}{k} = \frac{9{,}81 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg},$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{g_0 R^2}{k_\circ} : \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{3\,g_0}{4K\pi R} =$$

$$= \frac{3 \cdot 9{,}81}{12{,}56 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} = 5\,500\ \text{kg/m}^3.$$

1.124. Într-un satelit artificial al Pămîntului se află un corp cu masa de 0,100 kg suspendat de un resort aflat în satelit. Știind că resortul s-ar alungi la acea altitudine de patru ori mai puțin decît atunci cînd se află pe Pămînt, se cere:

a) Valoarea forței centrifuge care acționează asupra corpului. b) Înălțimea satelitului deasupra Pămîntului. c) Viteza satelitului pe orbită. d) Numărul de rotații efectuat de satelit în 24 ore.

(R.F.Ch., nr. 9/1964)

Rezolvare. a) Dacă m este masa corpului, g_0 – accelerația gravitației pe Pămînt, k – coeficientul de elasticitate al resortului, l_0 – alungirea resortului pe Pămînt, g – accelerația gravitației la înălțimea la care se află satelitul și l – alungirea resortului la această înălțime, se pot scrie relațiile

$$mg_0 = kl_0, \qquad mg = kl.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste relaţii rezultă

$$g = \frac{l}{l_0} \cdot g_0 = \frac{1}{4} g_0 = 2{,}5 \text{ m/s}^2 \cdot$$

La înălţimea respectivă, forţa centrifugă şi greutatea îşi fac echilibru, deci

$$F_c = mg = 0{,}100 \cdot 2{,}5 = 0{,}25 \text{ N}.$$

b) Din relaţia

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \text{ rezultă } \frac{R}{R+h} = \frac{1}{2},$$

$$h = 2R - R = R = 6400 \text{ km}.$$

c) Din condiţia menţinerii pe orbită

$$F_c = \frac{mv^2}{R+h} = mg,$$

rezultă

$$v = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2 \cdot 64 \cdot 10^5 \cdot 2{,}5} \approx 5600 \text{ m/s} = 20160 \text{ km/h}.$$

d) Din relaţiile

$$v = (R+h)\,\omega \text{ şi } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

rezultă

$$T = \frac{4\pi R}{v} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 64 \cdot 10^5}{56 \cdot 10^2} = 14324 \text{ s}.$$

Numărul de rotaţii efectuat în 24 ore este

$$N = \frac{24 \cdot 3600}{14324} \approx 6 \text{ rot}.$$

1.125. O rampă de lansare, oblică, are lungimea de 50 m şi înălţimea de 30 m. O rachetă cu masa de 100 kg pornind din repaus părăseşte rampa cu viteza de 144 km/h. Coeficientul de frecare fiind egal cu $\mu = 0{,}05$, se cere:

a) Puterea medie a motorului rachetei în cursul mişcării pe rampă. b) Racheta este accelerată în continuare devenind un satelit artificial al Pămîntului cu traiectoria circulară. De la părăsirea rampei pînă la plasarea pe orbită

Scanned with OKEN Scanner

se efectuează un lucru mecanic de $2\,478 \cdot 10^6$ J. Se cere viteza rachetei satelit pe traiectoria circulară. c) La ce înălțime de sol se rotește satelitul? Se va lua raza Pământului 6 370 km, iar $g = 10$ m/s^2.

(R.F.Ch., nr. 7/1964)

Rezolvare. a) Racheta părăsește rampa cu viteza $v_0 = 40$ m/s, iar accelerația mișcării pe rampă este

$$a = \frac{v_0^2}{2l} = \frac{40^2}{2 \cdot 50} = \frac{1600}{100} = 16 \text{ m/s}^2.$$

Forța de tracțiune a motorului rachetei este

$$F_t = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + ma = 100 \cdot 10 \cdot (0{,}6 + 0{,}05 \cdot 0{,}8) +$$

$$+ 100 \cdot 16 = 1000 \cdot 0{,}64 + 1600 = 2240 \text{ N}.$$

Puterea medie dezvoltată de motor pe rampă este

$$P_m = \frac{1}{2} F_t v_0 = \frac{1}{2} \cdot 2240 \cdot 40 = 44800 \text{ W} = 44{,}8 \text{ kW}.$$

b) Viteza rachetei pe traiectoria circulară se obține din teorema energiei cinetice

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = L = 2478 \cdot 10^6.$$

Din această ecuație rezultă

$$v = \sqrt{\frac{2L}{m} + v_0^2} = \sqrt{\frac{4956}{10^2} \cdot 10^6 + 40^2} = 7040 \text{ m/s} = 7{,}04 \text{ km/s}.$$

c) Dacă H este înălțimea la care se ridică racheta și g' accelerația gravitației la această înălțime, se pot scrie relațiile

$$\frac{g'}{g_0} = \frac{R^2}{(R+H)^2} \text{ și } mg' = m\frac{v^2}{R+H}.$$

Din aceste două ecuații rezultă

$$H = \left(\frac{R}{v}\right)^2 \cdot g_0 - R = \left(\frac{6370 \cdot 10^3}{7040}\right)^2 \cdot 10 - 6370 \cdot 10^3 =$$

$$= 819 \cdot 10^4 - 637 \cdot 10^4 = 182 \cdot 10^4 \text{ m} = 1820 \text{ km}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.126. O rachetă cu trei trepte în care se află un cosmonaut pornește în spațiu pe o traiectorie verticală și după 40 s atinge viteza $v_1 = 2{,}4$ km/s, cînd prima treaptă se desprinde și cade (fig. 78). Restul rachetei își continuă zborul și, după alte 70 s, atinge viteza $v_2 = 5{,}2$ km/s cînd se desprinde și treapta a doua. În acest moment, axa rachetei face cu verticala ascendentă un unghi de 60°. În momentul în care se plasează pe orbită, nava și cosmonautul au viteza de 7 km/s. Se cere:

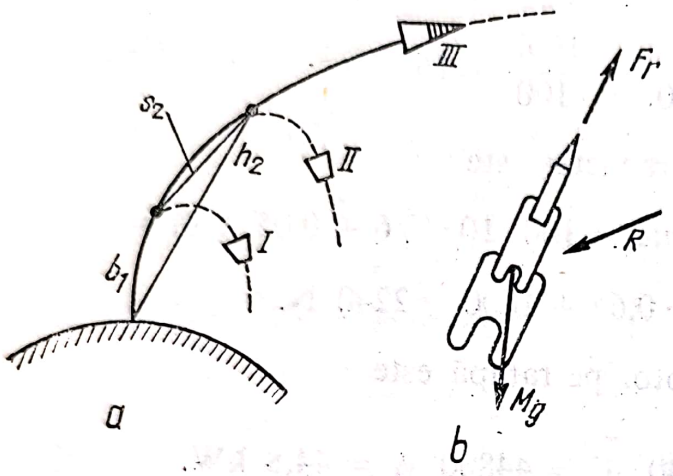


Fig. 78

a) Valoarea suprasarcinii n suportată de cosmonaut în perioada de lansare pe verticală, pînă la desprinderea primei trepte.
b) Valoarea suprasarcinii n la desprinderea treptei a doua (perioada de angajare pe orbită).
c) Înălțimea la care se află nava cosmică cînd intervine imponderabilitatea (nava este plasată pe orbită). Se va considera $R = 6\,400$ km și $g_0 = 9{,}8$ m/s².

Rezolvare. a) Pînă la plasarea pe orbită, asupra rachetei acționează forța de propulsare F_r, rezistența aerului R și greutatea rachetei Mg, care îi imprimă acesteia o accelerație dată de ecuația

$$\vec{Ma} = \vec{Mg} + \vec{F_r} + \vec{R}.$$

Dacă m este masa cosmonautului, iar N – reacțiunea peretelui navei asupra cosmonautului, ecuația de echilibru dinamic este

$$\vec{mg} + \vec{N} - \vec{ma} = 0, \qquad N = m(\bar{a} - \bar{g}).$$

Dacă G este greutatea cosmonautului la înălțimea considerată, conform principiului acțiunii și reacțiunii, $\bar{G} = -\bar{N}$.

Dacă G_0 este greutatea cosmonautului pe sol, valoarea absolută a suprasarcinii este

$$n = \frac{G}{G_0} = \frac{N}{G_0} = \frac{m(\bar{a} - \bar{g})}{mg_0} = \frac{\bar{a} - \bar{g}}{g_0}.$$

Accelerația mișcării în perioada de lansare este

$$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1} = \frac{2400 - 0}{40} = 60 \text{ m/s}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Spațiul parcurs de prima treaptă în această perioadă este

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2\,a_1} = \frac{2400^2}{2 \cdot 60} = \frac{5760000}{120} = 48 \text{ km}.$$

Accelerația gravitației la această înălțime este

$$g_1 = \left(\frac{R}{R + h_1}\right)^2 \cdot g_0 = \left(\frac{6400}{6448}\right)^2 \cdot 9{,}8 = 0{,}99^2 \cdot 9{,}8 = 9{,}6 \text{ m/s}^2 \cdot$$

În această poziție a_1 și g_1 fac între ele 180° și avem

$$n_1 = \frac{\vec{a}_1 - \vec{g}_1}{g_0} = \frac{a_1 + g_1}{g_0} = \frac{60 + 9{,}6}{9{,}8} = \frac{69{,}6}{9{,}8} = 7{,}1.$$

b) Dacă se presupune, pentru simplificare, că traiectoria descrisă pînă la desprinderea treptei a doua este tot o linie dreaptă, care face cu prima traiectorie un unghi de 120°, vom avea

$$a_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2} = \frac{5200 - 2400}{70} = 40 \text{ m/s}^2 \cdot$$

Spațiul străbătut de rachetă

$$s_2 = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 2400 \cdot 70 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 70^2 = 266 \text{ km}.$$

Înălțimea rachetei deasupra Pămîntului la desprinderea treptei a doua este

$$h_2 = h_1 + S_2 \cos 60° = 48 + 266 \cdot \frac{1}{2} = 181 \text{ km}.$$

Accelerația gravitației la această înălțime este

$$g_2 = \left(\frac{R}{R + h_2}\right)^2 \cdot g_0 = \left(\frac{6400}{6581}\right)^2 \cdot 9{,}8 = 0{,}972^2 \cdot 9{,}8 = 9{,}225 \text{ m/s}^2,$$

$$\bar{a}_2 - \bar{g}_2 = \sqrt{a_2^2 + g_2^2 + 2a_2 g_2 \cos 60°} = \sqrt{1600 + 85 + 370} = \sqrt{2055} \approx$$

$$\approx 45 \text{ m/s}^2,$$

$$n_2 = \frac{\bar{a}_2 - \bar{g}_2}{g_0} = \frac{45}{9{,}8} \approx 4{,}6.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Fenomenul de imponderabilitate apare cînd nava se plasează pe orbită. Atunci acțiunea motorului încetează ($F_r = 0$), iar rezistența aerului $R = 0$ (densitatea aerului devine aproape nulă). În acest caz se poate scrie

$$m \frac{v^2}{R+h} = mg' = m \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} g_0,$$

$$h = \left(\frac{R}{v}\right)^2 g_0 - R = \left(\frac{6400}{7}\right)^2 \cdot 9{,}8 - 6400 \cdot 10^3 = 1790 \text{ km}.$$

1.127. O rachetă-satelit (în care se află un cosmonaut) avînd masa proprie $m_k = 1{,}3$ t este lansată în cosmos, plasîndu-se pe orbită cu viteza $v = 7{,}4$ km/s după arderea completă a combustibilului. Cunoscînd viteza de evacuare a gazelor din rachetă, $c = 3\,800$ m/s, raza Pămîntului $R = 6\,370$ km și accelerația gravitației pe sol, $g_0 = 9{,}8$ m/s, se cere:

a) Înălțimea la care s-a ridicat racheta-satelit. b) Cantitatea de combustibil pe care a avut-o racheta la părăsirea solului. c) Suprasarcina suportată de cosmonaut la aterizarea verticală în apropiere de sol și timpul cît durează fenomenul de suprasarcină la aterizare.

Rezolvare. a) Din relațiile

$$m \frac{v^2}{R+h} = mg' \text{ și } \frac{g'}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

rezultă

$$h = \left(\frac{R}{v}\right)^2 g_0 - R = \left(\frac{6\,370}{7{,}4}\right)^2 \cdot 9{,}8 - 6\,370 \cdot 10^3 = (860)^2 \cdot 9{,}8 -$$

$$-6\,370 \cdot 10^3 = 7\,248 \cdot 10^3 - 6\,370 \cdot 10^3 = 878 \cdot 10^3 \text{ m} = 878 \text{ km}.$$

b) Din formula lui Țiolkovski

$$v = c \ln\left(1 + \frac{m_0}{m_k}\right) = 2{,}3\, c \lg\left(1 + \frac{m_0}{m_k}\right)$$

rezultă

$$\lg\left(1 + \frac{m_0}{m_k}\right) = \frac{v}{2{,}3\,c} = \frac{7400}{2{,}3 \cdot 3800} = \frac{74}{87{,}4} = 0{,}84668.$$

Din această relație rezultă

$$1 + \frac{m_0}{m_k} = 7{,}027, \quad \frac{m_0}{m_k} = 6{,}027,$$

$$m_0 = 6{,}027\, m_k = 6{,}027 \cdot 1{,}3 = 7{,}835 \text{ t}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că la plecare, racheta cîntărește împreună cu combustibilul 9,135 t.

c) Accelerația încetinitoare la aterizare este

$$a = \frac{v^2}{2h} = \frac{7{,}4^2}{1756} = \frac{54{,}76}{1756} = 0{,}031 \text{ km/s}^2 = 31 \text{ m/s}^2.$$

În apropierea solului ($g = g_0$) cosmonautul suportă o suprasarcină

$$n = \frac{\bar{a} - \bar{g}_0}{g_0} = \frac{a - g_0}{g_0} = \frac{31 - 9{,}8}{9{,}8} = 2{,}16.$$

Suprasarcina descrește continuu cu cît se apropie de sol și durează tot timpul aterizării, adică

$$t = \frac{v}{a} = \frac{7400}{31} = 239'' = 3'59''.$$

1.128. Un satelit artificial lansat de pe Pămînt se ridică la o înălțime h, la care energia lui potențială este de două ori mai mare decît energia lui cinetică. Cunoscînd raza Pămîntului $R = 6\,370$ km și accelerația gravitației la suprafața Pămîntului, $g_0 = 9{,}81$ m/s² se cere:

a) Înălțimea de ridicare a satelitului. b) Viteza de rotație a satelitului. c) De cîte ori satelitul ocolește Pămîntul în 24 h?

(R.F.Ch., nr. 5/1967)

Rezolvare. a) Să notăm cu W_1 și W_2 energiile potențiale ale satelitului la înălțimea h și la suprafața Pămîntului, față de centrul acestuia. Socotită de la suprafața Pămîntului, de unde are loc lansarea, energia satelitului la înălțimea h, este

$$W_p = W_2 - W_1 = mg_0R - mg(R + h) = mg_0 \cdot \frac{Rh}{R + h}.$$

Energia cinetică a satelitului la înălțimea h, este

$$W_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg(R + h) = \frac{1}{2}mg_0 \cdot \frac{R^2}{R + h}.$$

Punînd condiția $W_p = 2W_c$ se obține $h = R$.

b) $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg_0\frac{R^2}{2R}$, $v = \sqrt{\frac{Rg_0}{2}} = 5590$ m/s.

c) $n = \frac{t}{T} = \frac{v}{4\pi R} \cdot t = \frac{5590 \cdot 8{,}64 \cdot 10^4}{12{,}56 \cdot 637 \cdot 10^4} = 6.$

Scanned with OKEN Scanner

D. Noţiuni de rezistenţa materialelor

10. Deformaţii elastice, solicitări simple

a. Consideraţii teoretice

1. Alungirea absolută a unui corp elastic supus acţiunii unei forţe exterioare axiale F, perpendiculară pe secţiunea S, este dată de legea lui Hooke

$$\Delta l = \frac{F l}{E S},$$

unde l este lungimea iniţială a corpului, iar E – modulul de elasticitate sau modulul lui Young, care depinde de natura materialului şi se măsoară în SI, în N/m^2.

Dacă notăm $k = ES/l$, legea lui Hooke se mai poate scrie sub forma

$$F = k \Delta l = k x.$$

Alungirea pe unitatea de lungime sau alungirea relativă este

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

2. Energia mecanică în deformaţia corpurilor elastice este

$$W = \frac{F}{2} x = \frac{k x^2}{2}$$

unde x este deformaţia suferită de corp sub acţiunea forţei F.

3. Rezistenţa sau efortul unitar, care ia naştere într-un corp solicitat la întindere sau compresiune este

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

unde F este forţa axială, iar S – aria secţiunii normale pe direcţia forţei F.

Rezistenţa unui corp solicitat la forfecare este

$$\tau = \frac{F}{S},$$

unde F este forţa care acţionează în planul secţiunii S.

Scanned with OKEN Scanner

Rezistențele σ și τ se măsoară în SI, în N/m^2 și ele trebuie să fie mai mici sau egale cu rezistențele admisibile, care se dau în tabele.

4. Coeficientul de siguranță este dat în standardele de stat și reprezintă raportul dintre rezistența la rupere și rezistența admisibilă a unui material.

b. Probleme

1.129. Două cabluri metalice de oțel cu secțiunile egale, $S_1 = S_2 = S = 1\ cm^2$ sînt fixate de cîte un zid, iar capetele libere ale lor trebuie prinse împreună în prelungire. Distanța dintre ziduri $l = 12$ m, iar lungimile cablurilor sînt $l_1 = 6{,}930$ m și $l_2 = 5{,}065$ m. Suma lungimilor cablurilor fiind mai mică decît distanța dintre ziduri, cablurile trebuie forțate pentru a se putea prinde. Considerînd efortul unitar admisibil la întindere $\sigma_a = 117{,}6 \cdot 10^6\ N/m^2$, iar modulul lui Young, $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\ N/m^2$, se cer:

a) Tensiunile din cabluri. b) Dacă este posibilă împreunarea cablurilor, fără a se rupe.

Rezolvare. a) După împreunarea capetelor cablurilor, efortul de întindere în ele este același

$$T = T_1 = T_2.$$

Suma alungirilor celor două cabluri trebuie să fie egală cu distanța dintre capetele care se unesc

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = l - (l_1 + l_2) = 12 - 11{,}995 = 0{,}005\ \text{m}.$$

Pe de altă parte avem

$$\Delta l_1 = \frac{T_1 l_1}{ES_1} = \frac{T l_1}{ES} \text{ și } \Delta l_2 = \frac{T_2 l_2}{ES_2} = \frac{T l_2}{ES}.$$

Rezultă că

$$\Delta l = \frac{T}{ES}(l_1 + l_2),$$

$$T = \frac{ES \cdot \Delta l}{l_1 + l_2} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}005}{11{,}995} = 8\,750\ \text{N}.$$

Eforturile unitare în cabluri sînt

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{T}{S} = \frac{8750}{10^{-4}} = 87{,}5 \cdot 10^6\ N/m^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Întrucît $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_a$, cablurile se pot întinde pînă la împreunare fără să se rupă.

1.130. Un ascensor încărcat cîntărește 980 kg, iar cablul său de acționare din oțel, are lungimea de 25 m și cîntărește 0,800 kg/m.

Pornirea și oprirea ascensorului se fac uniform accelerat, cu accelerația de 1,96 m/s². Efortul unitar admisibil în cablu este de $117{,}60 \cdot 10^6$ N/m². Modulul lui Young pentru oțel este egal cu $E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ N/m², iar coeficientul de siguranță $c = 3$. Se cere:

a) Forța de tracțiune suportată de cablu la pornire. b) Secțiunea cablului pentru a nu se depăși efortul unitar. c) Alungirea cablului datorită forței de tracțiune la pornire. d) La ce accelerație se rupe cablul?

Rezolvare. a) Ascensorul și cablul cîntăresc împreună, $m = 980 + 25 \cdot 0{,}800 = 1\,000$ kg.

Forța de tracțiune la pornire este

$$F = m(g + a) = 1\,000 \cdot 11{,}76 = 11\,760 \text{ N}.$$

b) $$S = \frac{F}{\sigma_a} = \frac{11\,760}{11\,760 \cdot 10^4} = 10^{-4} \text{m}^2 = 1 \text{ cm}^2,$$

c) $$\Delta l = \frac{Fl}{SE} = \frac{11760 \cdot 25}{10^{-4} \cdot 19{,}6 \cdot 10^{10}} = 0{,}015 \text{ m} = 1{,}5 \text{ cm}.$$

d) Efortul unitar la rupere

$$\sigma_r = c\,\sigma_a = 3 \cdot 117{,}60 \cdot 10^6 = 352{,}80 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Din relația

$$\sigma_r = \frac{F_r}{S}$$

rezultă

$$F_r = S\,\sigma_r = 10^{-4} \cdot 352{,}8 \cdot 10^6 = 35\,280 \text{ N}.$$

Pe de altă parte avem

$$F_r = m(g + a_r).$$

Din această relație rezultă

$$a_r = \frac{F_r - mg}{m} = \frac{35\,280 - 9\,800}{1\,000} = \frac{25\,480}{1\,000} = 25{,}48 \text{ m/s}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.131. Un fir de cauciuc cu secțiunea de 0,5 cm² și cu lungimea de 18 cm, se înfășoară peste trei cuie A, B, C așezate în formă de triunghi echilateral cu latura de 6 cm (fig. 79). Acționîndu-se cu o forță F în mijlocul O al laturii BC în sens opus vîrfului A, se cere:

a) Mărimea forței F pentru a obține un romb $ABDC$. b) Mărimea forței F pentru a obține un unghi drept BDC. c) Energia potențială acumulată de fir în cazurile (a) și (b). Se dă modulul de elasticitate al firului, $E = 98 \cdot 10^4$ N/m².

(R.F.Ch., nr. 5/1965)

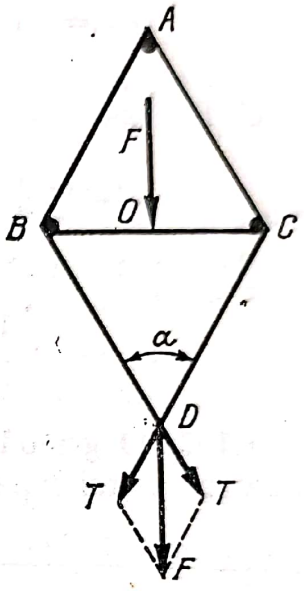


Fig. 79

Rezolvare. a) După transformarea în romb, jumătatea de fir ABO, cu lungimea $l = 9$ cm, este supusă tensiunii T, sub acțiunea căreia se alungește cu

$$\Delta l = ABD - ABO = 12 - 9 = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Din expresia alungirii absolute

$$\Delta l = \frac{T_1 l}{ES},$$

se obține

$$T_1 = \frac{ES\,\Delta l}{l} =$$

$$= \frac{98 \cdot 10^4 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{-2}} = \frac{49}{3} = 16{,}33 \text{ N}.$$

$$F_1 = 2T_1 \cos\frac{\alpha_1}{2} = 2T_1 \cos 30° = 2 \cdot 16{,}33 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 16{,}33 \cdot 1{,}73 = 28{,}25 \text{ N}.$$

b) În acest caz avem

$$2\,BD^2 = BC^2,$$

de unde

$$BD = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 4{,}23 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Alungirea jumătății de fir este

$$\Delta l = ABD - ABO = 10{,}23 - 9 = 1{,}23 \text{ cm} = 1{,}23 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$T_2 = \frac{ES\,\Delta l}{l} = \frac{98 \cdot 10^4 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}\, 1{,}23 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{-2}} = 6{,}7 \text{ N},$$

$$F_2 = 2T_2 \cos\frac{\alpha_2}{2} = 2T_2 \cos 45° = 2 \cdot 6{,}7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9{,}45 \text{ N}.$$

c) Energia acumulată de fir în cazul (a) este

$$L_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} T_1 \Delta l_1 = T_1 \Delta l_1 = 16{,}33 \cdot 0{,}03 = 0{,}49 \text{ J}.$$

Pentru cazul (b) avem

$$L_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} T_2 \Delta l_2 = T_2 \Delta l_2 = 6{,}7 \cdot 0{,}0123 = 0{,}0824 \text{ J}.$$

1.132. O grindă rigidă cu greutatea $G = 39{,}2 \cdot 10^3$ N este suspendată cu ajutorul a trei bare de lungimi egale, așezate simetric în raport cu centrul grinzii (fig. 80). Bara centrală este de oțel, iar barele extreme de cupru. Cunoscînd modulul de elasticitate al oțelului $E_0 = 19{,}6 \cdot 10^{10}$ N/m² și al cuprului $E_c = 9{,}8 \cdot 10^{10}$ N/m², se cer:

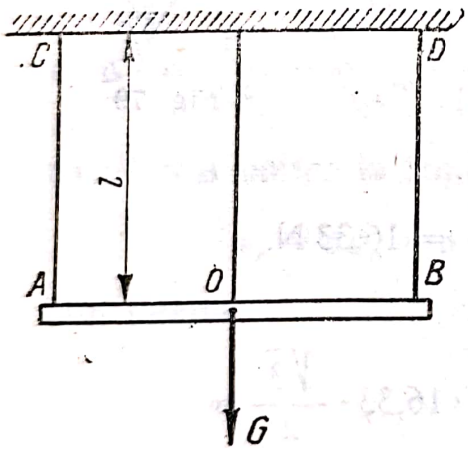


Fig. 80

a) Eforturile P_1 și P_2 din barele de oțel și de cupru. b) Deplasarea grinzii față de poziția inițială. Secțiunile barelor sînt egale, $S_1 = S_2 = S_3 = S = 2 \text{ cm}^2$. Lungimea barelor $l = 5$ m.

Rezolvare. a) Suma eforturilor din bare este egală cu greutatea grinzii

$$P_1 + 2P_2 = G. \tag{1}$$

Din cauza simetriei, alungirile din bare sînt egale

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{P_1 l}{E_0 S} = \frac{P_2 l}{E_c S}. \tag{2}$$

Scoțînd valoarea lui P_2 din (2) și înlocuind-o în (1) se obține

$$P_1 + 2P_1 \cdot \frac{E_c}{E_0} = G. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (3) rezultă

$$P_1 = \frac{E_0}{E_0 + 2E_c} \cdot G = \frac{19{,}6 \cdot 10^{10}}{19{,}6 \cdot 10^{10} + 19{,}6 \cdot 10^{10}} \cdot 39{,}2 \cdot 10^3 = 19{,}6 \cdot 10^3 \text{ N},$$

$$P_2 = \frac{G - P_1}{2} = \frac{39{,}2 \cdot 10^3 - 19{,}6 \cdot 10^3}{2} = 9{,}8 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

b) $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{\Delta_1 l}{E_0 S} = \frac{19{,}6 \cdot 10^3 \cdot 5}{19{,}6 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 0{,}0025 \text{ m} = 0{,}25 \text{ cm}.$

1.133. O placă de oțel cu grosimea $a = 2$ cm este străpunsă de un poanson cu diametrul $d = 3$ cm acționat prin cădere liberă de o presă cu masa de 0,502 t (fig. 81). Rezistența de forfecare la rupere a oțelului fiind egală cu $\tau_r = 392 \cdot 10^6$ N/m², se cere:

a) Viteza poansonului în momentul contactului cu placa. b) Înălțimea de la care cade poansonul.

Rezolvare. a) Se scrie că energia cinetică a presei în momentul căderii se transformă în lucru mecanic necesar perforării tablei, adică

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{F}{2} a. \qquad (1)$$

Tăierea are loc după suprafața laterală a unui cilindru de diametru d și înălțime a, astfel încît forța de tăiere este

$$F = S\tau_r = \pi a d \tau_r. \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$v = \sqrt{\frac{\pi a^2 d\tau_r}{m}} = \sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 392 \cdot 10^6}{502}} = 5{,}42 \text{ m/s}.$$

Pentru lucrul mecanic s-a considerat jumătate din valoarea forței, întrucît aceasta variază de la valoarea maximă la zero în timpul deformației.

$$\text{b) } h = \frac{v^2}{2g} = \frac{5{,}42^2}{2 \cdot 9{,}8} = \frac{29{,}4}{19{,}6} = 1{,}5 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.134. Pe talerul unei frîne-dinamometru s-au pus greutăți cu masa totală $m = 50$ kg și s-au strîns în același timp cele două buloane, pînă în momentul în care brațul talerului s-a așezat în poziția orizontală, echilibrîndu-se astfel în timpul rotației axului forțele de frecare dintre saboți și axul mașinii pe care a fost fixată frîna (fig. 82). Se cunosc:

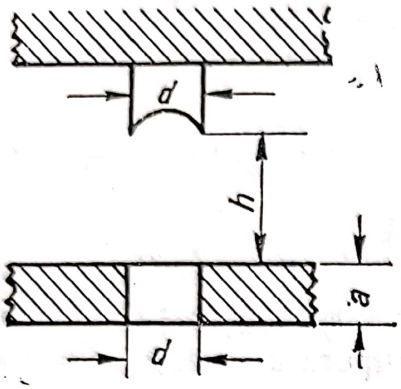


Fig. 81

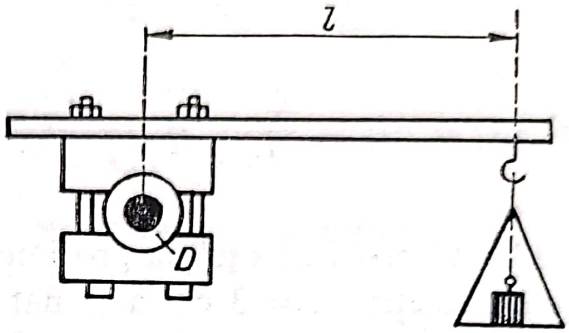


Fig. 82

Diametrul arborelui mașinii $D = 0{,}20$ m, turația mașinii $n = 60$ rot/min, lungimea brațului de pîrghie al sabotului $l = 1{,}5$ m, coeficientul de frecare dintre saboți și ax $\mu = 0{,}3$, diametrul buloanelor $d = 20$ mm, pasul filetului $p = 2{,}5$ mm,diametrul exterior al piuliței exagonale $D_e = 34{,}6$ mm și înălțimea piuliței $h = 16$ mm. Se cere:

a) Puterea mașinii în kW. b) Forțele depuse de muncitor la strîngerea și desfacerea piulițelor, știind că brațul cheii fixe cu care lucrează are lungimea $a = 20$ cm, iar coeficientul de frecare dintre filet și piuliță $\mu' = 0{,}09$. c) Să se verifice dacă buloanele și piulița rezistă, cunoscînd eforturile unitare admisibile la întindere, forfecare și strivire, $\sigma_a = 117{,}6 \cdot 10^6$ N/m², $\tau_a = 82{,}3 \cdot 10^6$ N/m² și $\sigma_s = 207{,}4 \cdot 10^6$ N/m².

Rezolvare. a) Dacă F_f este forța de frecare și P puterea mașinii, putem scrie

$$P = F_f v = F_f \frac{\pi n D}{60} \quad \text{și} \quad F_f \cdot \frac{D}{2} = mgl.$$

Din aceste relații rezultă

$$P = 2\ mgl \frac{\pi n}{60} = 2 \cdot 50 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 60}{60 \cdot 1000} = 4{,}62\ \text{kW}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Forța de strîngere a saboților pe ax și efortul suportat de fiecare bulon sînt

$$N = \frac{F_f}{\mu} = \frac{2mgl}{\mu D} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}5}{0{,}3 \cdot 0{,}2} = 24500 \text{ N},$$

$$Q = \frac{N}{2} = \frac{24500}{2} = 12250 \text{ N}.$$

Ținînd seamă că $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{\pi d} = \frac{2{,}5}{3 \cdot 14 \cdot 20} = 0{,}04 = \sin \alpha$; $\cos \alpha = 0{,}9992$ și $\varphi > \alpha$, forțele necesare pentru strîngerea și desfacerea piuliței sînt

$$F_1 = \frac{Q \cdot d}{2a} \times \frac{\mu' \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu' \sin \alpha} = \frac{12250 \cdot 0{,}02}{2 \cdot 0{,}2} \times$$

$$\times \frac{0{,}09 \cdot 0{,}9992 + 0{,}04}{0{,}9992 - 0{,}09 \cdot 0{,}04} = 612{,}5 \cdot 0{,}13 = 79{,}6 \text{ N},$$

$$F_2 = \frac{Qd}{2a} \cdot \frac{\mu' \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu' \sin \alpha} = 30{,}6 \text{ N}.$$

c) Corpul bulonului fiind supus la tensiune, efortul efectiv unitar suportat de el este

$$\sigma_{ef} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 12250}{3{,}14 \cdot 0{,}02^2} = 39 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Întrucît $\sigma_{ef} < \sigma_a$, bulonul rezistă.

Piulița este solicitată la forfecare după suprafața laterală a cilindrului de diametru d și înălțime h, iar efortul unitar efectiv pe care îl suportă ea în acest caz este

$$\tau_{ef} = \frac{Q}{\pi dh} = \frac{12250}{3{,}14 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}016} = 1{,}225 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Piulița rezistă la forfecare, deoarece $\tau_{ef} < \tau_a$.

Piulița este supusă și la strivire pe suprafața de contact cu sabotul, efortul unitar efectiv la strivire fiind dat de relația

$$\sigma_{ef} = \frac{4Q}{\pi (D_e^2 - d^2)} = \frac{4 \cdot 12250}{3{,}14\,(0{,}0346^2 - 0{,}02^2)} = 19{,}5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Acest efort fiind mai mic decît cel admisibil, piulița rezistă și la strivire.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

Hidro și aeromecanica

A. Hidro și aerostatica

11. Presiunea hidrostatică, forțele hidrostatice pe suprafețe plane și curbe, transmiterea presiunii prin fluide

a. Considerații teoretice

1. Presiunea exercitată de o forță F pe o suprafață S este dată de relația

$$p = \frac{F}{S}\cos\alpha,$$

unde α este unghiul făcut de forță cu normala la suprafață.

În sistemul Internațional de unități, SI, presiunea se măsoară în newtoni pe metru pătrat (N/m^2), numită și pascal. Un multiplu al pascalului este piezul (pz)

$$1 \text{ pz} = 1\,000 \text{ N/m}^2$$

În CGS, presiunea se măsoară în microbar sau barie (μbar) și multiplii acestuia, milibarul (mbar) și barul (bar)

$$1 \text{ mbar} = 10^3 \text{ barie}, \quad 1 \text{ bar} = 10^6 \ \mu\text{bar}.$$

În tehnică se mai utilizează (kgf/cm^2) sau atmosfera tehnică (at)

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kgf/cm}^2 = 9{,}81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 \cdot$$

În afara sistemelor se mai utilizează atmosfera normală sau fizică (atm)

$$1 \text{ atm} = 1{,}033 \text{ at} = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot$$

Milimetrul coloană de mercur barometric sau torrul (torr)

$$1 \text{ torr} = \frac{1}{760}\text{atm} = 133{,}322 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ mm } H_2O = \frac{1}{10^4} \text{ at} = 9{,}81 \text{ N/m}^2 \cdot$$

2. Presiunea hidrostatică în interiorul unui lichid de densitate ρ, la adîncimea h, este dată de relația

$$p = \rho g h.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Diferența de presiune dintre punctele A și B ale unui fluid de densitate ρ este dată de relația

$$p = p_A - p_B = \rho g\,(h_A - h_B).$$

4. Forța hidrostatică exercitată de un lichid pe o suprafață plană cu aria S, înclinată cu unghiul α față de orizontală, este normală pe suprafață și are mărimea

$$F = Sp_G = S\rho\, gh_G = \frac{S_v}{\sin\alpha} \cdot \rho g h_G\,,$$

unde p_G este presiunea în centrul de greutate al suprafeței S, S_v — aria proiecției verticale a suprafeței S, iar h_G — distanța verticală de la suprafața liberă a lichidului la centrul de greutate al suprafeței.

La suprafețele curbe, S reprezintă aria suprafeței curbe proiectată pe un plan tangent la curbă, paralel cu marginile curbei și mărginit de conturul acestei curbe.

5. Forța de apăsare exercitată de un lichid care curge cu viteza v pe o suprafață plană, este

$$F = \frac{Mv}{2} = \rho\frac{Sv^2}{2} = \frac{\gamma}{g}\cdot\frac{Sv^2}{2}\cdot$$

unde M este masa de lichid, care curge perpendicular pe suprafața S, într-o secundă, ρ și γ — densitatea și greutatea specifică a lichidului, iar g — accelerația gravitației.

6. *Principiul lui Pascal.* Presiunea exercitată asupra unui lichid se transmite în toate direcțiile cu aceeași intensitate și se exprimă prin relația

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = \ldots = \frac{F_n}{S_n}\cdot$$

7. *Principiul conservării lucrului mecanic.* Între forțele exercitate asupra unui lichid și deplasările respective există relația

$$L = F_1a_1 = F_2a_2 = \ldots = F_na_n\cdot$$

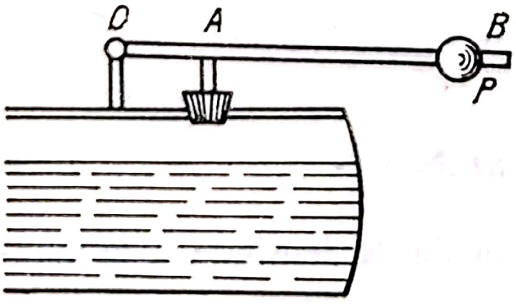


Fig. 83

b. Probleme

2.1. Care este presiunea cea mai mare pe care o poate exercita aburul unui cazan asupra supapei de siguranță din fig. 83, astfel ca aceasta să rămînă închisă? Aria supapei, asupra căreia acționează aburul este $S = 3\,\text{cm}^2$. Brațele de pîrghie sînt $OA = a = 8$ cm,

Scanned with OKEN Scanner

$OB = b = 30$ cm, iar contragreutatea $P = 78{,}4$ N. Greutatea levierului OB se neglijează.

Rezolvare. Din ecuația momentelor în raport cu O se obține forța care acționează asupra supapei

$$F = P\frac{b}{a} = 78{,}4 \cdot \frac{0{,}3}{0{,}08} = 294 \text{ N},$$

$$p = \frac{F}{S} = \frac{294}{3 \cdot 10^{-4}} = 98 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 = 980 \text{ pz}.$$

2.2. Un tub cilindric de sticlă cu secțiunea interioară $S = 2$ cm², deschis la ambele capete (fig. 84) este umplut cu mercur pe înălțimea $h = 10$ cm și astupat cu o placă subțire bine ajustată, de greutate neglijabilă. Placa fiind susținută de o sfoară, tubul este introdus într-un vas care conține un lichid cu densitatea $\rho = 800$ kg/m³. Să se determine:

a) Forța cu care trebuie să tragem de sfoară pentru ca mercurul să nu se verse din tub înainte de a fi introdus în vas. b) Pînă la ce adîncime trebuie să introducem tubul în vas, pentru ca, atunci cînd lăsăm sfoara liberă, mercurul din tub să nu se verse. c) În momentul în care tubul ajunge la adîncimea de la punctul (b), se produce o mică spărtură în peretele lateral al tubului la distanța $h' = 5$ cm față de capătul inferior al acestuia. Ce se va întîmpla cu lichidele din cele două vase în acest caz?

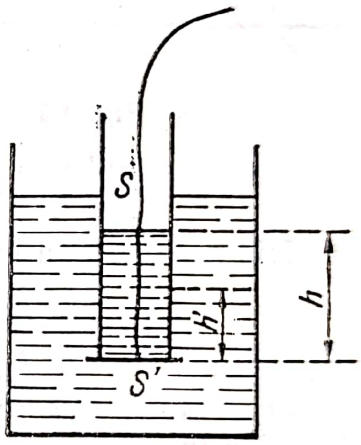


Fig. 84

Rezolvare. a) $F = Sh\rho g = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-1} \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 = 2{,}67$ N.

b) Dacă notăm cu x adîncimea cerută, trebuie să avem

$$Sh\rho g = Sx\rho' g\ ; \quad x = h \cdot \frac{\rho}{\rho'} = 1{,}7 \text{ m}.$$

c) Presiunile exercitate de mercur și de lichid asupra spărturii sînt

$$p = (h - h')\,\rho g = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 = 6664 \text{ N/m}^2,$$

$$p' = (x - h')\,\rho' g = 1{,}65 \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot 9{,}8 = 12936 \text{ N/m}^2 \cdot$$

Întrucît $p' > p$, lichidul din vas va pătrunde în tub și echilibrul se va strica.

2.3. La Porțile de Fier barajul deversor va avea lățimea $b = 400$ m și înălțimea $h = 60$ m. Se cere:

Scanned with OKEN Scanner

a) Presiunea hidrostatică pe fundul lacului de acumulare. b) Forța hidrostatică de apăsare a apei și grosimea barajului, știind că el este construit din beton armat cu densitate $\rho = 2\,500$ kg/m³. c) Cum se modifică forța de apăsare dacă se ține seamă și de viteza apei, de 0,5 m/s?

(R.F.Ch., nr. 9/1965)

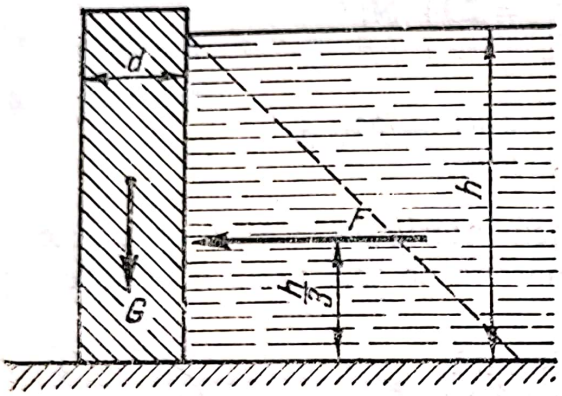


Fig. 85

Rezolvare. a) $p = \rho_a g h = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 60 = 588000$ N/m² = 588 pz.

b) $F_1 = bh \cdot \rho_a g \frac{h}{2} = \frac{1}{2} b \rho_a g h^2 =$

$= \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 60^2 = 70{,}56 \cdot 10^8$ N.

Centrul de presiune se află la distanța $h/3$ față de baza barajului (fig. 85).

Pentru ca barajul să nu se răstoarne, trebuie ca

$$bdh\rho g \cdot \frac{d}{2} = F \cdot \frac{h}{3} = \frac{1}{6} b \rho_a g h^3 \cdot$$

Din această relație rezultă

$$d = h \sqrt{\frac{\rho_a}{3\rho}} = 60 \cdot \sqrt{\frac{1000}{3 \cdot 2500}} = 60 \cdot \sqrt{0{,}1333} = 22 \text{ m.}$$

c) În acest caz intervine în plus forța de apăsare dinamică, iar forța totală este

$$F = F_1 + F_2 = \frac{1}{2} b \rho_a g h^2 + \rho_a \frac{bhv^2}{2} = \rho_a bh \left[\frac{gh}{2} + \frac{v^2}{2} \right] =$$

$$= 1000 \cdot 400 \cdot 60 \,(294 + 0{,}125) = 24 \cdot 10^6 \cdot 294{,}125 = 70{,}62 \cdot 10^8 \text{ N.}$$

2.4. Asupra unui perete înclinat, triunghiular cu baza $a = 2$ m și unghiul de înclinare față de verticală, $\alpha = 30°$, acționează două lichide având înălți-

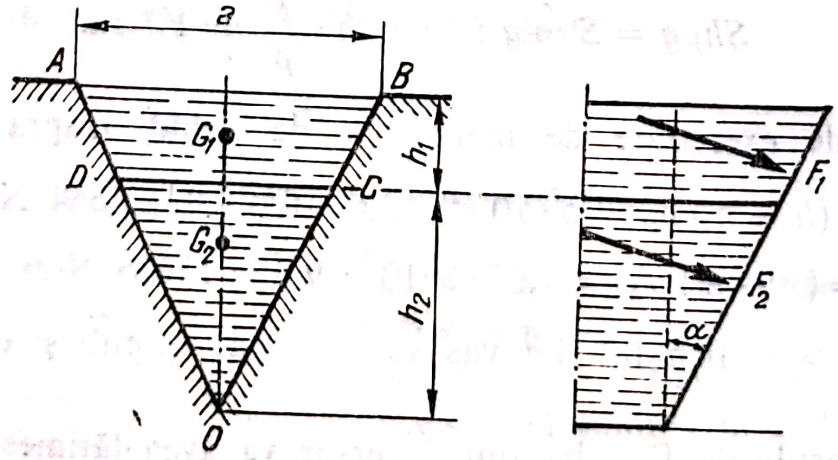


Fig. 86

mile verticale $h_1 = 1$ m și $h_2 = 1{,}5$ m și densitățile $\rho_1 = 800$ kg/m³ și $\rho_2 = 1\,000$ kg/m³ (fig. 86). Se cere să se determine forțele de apăsare exercitate de cele două lichide asupra peretelui înclinat.

Rezolvare. Baza mică a trapezului $ABCD$ este

$$DC = b = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \cdot AB = \frac{1{,}5}{1 + 1{,}5} \cdot 2 = \frac{3}{2{,}5} = 1{,}2 \text{ m}.$$

Suprafața trapezului

$$S_1 = \frac{(a + b)\, h_1}{2} = \frac{(2 + 1{,}2)\, 1}{2} = 1{,}6 \text{ m}^2 \cdot$$

Centrul de greutate al acestei suprafețe se află în G_1 la distanța

$$h_{G_1} = \frac{h_1}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 + 2{,}4}{3{,}2} = \frac{4{,}4}{9{,}6} = 0{,}458 \text{ m}$$

față de baza mare AB.

Forța de presiune F_1 este

$$F_1 = \frac{S_1}{\cos\alpha} \cdot p_{G_1} = \frac{S_1}{\cos\alpha} \cdot \rho_1 \cdot g h_{G_1} = \frac{1{,}6}{0{,}867} \cdot 800 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}458 = 6642 \text{ N}.$$

Aria triunghiului DCO este

$$S_2 = \frac{1}{2} b h_2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}5 = 0{,}90 \text{ m}^2 \cdot$$

Centrul de greutate al acestei suprafețe se află în punctul G_2 la distanța

$$h_{G_2} = h_1 + \frac{h_2}{3} = 1 + \frac{1{,}5}{3} = 1{,}5 \text{ m},$$

față de nivelul AB.

Forța de presiune F_2 este

$$F_2 = \frac{S_2}{\cos\alpha} \cdot p = \frac{S_2}{\cos\alpha} \cdot g \left(\rho_1 h_1 + \rho_2 \cdot \frac{h_2}{3} \right) =$$

$$= \frac{0{,}9}{0{,}867} \cdot 9{,}8\,(800 \cdot 1 + 1000 \cdot 0{,}5) = \frac{0{,}9}{0{,}867} \cdot 9{,}8 \cdot 1300 = 13255 \text{ N}.$$

Determinarea punctelor de aplicație (centrelor de presiune) ale forțelor F_1 și F_2 sînt mai complicate, necesitînd cunoașterea momentelor de inerție ale suprafețelor.

2.5. Dintr-un clopot de sticlă de formă semisferică cu greutatea $G = 19{,}6$ N, așezat pe o masă orizontală, s-a scos parțial aerul din interior, presiunea acestuia rămînînd egală cu $p_1 = 266{,}7$ N/m². Dacă diametrul clopotului $D = 20$ cm, iar presiunea atmosferică $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m², se cere forța cu care clopotul trebuie tras vertical în sus spre a-l desprinde de masă (fig. 87),

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Rezultanta forțelor de apăsare ale aerului din exterior și interior asupra clopotului este

$$R = F_1 - F_2 = \frac{\pi D^2}{4}(p_0 - p_1) = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}04}{4} \cdot 1{,}01 \cdot 10^5 = 3170{,}6 \text{ N}.$$

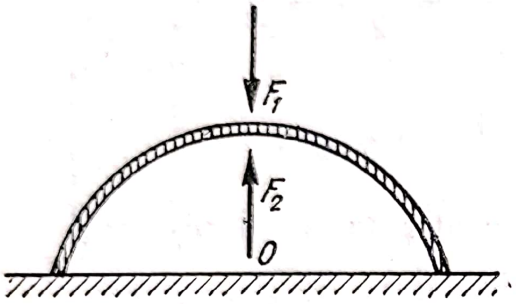


Fig. 87

Forța necesară pentru desprindere este

$$F = R + G = 3170{,}4 + 19{,}6 = 3190 \text{ N}.$$

2.6. Un rezervor cilindric vertical din tablă de oțel, deschis la partea superioară, (fig. 88), avînd diametrul interior $D = 4$ m și înălțimea $H = 5$ m, este plin cu petrol de densitate $\rho = 800$ kg/m³.

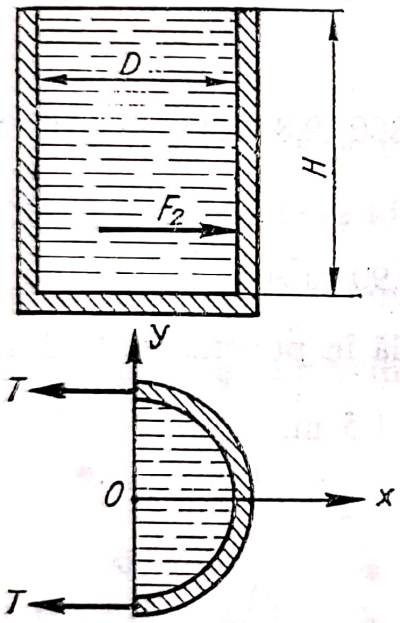


Fig. 88

Cunoscînd rezistența admisibilă la tracțiune a tablei de oțel $\sigma_2 = 784 \cdot 10^5$ N/m² și presiunea atmosferică $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m², se cere:

a) Forța de apăsare asupra fundului rezervorului. b) Forța care se exercită pe pereții laterali ai rezervorului. c) Grosimea tablei din care trebuie confecționați pereții laterali ai rezervorului.

Rezolvare

a) $$F_1 = \frac{\pi D^2}{4}(p_0 + \rho g H) = \frac{3{,}14 \cdot 4^2}{4}(10{,}13 \cdot 10^4 + 800 \cdot 9{,}8 \cdot 5) =$$

$$= 12{,}56\,(101330 + 39200) = 17{,}65 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

b) Considerînd jumătate din rezervor avem

$$F_2 = S_v p_G = D \cdot H \cdot \left(p_0 + \rho g \frac{H}{2}\right) = 4 \cdot 5 \left(101300 + \right.$$

$$\left. + 800 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{5}{2}\right) = 20\,(101300 + 19600) = 24{,}18 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Grosimea maximă este pe fundul rezervorului. Considerînd un inel semicircular cu lățimea (înălțimea) $a = 1$ cm pe fundul rezervorului, forța de apăsare pe acest inel va fi

$$F_3 = Dap = Da(p_0 + \rho gH).$$

Această forță este echilibrată de forțele de tracțiune T, care iau naștere în secțiunile inelului de grosime e și înălțime a, și de forța datorită presiunii atmosferice care se exercită și din exteriorul rezervorului, adică

$$Da(p_0 + \rho gH - p_0) = 2T = 2ae\sigma_a,$$

$$e = \frac{D\rho gH}{2\sigma_a} = \frac{4 \cdot 800 \cdot 9{,}8 \cdot 5}{2 \cdot 784 \cdot 10^5} =$$

$$= 0{,}001 \text{ m} = 1 \text{ mm}.$$

2.7. Pistonul pompei unei prese hidraulice este împins cu ajutorul unei pîrghii. La brațul lung al pîrghiei acționează o forță de 196 N. Raportul brațelor este 5 : 1 (fig. 89).

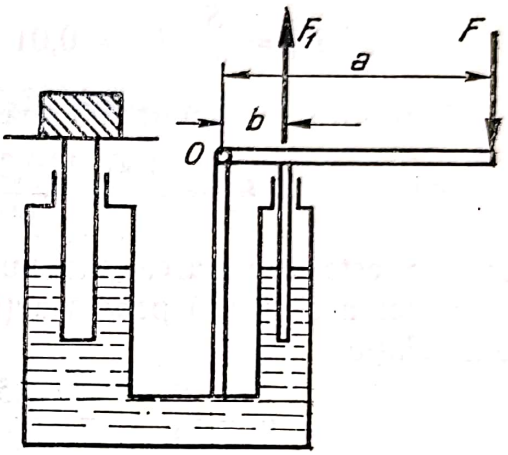


Fig. 89

Ce forță de apăsare vom obține la pistonul presei, dacă diametrul pistonului pompei este de 8 cm, iar cel al pistonului presei este de 30 cm? Cît de mare este lucrul mecanic efectuat, dacă pistonul presei este ridicat cu 15 cm? Ce putere are motorul care a pus presa în funcțiune, dacă ridicarea la 15 cm a pistonului s-a făcut în două minute?

(Olimpiada de fizică, Timișoara, 1955)

Rezolvare. Secțiunile pistoanelor pompei și presei sînt

$$S_1 = 50{,}24 \text{ cm}^2 \text{ și } S_2 = 706{,}50 \text{ cm}^2 \cdot$$

Forțele exercitate de pistoanele pompei și presei sînt

$$F_1 = \frac{a}{b}F = \frac{5}{1}196 = 980 \text{ N},$$

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1}F_1 = \frac{706{,}50}{50{,}24}980 = 13779 \text{ N}.$$

Lucrul mecanic efectuat de presă este

$$L = F_2 a_2 = 13779 \cdot 0{,}15 = 2067 \text{ J}.$$

Puterea motorului este

$$P = \frac{L}{t} = \frac{2067}{120} = 17{,}2 \text{ W}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.8. Cu ajutorul unei prese hidraulice se ridică o greutate de $110{,}25 \cdot 10^4$ N. Cu cîți centimetri trebuie să coboare pistonul mic la fiecare apăsare, cunoscînd că:motorul întrebuințat în acest scop are o putere de 3,675 kW, randamentul este de 0,75, pistonul mic face 100 apăsări pe minut, iar raportul ariilor celor două pistoane ale presei este 0,01?

(G.M.F., nr. 12/1952)

Rezolvare. Forța de apăsare a pistonului mic este

$$F_1 = \frac{S_1}{S_2} F_2 = 0{,}01 \cdot 110{,}25 \cdot 10^4 = 110{,}25 \cdot 10^2 \text{ N}.$$

Pistonul mic, făcînd 100 apăsări pe minut, are puterea utilă

$$P_u = \frac{100 \cdot 110{,}25 \cdot 10^2 x}{60} = \frac{110{,}25 \cdot 10^4 x}{60},$$

unde x este deplasarea pistonului mic la fiecare apăsare.

Puterea cheltuită pentru acționarea presei: $P_c = 3{,}675$ kW, iar x rezultă din relația

$$\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{11025 \cdot 10^2 x}{3675} = 0{,}75\,; \quad x = 0{,}15 \text{ m}.$$

2.9. Transformatorul hidropneumatic de presiune (fig. 90) este unul dintre dispozitivele aplicate de tehnica nouă la fixarea și strîngerea mecanizată a pieselor în strunguri. Aerul sub presiune intră în cilindrul pneumatic și apasă asupra pistonului de diametru $D_1 = 15$ cm. Tija acestui piston (plonjorul cilindrului), de diametru $d = 5$ cm, transmite prin ulei, pistonului hidraulic de diametru $D = 8$ cm presiunea creată, iar prin tija acestuia, forța produsă se transmite piesei. Pistoanele sînt aduse în poziția inițială prin două arcuri elicoidale.

Cunoscînd presiunea aerului $p_1 = 49 \cdot 10^4$ N/m² și constantele de elasticitate ale celor două arcuri $k_1 = 28{,}84 \cdot 10^4$ N/m și $k = 55{,}375 \cdot 10^4$ N/m se cere:

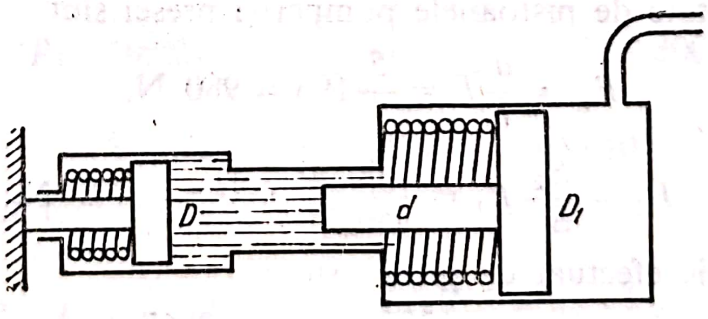


Fig. 90

a) Forța de strîngere a piesei. b) Deplasarea pistoanelor în timpul strîngerii piesei. c) Energia acumulată de cele două arcuri în timpul strîngerii piesei.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Aerul apasă asupra pistonului D_1 cu forța

$$F_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} p_1 = \frac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 49 \cdot 10^4 = 8652 \text{ N}.$$

Conform principiului lui Pascal, avem

$$\frac{F}{F_1} = \frac{\pi D^2}{4} : \frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

Din această relație rezultă

$$F = \left(\frac{D}{d}\right)^2 F_1 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 \cdot 8652 = 2{,}56 \cdot 8652 = 22150 \text{ N}.$$

b) Deformarea arcurilor este egală cu deplasarea pistoanelor, adică

$$x_1 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{8652}{28{,}84 \cdot 10^4} = 0{,}03 \text{ m},$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{22150}{55{,}375 \cdot 10^4} = 0{,}04 \text{ m}.$$

c) Energia potențială acumulată de cele două arcuri este

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 x_1 = \frac{k_1 x_1^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8652 \cdot 0{,}03 = 130 \text{ J},$$

$$W = \frac{1}{2} Fx = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 22150 \cdot 0{,}04 = 443 \text{ J}.$$

12. Manometre, vase comunicante, densitatea amestecurilor, echilibrul lichidelor din vasele în mișcare

a. Considerații teoretice

1. Presiunea lichidelor și gazelor, măsurată cu ajutorul manometrelor, este dată de relația

$$p = H \pm h = p_0 \pm \rho g h,$$

unde H sau p_0 este presiunea atmosferică, ρ — densitatea fluidului, g — accelerația gravitației și h — diferența de nivel dintre cele două ramuri ale tubului manometric.

2. Între densitățile și înălțimile la care se ridică lichidele în două vase comunicante există relația

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Densitatea amestecului mai multor lichide, care au densitățile $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ și volumele $V_1, V_2, \ldots, V_i$, este dată de relația

$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \ldots + \rho_i V_i}{V_1 + V_2 + \ldots + V_i} = \frac{\Sigma \rho_i V_i}{\Sigma V_i}.$$

4. Suprafața liberă a unui lichid aflat în vase care au o mișcare uniform variată sau care se rotesc, nu mai rămîne orizontală, datorită forțelor de inerție.

b. Probleme

2.10. Un aparat pentru compararea nivelului lichidelor este format dintr-un balon A în care se află aer și din două tuburi piezometrice în care se găsesc lichidele de comparat (fig. 91).

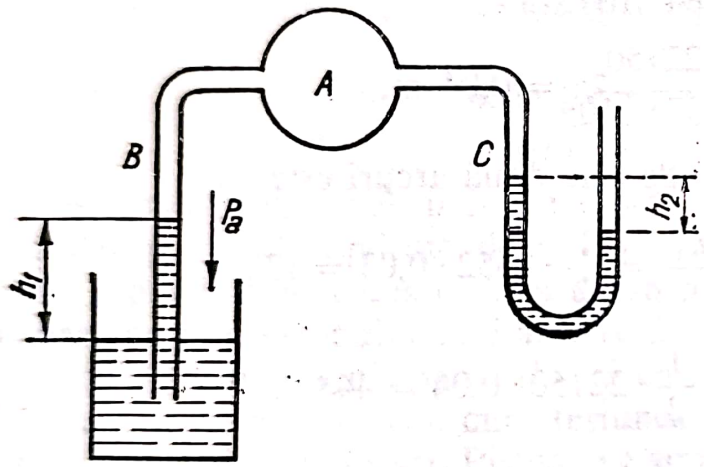


Fig. 91

Dacă în tubul B apa s-a ridicat la înălțimea $h_1 = 10$ cm, se cere:

a) Presiunea aerului din balonul A. b) Înălțimea h_2 la care se va ridica mercurul în tubul C. Se dau: densitatea apei $\rho_a = 1000$ kg/m³, densitatea mercurului $\rho_m = 13600$ kg/m³ și presiunea atmosferică $p_0 = 760$ torr $= 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².

Rezolvare. a) Dacă notăm cu p_x presiunea din balonul A se poate scrie

$$p_0 = \rho_a g h_1 + p_x.$$

Din această relație rezultă

$$p_x = p_0 - \rho g h_1 = 101300 - 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1 = 100320 \text{ N/m}^2,$$

$$\text{b) } h_2 = \frac{\rho_a}{\rho_m} \cdot h_1 = \frac{1000}{13600} \cdot 0{,}1 = 0{,}00745 \text{ m} = 7{,}45 \text{ mm}.$$

2.11. Presiunea rezervorului R este măsurată cu o instalație ca în fig. 92, lichidul manometric folosit fiind mercurul de densitatea $\rho = 13600$ kg/m³. Presiunea atmosferică este de $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².

Robinetul r fiind închis, echilibrul se stabilește pentru $h_1 = 450$ mm și $h_2 = 320$ mm. Se cere:

Scanned with OKEN Scanner

a) Presiunea gazului în rezervorul R. b) Presiunea aerului închis în spațiul a. c) Denivelările h'_1 și h'_2 cînd se deschide robinetul r și se neglijează greutatea aerului din spațiul a.

Rezolvare. a) Dacă notăm cu p_1 — presiunea aerului din spațiul a și cu p — presiunea aerului din rezervor putem scrie

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1, \quad p = p_1 + \rho g h_2 .$$

Din aceste ecuații rezultă

$$p = p_0 + \rho g(h_1 + h_2) = 1{,}013 \times$$
$$\times 10^5 + 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}770 =$$
$$= 204060 \text{ N/m}^2 .$$

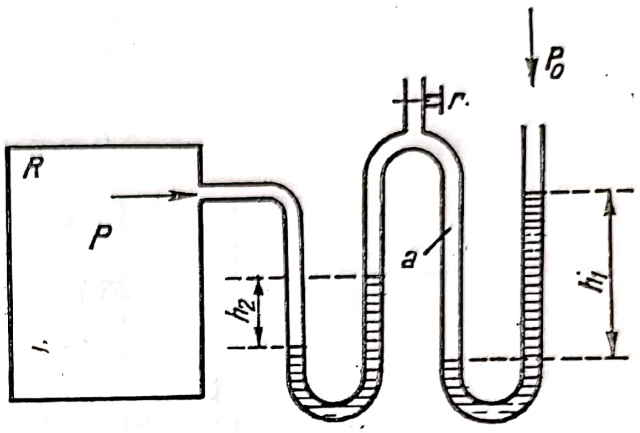


Fig. 92

b) $p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5 + 13600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}45 = 161367 \text{ N/m}^2$.

c) După deschiderea robinetului r, $h'_1 = 0$, iar h'_2 este dat de relația

$$p = p_0 + \rho g h'_2 \; ; \; h'_2 = \frac{p - p_0}{\rho g} = h_1 + h_2 = 77 \text{ cm}.$$

2.12. Un tub îndoit în formă de U, cu secțiunea constantă, conține mercur al cărui nivel, în ambele brațe, este cu 30 cm mai jos decît extremitatea ramurii din dreapta a tubului (fig. 93).

Ce înălțime de apă trebuie să turnăm în ramura din stînga pentru a umple complet ramura din dreapta?

Rezolvare. Fie AA' nivelul inițial al mercurului în ambele ramuri. Cînd mercurul se ridică în ramura din dreapta cu înălțimea $A'D'$, el se coboară în ramura din stînga din A în B, astfel încît $AB = A'D'$.

Cum însă $AB = A'B'$ rezultă că $B'D' = 60$ cm.

Dacă notăm cu h înălțimea apei vom avea

$$\frac{h}{h'} = \frac{\rho'}{\rho} \; ; \quad h = \frac{\rho'}{\rho} h' = \frac{13{,}6}{1} \cdot 60 =$$
$$= 816 \text{ cm} = 8{,}16 \text{ m}.$$

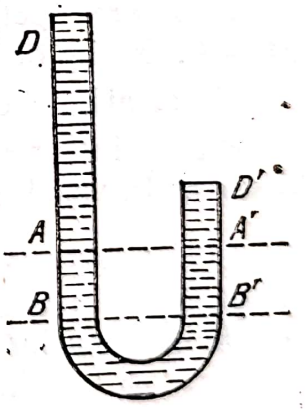


Fig. 93

2.13. Pentru exploatarea unei mine de apă sărată s-a săpat în pămînt o sondă (fig. 94) în care s-a introdus un tub pe 100 m lungime, de diametru mai mic decît al puțului de sondă și care se ridică deasupra solului cu 1 m.

Tubul este introdus pe o lungime de 0,75 m într-o soluție salină, de densitate 1300 kg/m³. În intervalul care separă tubul de pereții sondei se toarnă apă dulce. Se întreabă la ce distanță de extremitatea exterioară se va ridica apa sărată în tub?

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Cu notațiile din figură, unde $AB = l = 100$ m, $CE = h$, $EB = h' = 0{,}75$ m, $AC = h'' = 1$ m și $ED = x$, rezultă $h = l - h' - h'' = 100 - 0{,}75 - 1 = 98{,}25$ m. Echilibrul hidrostatic la nivelul E conduce la:

$$\rho' x = \rho h;\ x = \frac{\rho}{\rho'} h = \frac{1000}{1300} \cdot 98{,}25 = 75{,}58 \text{ m},$$

$$AD = l - (x + h') = 100 - 76{,}33 = 23{,}67 \text{ m}.$$

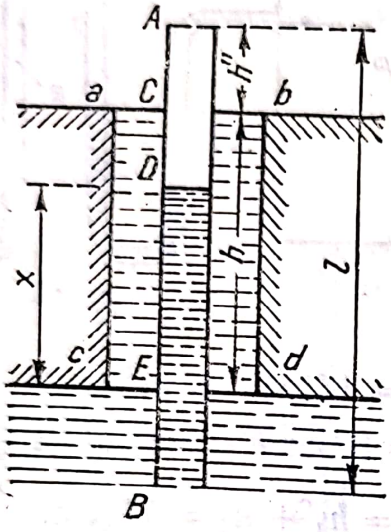


Fig. 94

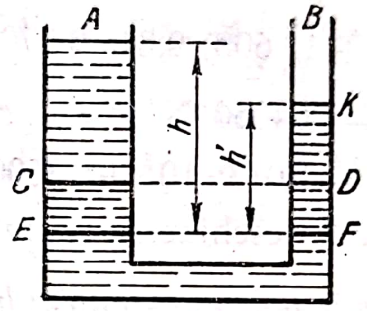


Fig. 95

2.14. Două vase comunicante A și B (fig. 95) conțin mercur pînă la o înălțime oarecare; vasul A are secțiunea $S = 6$ cm², iar vasul B are secțiunea $S' = 2$ cm². În vasul A se toarnă o cantitate $M = 0{,}200$ kg de lichid de densitate $\rho = 1500$ kg/m³.

Să se afle nivelul mercurului ($\rho' = 13\,600$ kg/m³) în cele două vase.

Rezolvare. Fie x înălțimea DK cu care se ridică mercurul în vasul B. În vasul A, mercurul se coboară cu înălțimea $CE = S'/S$ astfel încît

$$h' = x + \frac{xS'}{S} = \frac{x(S + S')}{S}.$$

Înălțimile celor două lichide fiind invers proporționale cu densitatea, avem

$$\frac{h}{\frac{x(S + S')}{S}} = \frac{\rho'}{\rho},\quad x = \frac{hS\rho}{\rho'(S + S')} \text{ și } CE = \frac{xS'}{S} = \frac{hS'\rho}{\rho'(S + S')}.$$

Pentru cazul particular, $h = M/S\rho$, avem

$$x = \frac{M}{\rho'(S + S')} = \frac{0{,}200}{13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0{,}0183 \text{ m} = 18{,}3 \text{ mm}.$$

$$CE = \frac{M \cdot S'}{S\rho'(S + S')} = \frac{0{,}2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4} \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0{,}0061 \text{ m} = 6{,}1 \text{ mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.15. Două vase cilindrice, cu secțiunile de 5 cm² și 20 cm² și fundurile în același plan orizontal, comunică între ele printr-un tub de volum neglijabil, care poate fi închis printr-un robinet.

Se toarnă în fiecare dintre cele două vase 2 kg de mercur și se cere să se calculeze presiunile pe fundul vaselor atunci cînd:

a) Robinetul este închis. b) Robinetul este deschis.

Rezolvare. a) Înălțimile lichidului în cele două vase sînt

$$h = \frac{M}{S\rho} = \frac{2000}{5 \cdot 13{,}6} = \frac{400}{13{,}6} = 29{,}40 \text{ cm},$$

$$h' = \frac{M}{S'\rho} = \frac{2000}{20 \cdot 13{,}6} = \frac{100}{13{,}6} = 7{,}35 \text{ cm}.$$

Presiunile pe fundul vaselor sînt

$$p = \frac{Mg}{S} = \frac{2 \cdot 9{,}81}{5 \cdot 10^{-4}} = 3{,}924 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$p' = \frac{Mg}{S'} = \frac{2 \cdot 9{,}81}{20 \cdot 10^{-4}} = 0{,}981 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2.$$

b) În acest caz vasele sînt comunicante și dacă notăm cu h înălțimea comună la care se ridică lichidul, avem

$$\rho h (S + S') = 2M,$$

de unde rezultă

$$h = \frac{2M}{\rho(S + S')} = \frac{4}{13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 0{,}118 \text{ m}.$$

Presiunea pe fundul vaselor este

$$p = \frac{2Mg}{S + S'} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 9{,}81}{25 \cdot 10^{-4}} = 1{,}57 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2.$$

2.16. De capacul unui vas D plin cu mercur sînt sudate trei tuburi verticale A, B, C (fig. 96). Mercurul din vas se ridică în tuburi pînă la o înălțime oarecare. În vasul A se toarnă, deasupra mercurului, o coloană de apă de 50 cm. În B se toarnă alcool, iar în C acid sulfuric, astfel încît nivelul superior al celor trei lichide: apă, alcool și acid sulfuric să fie în același plan orizontal. Să se calculeze înălțimile x și y ale coloanelor de alcool și acid sulfuric, știind că densitatea alcoolului este 790 kg/m³, a acidului sulfuric 1840 kg/m³, iar a mercurului 13 600 kg/m³.

Rezolvare. Dacă z este înălțimea mercurului în tubul A, înălțimile mercurului în tuburile B și C vor fi egale cu: $50 + z - x$ și $50 + z - y$.

Presiunile exercitate de lichidele din cele trei tuburi asupra planului orizontal EF fiind egale, avem $13{,}6\, z + 50 = 13{,}6\, (50 + z - x) + 0{,}79\, x = 13{,}6\, (50 + z - y) + 1{,}84\, y$.

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste ecuații scoatem $x = 49{,}2$ cm și $y = 53{,}6$ cm.

2.17. Două vase cilindrice verticale A și B comunică între ele printr-un tub inferior și conțin apă (fig. 97). Se introduce în A un piston cu greutatea P și se constată că între nivelele celor doi cilindri se stabilește o diferență h. Peste pistonul de greutate P' se adaugă altă greutate P', iar diferența de nivel

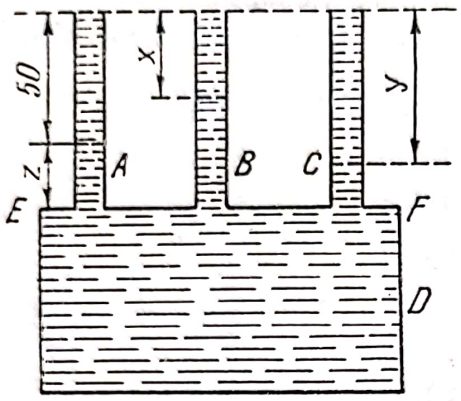


Fig. 96

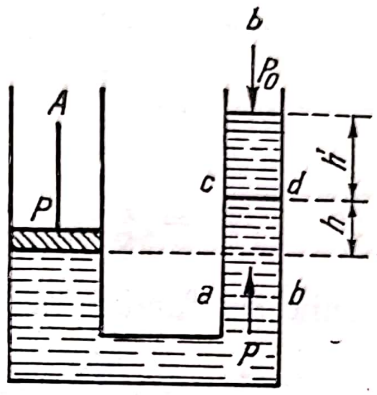


Fig. 97

crește cu h'. Să se calculeze secțiunea x a cilindrului A și greutatea P a pistonului.

Aplicație : $h = 12$ cm, $h' = 40$ cm și $P' = 24{,}5$ N.

Rezolvare. Pe suprafața lichidului din A se exercită presiunea $p = P/x + p_0$, care se transmite și în cilindrul B pe suprafața $a - b$ (p_0 este presiunea atmosferică).

Diferența de presiune dintre suprafețele $(a - b)$ și $(c - d)$ este

$$\Delta p = p - p_0 = \gamma h,$$

de unde rezultă

$$\frac{P}{x} + p_0 - p_0 = \gamma h; \quad P = \gamma hx. \tag{1}$$

În experiența a doua avem

$$\frac{P + P'}{x} + p_0 - p_0 = \gamma (h + h'),$$

$$P + P' = \gamma (h + h') x. \tag{2}$$

Rezolvînd ecuațiile (1) și (2) obținem

$$x = 62{,}50 \text{ cm}^2 \text{ și } P = 7{,}35 \text{ N}.$$

2.18. Două tuburi A și B de secțiuni S și S' sînt unite printr-un tub cilindric îndoit în formă de U, avînd secțiunea S''.

În A se toarnă un lichid de densitate ρ iar în B se toarnă un alt lichid de densitate $\rho' < \rho$ și se notează suprafața de separație a celor două lichide în

Scanned with OKEN Scanner

echilibru, cu $(m - n)$ (fig. 98). În tubul B se mișcă fără frecare un piston de greutate neglijabilă peste care se așază o greutate P. Să se calculeze deplasarea suprafeței de separație a celor două lichide.

Aplicație: $S = 5$ cm², $S' = 8$ cm², $S'' = 0{,}5$ cm², $P = 1{,}96$ N. $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³, $\rho' = 10^3$ kg/m³.

Rezolvare. Fie h și h' înălțimile celor două lichide deasupra planului de separație mn. Conform principiului vaselor comunicante se poate scrie

$$\frac{h}{h'} = \frac{\rho'}{\rho}. \qquad (1)$$

După ce am pus în B pistonul și greutatea P, nivelul lichidului din B coboară cu h'', planul de separație mn se deplasează cu x venind în $(m' - n')$, iar lichidul din A se ridică cu înălțimea h'''.

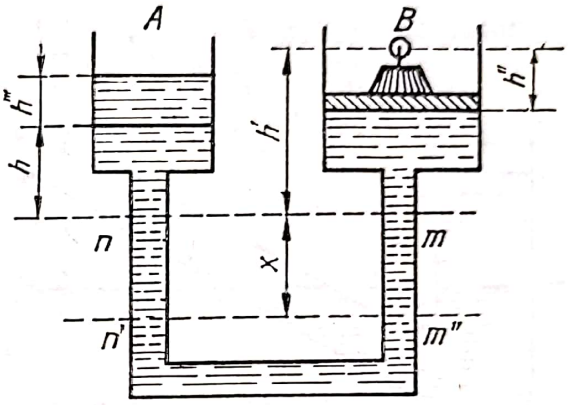


Fig. 98

Presiunile exercitate de lichidele din cele două vase pe suprafața de separație $(m' - n')$ fiind egale, putem scrie

$$(x + h + h''')\rho g = (x + h' - h'')\rho' g + \frac{P}{S'}. \qquad (2)$$

Ținând seama că volumul lichidelor deplasate este același în cele trei tuburi, avem

$$h''S' = xS'' = h'''S,$$

de unde rezultă

$$h'' = \frac{x S''}{S'} \text{ și } h''' = \frac{x S''}{S}.$$

Din relațiile (1), (2) și (3) se obține

$$x = \frac{PS}{g\,[SS'(\rho - \rho') + S''(S' - S\rho')]}.$$

În cazul aplicației, rezultă

$$x = \frac{1{,}96 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{9{,}8 \cdot 10^{-5}\,[5 \cdot 8\,(13{,}6 - 1) + 0{,}5\,(8 \cdot 13{,}6 - 5)]} = 0{,}0178 \text{ m} = 1{,}78 \text{ cm}.$$

2.19. Într-un tub cu două ramuri îndoite sub un unghi $\alpha = 60°$ (fig. 99) se toarnă mercur și apoi, în ramura A de secțiune $S = 5$ cm², se toarnă o cantitate $m = 102$ g de apă. Se cere să se calculeze:

a) Ce lungime l, socotită de la planul de separație al lichidelor, va ocupa mercurul din tubul B. b) În tubul A se introduce un piston cu masa

Scanned with OKEN Scanner

$m' = 204\ g$ al cărui diametru este egal cu diametrul tubului A; să se afle ce lungime l' va ocupa, de data aceasta, mercurul din tubul B.

Rezolvare. a) Înălțimea coloanei de apă din tubul A este

$$h = \frac{m}{\rho S} = \frac{102}{5} = 20{,}4\ \text{cm}.$$

Înălțimea verticală a coloanei de mercur din tubul B fiind egală cu h, avem

$$\frac{h}{h'} = \frac{\rho'}{\rho}, \quad h' = \frac{\rho}{\rho'} h = \frac{1}{13{,}6}\ 20{,}4 = 1{,}5\ \text{cm}.$$

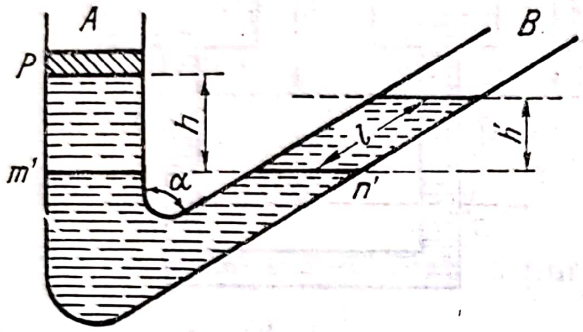


Fig. 99

Lungimea l va fi

$$l = \frac{h'}{\cos\alpha} = \frac{1{,}5}{\cos 60^\circ} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3\ \text{cm}.$$

b) Presiunile exercitate de lichidele din cele două tuburi pe noua suprafață de separație $(m' - n')$ fiind egale, putem scrie

$$\frac{m' g}{S} + \rho g h = \rho' g h'',$$

$$h'' = \frac{1}{\rho'}\left(\frac{m'}{S} + \rho h\right) = \frac{1}{13{,}6}\left(\frac{204}{5} + 1 \cdot 20{,}4\right) = 4{,}5\ \text{cm}.$$

$$l' = \frac{h''}{\cos\alpha} = \frac{4{,}5}{0{,}5} = 9\ \text{cm}.$$

2.20. Într-un flacon se toarnă în volume egale, două lichide miscibile, A și B, găsindu-se o densitate medie de $7{,}25 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$.

Dacă în același flacon se toarnă 1/5 din lichidul A și 4/5 din lichidul B se găsește o densitate medie de $3{,}5 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$.

Să se afle densitatea lichidelor A și B.

Rezolvare. Din relația

$$\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho (V_1 + V_2)$$

ținînd seama că $V_1 = V_2$, iar densitatea medie $\rho = 7{,}25 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$ scoatem

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\rho = 14{,}5 \cdot 10^3. \qquad (1)$$

În cazul al doilea avem

$$\frac{V_1}{5}\rho_1 + \frac{4V_2}{5}\rho_2 = \left(\frac{V_1}{5} + \frac{4V_2}{5}\right)\rho'$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum $V_1 = V_2$, iar $\rho' = 3{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3 rezultă

$$\rho_1 + 4\rho_2 = 5\rho' = 17{,}5 \cdot 10^3. \qquad (2)$$

Rezolvînd ecuațiile (1) și (2) obținem

$$\rho_1 = 13{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ și } \rho_2 = 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

2.21. Într-un vas umplut cu apă și cîntărit se introduce un corp solid insolubil; creșterea de masă este $20{,}75 \cdot 10^{-3}$ kg.

Dacă vasul ar fi fost plin cu ulei de densitate $0{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3, creșterea de masă ar fi fost de $21{,}58 \cdot 10^{-3}$ kg. Să se calculeze volumul, densitatea și greutatea corpului.

Rezolvare. Dacă V_1 și V_2 sînt volumele ocupate de apă și de corp, iar ρ densitatea corpului, putem scrie

$$V_1 \cdot 10^3 + V_2 \rho = (V_1 + V_2) \cdot 10^3 + 20{,}75 \cdot 10^{-3},$$

$$V_2 (\rho - 10^3) = 20{,}75 \cdot 10^{-3}. \qquad (1)$$

Cînd vasul este umplut cu ulei, avem

$$0{,}9 \cdot 10^3 V_1 + V_2 \rho = 0{,}9 \cdot 10^3 (V_1 + V_2) + 21{,}58 \cdot 10^{-3}$$

$$V_2 (\rho - 0{,}9 \cdot 10^3) = 21{,}58 \cdot 10^{-3} \qquad (2)$$

Împărțind (1) cu (2) obținem

$$\frac{\rho - 10^3}{\rho - 0{,}9 \cdot 10^3} = \frac{20{,}75}{21{,}58},$$

de unde scoatem $\rho = 3{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3.

Din relația (1) scoatem $V_2 = 8{,}3 \cdot 10^{-6}$ m^3,

$$G = V_2 g \rho = 8{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}5 \cdot 10^3 = 0{,}285 \text{ N}.$$

2.22. Trei vase egale A, B, C sînt umplute pe jumătate cu trei lichide de densități ρ_1, ρ_2 și ρ_3. Lichidul A îl turnăm peste B obținînd un amestec din care turnăm apoi în vasul C pînă se umple, obținînd un alt amestec din toate cele trei lichide. Să se afle densitatea acestui ultim amestec.

Aplicație: $\rho_1 = 400$ kg/m^3; $\rho_2 = 600$ kg/m^3 și $\rho_3 = 800$ kg/m^3.

Rezolvare. Să notăm cu V volumul de lichid aflat inițial în cele trei vase. Turnînd lichidul din A peste cel din B, vom obține un amestec de densitate ρ' dată de relația

$$2V\rho' = V\rho_1 + V\rho_2.$$

de unde rezultă

$$\rho' = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă turnăm acum jumătate din amestecul din B peste lichidul din C, vom obține un amestec de densitate ρ dată de relația

$$2V\rho = V\rho_3 + V\frac{\rho_1 + \rho_2}{2},$$

de unde rezultă

$$\rho = \frac{\rho_3}{2} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{4} = \frac{1}{4}(\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_3).$$

În cazul aplicației avem

$$\rho = \frac{1}{4}(400 + 600 + 2\,800) = 650\ \text{kg/m}^3.$$

2.23. Dacă se amestecă, în volume egale, alcool de densitate 800 kg/m³ și apă distilată, se obține un amestec al cărui volum scade cu 4 % față de volumul fiecărui constituent.

Care este densitatea amestecului?

R e z o l v a r e. Dacă notăm cu V volumul fiecărui constituent, volumul amestecului este egal cu $2V - 2\cdot 0{,}04\ V$.

Relația care ne dă densitatea ρ a amestecului este

$$\rho(2V - 0{,}08\,V) = 800\,V + 1\,000\,V,$$

de unde rezultă

$$\rho = \frac{1\,800}{2 - 0{,}08} = \frac{1\,800}{1{,}92} = 937{,}5\ \text{kg/m}^3.$$

2.24. Un șofer, depășind viteza de 60 km/h a fost oprit de un milițian. Pînă la oprire, mașina lui a parcurs 15 m; În mașină s-a găsit un vas cilindric cu diametrul de 40 cm și înălțimea de 50 cm, avînd apă pînă la jumătate.

Partea interioară cea mai înaltă, udată de apă, se afla cu 22 cm deasupra nivelului apei din vas. Să se calculeze viteza mașinii în momentul în care a început frînarea.

(G.M.F., nr. 7/1962)

R e z o l v a r e. În timpul frînării, intervine forța de inerție, iar suprafața apei din vas ia forma A_1B_1. O particulă de apă cu masa m, aflîndu-se în echilibru dinamic pe suprafața A_1B_1, rezultanta forței de inerție și a greutății particulei este perpendiculară pe suprafața A_1B_1 (fig. 100); rezultă că

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_1}{G} = \frac{ma}{mg},\quad a = g\operatorname{tg}\alpha.$$

Din figură se observă că

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BB_1}{OB} = \frac{22}{20} = 1{,}1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci accelerația mașinii în timpul opririi este

$$a = 9{,}8 \cdot 11 = 10{,}78 \text{ m/s}^2.$$

Viteza mașinii în momentul începerii frînării este

$$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2 \cdot 10{,}78 \cdot 15} = \sqrt{323{,}40} = 17{,}9 \text{ m/s} = 64{,}4 \text{ km/h}.$$

2.25. Un vas tronconic plin cu apă are diametrul bazei mari $D = 200$ mm, diametrul bazei mici $d = 100$ mm și înălțimea $h = 50$ mm (fig. 101). Se cere:

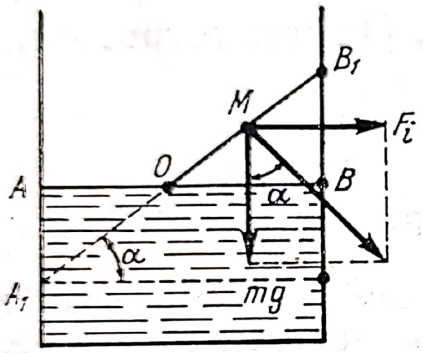


Fig. 100

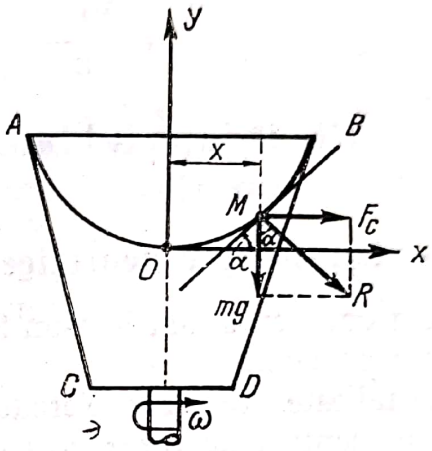


Fig. 101

a) Forma pe care o va lua suprafața liberă a lichidului din vas dacă acesta se rotește în jurul axei verticale, care trece prin centrul său cu o turație constantă. b) Turația minimă necesară pentru golirea completă a vasului?

Rezolvare. a) Să presupunem că în timpul rotației, apa rămasă în vas va lua forma curbă AOB.

O particulă M de lichid de masă m este supusă forței centrifuge $F = mx\omega^2$ și greutății sale proprii $G = mg$. Rezultanta acestor forțe R trebuind să fie perpendiculară pe suprafața liberă a lichidului (condiția de echilibru a particulei) putem scrie

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{mx\omega^2}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}, \tag{1}$$

unde α este unghiul făcut de rezultanta R cu verticala și care este egal cu unghiul făcut de tangenta în M la curbă cu axa Ox.

Din analiza matematică se știe că $\operatorname{tg}\alpha = dy/dx$. Înlocuind în (1) se obține

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x, \quad dy = \frac{\omega^2}{g} r\, dx. \tag{2}$$

Făcînd integrarea ecuației (2) obținem o parabolă

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Considerînd peretele vasului ca un plan înclinat, pentru ca o particulă de lichid de pe fundul vasului să se ridice pe plan, trebuie ca

$$mg \sin \alpha = m \cdot \frac{d}{2} \omega^2 \cos \alpha,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{d} \operatorname{tg} \alpha} = 2 \sqrt{\frac{gh}{d(D-d)}} = 2 \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 0{,}05}{0{,}1\,(0{,}2-0{,}1)}} = 14 \text{ rad/s};$$

$$n = \frac{30\,\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 14}{3{,}14} = 134 \text{ rot/min}.$$

13. Principiul lui Arhimede, plutirea corpurilor, areometrie

a. Considerații teoretice

1. Un corp cufundat într-un fluid este supus din toate părțile la presiuni exercitate de fluid.

2. Totalitatea forțelor exercitate de fluid dau o rezultantă unică F, care trece prin centrul de presiune (centrul de greutate al fluidului dezlocuit) și împinge corpul vertical de jos în sus. Mărimea forței F, numită și *forță arhimedică*, este egală cu greutatea fluidului dezlocuit

$$F = V \rho g$$

unde V este volumul corpului, ρ — densitatea fluidului, iar g — accelerația gravitației.

3. Corpul, de greutate G, coboară dacă $G > F$, plutește dacă $G = F$ și se ridică la suprafața fluidului dacă $G < F$,

4. Forța ascensională este diferența dintre forța arhimedică și greutatea corpului

$$R = F - G.$$

5. Aerometrele sînt aparate care servesc la determinarea densităților lichidelor mai grele sau mai ușoare decît apa, fără a le cîntări. Ele se bazează pe principiul lui Arhimede și sînt compuse din trei părți: tubul gradat, plutitorul și rezervorul, care le mențin în poziție verticală. Pentru lichidele mai grele decît apa, gradația zero se află la partea superioară a tubului, iar pentru cele mai ușoare decît apa, gradația zero se află la partea inferioară a tubului.

b. Probleme

2.26. Într-un vas cilindric avem apă și mercur; o sferă de fier, a cărei densitate $\rho = 7800$ kg/m³ se găsește în echilibru în interiorul vasului. Densitatea mercurului fiind 13 600 kg/m³, să se găsească raportul dintre volumul

Scanned with OKEN Scanner

V_1 al calotei sferice care se găsește în apă și volumul V_2 al calotei sferice care se găsește în mercur.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1940)

Rezolvare. Sfera plutind în interiorul lichidelor, rezultă

$$g(V_1 \rho_a + V_2 \rho_m) = \rho g (V_1 + V_2).$$

Din această ecuație scoatem

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_m - \rho}{\rho - \rho_a} = \frac{100(136 - 78)}{100(78 - 10)} = \frac{29}{34} = 0{,}85.$$

2.27. O sferă de aluminiu cu raza $r = 2$ cm și densitatea $\rho_1 = 2700$ kg/m³ plutește într-un bazin cu apă la înălțimea $h = 2{,}5$ m deasupra fundului bazinului. Sfera este ținută în această poziție de un balon, care plutește în aer, legat de sferă printr-un fir. Dacă neglijăm greutatea balonului și a firului și considerăm densitatea aerului, $\rho_2 = 1{,}3$ kg/m³, se cere:

a) Raza balonului și tensiunea în fir. b) În cît timp ajunge sfera la fundul rezervorului dacă tăiem firul și dacă nu se ține seama de rezistența hidrodinamică?

Rezolvare. a) Pentru ca sfera să stea în echilibru trebuie ca

$$\frac{4\pi r^3}{3} \rho_1 g = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_a g + \frac{4\pi R^3}{3} \rho_2 g.$$

Din această relație rezultă

$$R = r \sqrt[3]{\frac{\rho_1 - \rho_a}{\rho_2}} = 2 \cdot 10^{-2} \sqrt[3]{\frac{2700 - 1000}{1{,}3}} = 0{,}218 \text{ m} = 21{,}8 \text{ cm}.$$

Tensiunea în fir este

$$T = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \rho_2 g = \frac{12{,}56 \cdot 0{,}218^3}{3} \cdot 1{,}3 \cdot 9{,}8 = 0{,}553 \text{ N}.$$

b) Sfera are o mișcare uniform accelerată, cu accelerația dată de relația

$$\frac{4\pi r^3}{3} \rho_1 g - \frac{4\pi r^3}{3} \rho_a g = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_1 a.$$

Din această relație rezultă

$$a = \frac{\rho_1 - \rho_a}{\rho_1} g = \frac{2700 - 1000}{2700} \cdot 9{,}8 = 6{,}17 \text{ m/s}^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}5}{6{,}17}} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9 \text{ s}.$$

2.28. O plută este formată din doi cilindri, unul de lemn și altul de fier legați prin baza lor comună, de înălțimi $H = 20$ cm și $h = 1$ cm și de densități $\rho_1 = 600$ kg/m³ și $\rho_2 = 7800$ kg/m³.

Să se calculeze înălțimea plutei, vizibilă la suprafața apei.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1942)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Dacă S este aria bazei comune, iar g accelerația gravitației, greutatea plutei este

$$G = SHg\rho_1 + Shg\rho_2 = Sg(H\rho_1 + h\rho_2).$$

Pluta se așază în poziție verticală și dezlocuiește o coloană de apă de secțiune S și înălțime x, astfel încît se poate scrie relația

$$\rho_a Sxg = Sg(H\rho_1 + h\rho_2),$$

de unde rezultă

$$x = \frac{H\rho_1 + h\rho_2}{\rho_a} = \frac{0{,}2 \cdot 600 + 0{,}01 \cdot 7\,800}{1\,000} = 0{,}198 \text{ m} = 19{,}8 \text{ cm}.$$

Înălțimea vizibilă este

$$Z = H + h - x = 21 - 19{,}8 = 1{,}2 \text{ cm}.$$

2.29. Un aliaj de aur și de cupru cîntărește 2,943 N. Cufundat complet în apă, suferă o apăsare de jos în sus de 0,1962 N. Care este compoziția sa cantitativă, dacă densitățile aurului și cuprului sînt $\rho_1 = 19300$ kg/m³ și $\rho_2 = 8800$ kg/m³.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1942)

Rezolvare. Apăsarea de jos în sus reprezentînd forța arhimedică, putem scrie

$$F_a = V\rho_a g;\ V = \frac{F_a}{\rho_a g} = \frac{19{,}62 \cdot 10^{-2}}{10^3 \cdot 9{,}81} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Se mai pot scrie de asemenea relațiile

$$V = V_1 + V_2;\ G = G_1 + G_2;\ V\rho g = g(V_1\rho_1 + V_2\rho_2).$$

Ținînd seama că $G = V\rho g = 2{,}943$ N și făcînd calculele se obține: $V_1 = 11{,}81$ cm³, $V_2 = 8{,}19$ cm³, $G_1 = 2{,}236$ N și $G_2 = 0{,}707$ N.

2.30. O bucată de fier de 7,840 N cîntărește în apă 6,774 N. Știind că densitatea fierului este egală cu 7800 kg/m³, să se determine volumul golurilor de aer din bucata de fier.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1942)

Rezolvare. Conform principiului lui Arhimede, volumul corpului este

$$V = \frac{P - P'}{g\rho_a} = \frac{7{,}840 - 6{,}774}{9{,}8 \cdot 1\,000} = 108{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 108{,}8 \text{ cm}^3.$$

Volumul golurilor de aer V' este dat de relația

$$(V - V')\rho g = P,$$

$$V' = V - \frac{P}{\rho g} = 108{,}8 \cdot 10^{-6} - \frac{7{,}840}{7\,800 \cdot 9{,}8} = 6{,}24 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 6{,}24 \text{ cm}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.31. Două sfere cu densitățile $\rho_1 = 11{,}4 \cdot 10^3$ kg/m^3 și $\rho_2 = 1{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3 sînt suspendate fiecare de cîte unul dintre platanele unei balanțe hidrostatice și își fac echilibru în vid.

Dacă se cufundă prima sferă complet în apă, iar a doua o parte în apă și restul în aer, balanța este din nou în echilibru. Știind că în condiții normale 1 m^3 de aer cîntărește 1,3 kg, să se calculeze raportul dintre volumul porțiunii cufundate și volumul porțiunii rămase în aer la sfera a doua.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Dacă V_1 este volumul primei sfere, V_2 — volumul sferei a doua, V_2' și V_2'' volumele sferei a doua cufundate în apă și aer, $\rho_a = 10^3$ kg/m^3 — densitatea apei, $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m^3 — densitatea aerului, putem scrie pentru cele două experiențe

$$V_1 \rho_1 g = V_2 \rho_2 g = (V_2' + V_2'') \rho_2 g,$$

$$V_1 \rho_1 g - V_1 \rho_a g = V_2 \rho_2 g - (V_2' \rho_a + V_2'' \rho_0) g.$$

Făcînd calculele se obține $V_2'/V_2'' = 0{,}15$.

2.32. În mercurul dintr-un vas cilindric cu secțiunea $S = 10$ cm^2, plutește un corp cu secțiunea $s = 1$ cm^2, cufundîndu-se 2/3 din înălțimea sa $h = 45$ cm. Se toarnă apă în vas, astfel încît corpul să rămînă complet cufundat în cele două lichide. Cunoscînd densitățile mercurului și apei, $\rho_m = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3 și $\rho_a = 10^3$ kg/m^3, se cere:

a) Densitatea ρ_c a corpului. b) Pe ce înălțime rămîne corpul cufundat în mercur după turnarea apei. c) Volumele de mercur și de apă dezlocuite de corp. d) Cu cît coboară nivelul mercurului și apei în vas dacă scoatem corpul?

Rezolvare

a) $hs\rho_c g = \frac{2}{3} hs \rho_m g$, $\rho_c = \frac{2}{3} \cdot 13{,}6 = 9{,}06 \cdot 10^3$ kg/m^3.

b) $h's\rho_m g + (h - h')s\rho_a g = hs\rho_c g$,

$$h' = \frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_m - \rho_a} h = \frac{9{,}06 - 1}{13{,}6 - 1} \cdot 45 = 28{,}8 \text{ cm}.$$

c) $V_1 = h's = 28{,}8 \cdot 1 = 28{,}8$ cm^3,

$$V_2 = (h - h')s = (45 - 28{,}8) \cdot 1 = 16{,}2 \text{ cm}^3.$$

d) Dacă nivelul mercurului coboară cu a, iar al apei cu b, vom avea

$$V_1 = aS,\ h's = aS,\ a = \frac{s}{S} h' = \frac{h'}{10} = 2{,}88 \text{ cm},$$

$$V_1 + V_2 = bS,\ b = \frac{s}{S} h = \frac{h}{10} = \frac{45}{10} = 4{,}50 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Denivelarea absolută a apei este, $c = \frac{V_2}{S} = \frac{16,2}{10} = 1,62$ cm.

Făcînd verificarea, avem

$$b = a + c = 2,88 + 1,62 = 4,50 \text{ cm}.$$

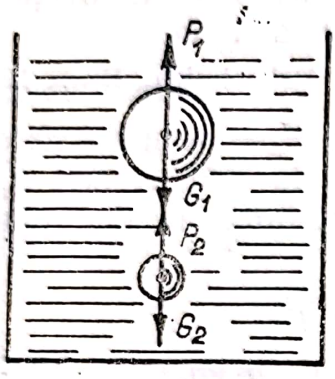


Fig. 102

2.33. O sferă de plută, de rază $r = 50$ cm și densitate $\rho_1 = 0,24 \cdot 10^3$ kg/m³, este legată de o sferă de plumb de rază x și densitate $\rho_2 = 11,35 \cdot 10^3$ kg/m³. Să se determine x știind că sistemul format de cele două sfere este în echilibru într-o baie de apă (fig. 102).

(Adm. Instit. Politehnic, Buc., 1945)

Rezolvare. Pentru echilibru, trebuie ca suma greutăților celor două sfere să fie egală cu suma forțelor arhimedice, adică

$$\frac{4\pi}{3} g (r^3 \rho_1 + x^3 \rho_2) = \frac{4\pi}{3} g \rho (r^3 + x^3),$$

unde ρ este densitatea lichidului.

Făcînd reducerile și înlocuirile, rezultă

$$x = \sqrt[3]{\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho}} = 50 \sqrt[3]{\frac{1 - 0,24}{11,35 - 1}} = 50 \sqrt[3]{0,0734} = 21 \text{ cm}.$$

2.34. Pentru indicarea drumului de intrare a vaselor în portul Constanța sînt așezate pe marginile lui geamanduri plutitoare executate din tablă cu densitatea 7850 kg/m³ fixate prin lanțuri de blocuri de beton așezate pe fundul mării. O asemenea geamandură este alcătuită dintr-o parte cilindrică și două părți conice la capete, cu dimensiunile în metri, indicate în fig. 103. Grosimea tablei este de 3 mm. Lanțul care o fixează are 10 m lungime și stă întins cînd marea este liniștită. Greutatea lui este de 490 N. Să se determine:

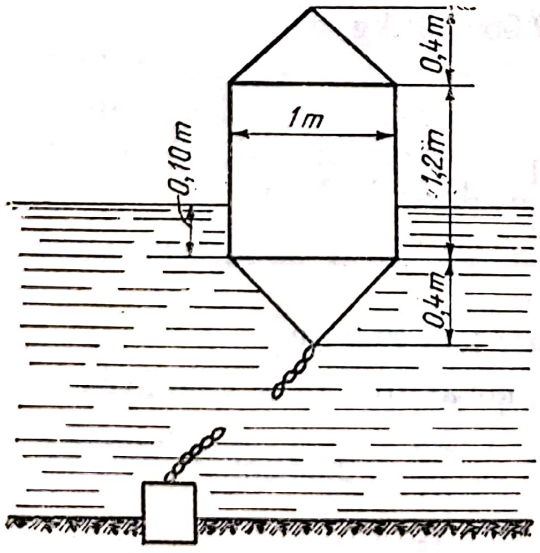


Fig. 103

a) Linia de plutire a geamandurii.
b) Forța de întindere a lanțului cînd marea face valuri care acoperă complet geamandura. c) Dimensiunile blocului

Scanned with OKEN Scanner

de beton presupus cubic, de care este ancorată geamandura, dacă densitatea betonului este 2200 kg/m³, iar densitatea apei de mare este de 1030 kg/m³.

Rezolvare. a) Suprafața laterală a geamandurii este

$$S = \pi \cdot 1 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}4^2} = 5{,}78 \text{ m}^2,$$

iar greutatea acesteia este

$$G = Sd\rho g = 5{,}78 \cdot 0{,}003 \cdot 7\,850 \cdot 9{,}8 = 1\,334 \text{ N}.$$

Dacă G' este greutatea lanțului, forța care trage geamandura în jos, este

$$P = G + G' = 1\,334 + 490 = 1\,824 \text{ N}.$$

Greutatea apei dezlocuite de partea conică de jos a geamandurii (forța arhimedică) este

$$F_1 = \frac{\pi D^2 h}{12} \cdot \rho_a g = \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 0{,}40}{12} \cdot 1\,039 \cdot 9{,}8 = 1\,056 \text{ N}.$$

Întrucît $F_1 < P$, rezultă că linia de plutire este deasupra liniei de îmbinare a părții conice de jos cu partea cilindrică și poziția ei se obține din ecuația

$$F_1 + \frac{\pi D^2}{4} \cdot x \cdot \rho_a g = P, \quad 1\,056 + \frac{3{,}14 \cdot 1}{4} x \cdot 1\,030 \cdot 9{,}8 = 1\,824,$$

$$x = 0{,}10 \text{ m}.$$

b) Calculînd volumul geamandurii, obținem $V = 1{,}1519$ m³. Forța de întindere a lanțului reprezintă diferența dintre forța arhimedică și greutatea care o trage în jos cînd geamandura este complet acoperită de apă, adică

$$T = V\rho_a g - P = 1{,}1\,519 \cdot 1\,030 \cdot 9{,}8 - 1\,824 = 9\,803 \text{ N}.$$

c) Dacă a este latura blocului de beton, greutatea sa aparentă este

$$G' = 9{,}8\,(2\,200\,a^3 - 1\,030\,a^3) = 11\,466\,a^3.$$

Pentru ca blocul să nu fie smuls de tracțiunea lanțului, trebuie ca

$$G' \geqslant T, \quad 11\,466\,a^3 \geqslant 9\,803, \quad a \geqslant 0{,}95 \text{ m}.$$

2.35. O sferă de ceară și o bucată de platină își fac echilibru în platanele unei balanțe de precizie. Să se calculeze raportul volumelor celor două corpuri, ținînd seamă de legea lui Arhimede în aer. Densitatea cerii este $0{,}96 \cdot 10^3$ kg/m³, a platinei $21 \cdot 10^3$ kg/m³, iar a aerului $0{,}0013 \cdot 10^3$ kg/m³.

Rezolvare. Scriem că greutatea în vid a sferei de ceară, micșorată cu forța arhimedică a aerului și, greutatea în vid a platinei, micșorată cu forța arhimedică a aerului sînt egale:

$$10^3 g\,(0{,}96\,V - 0{,}0013\,V) = (21\,V' - 0{,}0013\,V')\,10^3 g, \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde V și V' sînt volumele sferei de ceară, respectiv a bucății de platină.

Din relația (1) rezultă

$$\frac{V}{V'} = \frac{21 - 0{,}0013}{0{,}96 - 0{,}0013} = 21{,}9.$$

2.36. Un corp cîntărește în aer $148{,}131 \cdot 10^{-3}$ N, în apă $101{,}4354 \cdot 10^{-3}$ N și într-un alt lichid $124{,}587 \cdot 10^{-3}$ N. Să se calculeze densitatea corpului și a lichidului în care corpul a fost cufundat a doua oară.

Rezolvare. Pierderea de greutate a corpului în apă este

$$G = 10^{-3}(148{,}131 - 101{,}4354) = 46{,}6956 \cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

Volumul corpului este

$$V = \frac{G}{\rho_a g} = \frac{46{,}6956 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 9{,}81} = 4{,}76 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3 = 4{,}76\ \text{cm}^3.$$

Densitatea corpului este

$$\rho = \frac{G}{Vg} = \frac{148{,}131 \cdot 10^{-3}}{4{,}76 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}81} = 3172\ \text{kg/m}^3.$$

Pierderea de greutate a corpului în al doilea lichid este

$$G' = 10^{-3}(148{,}131 - 124{,}587) = 23{,}544 \cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

Densitatea acestui lichid este

$$\rho' = \frac{G'}{Vg} = \frac{23{,}244 \cdot 10^{-3}}{4{,}76 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}81} = 504\ \text{kg/m}^3.$$

2.37. Într-un cilindru A cu înălțimea h și diametrul d, se găsește alcool de densitate ρ_1 ocupînd un sfert din înălțime. Acest cilindru este introdus în altul B cu diametru mai mare și cu înălțimea practic egală cu a lui A. Turnînd apă în cilindrul B pînă la jumătate, apăsarea lui A asupra lui B dispare, fără ca A să se ridice.

În cilindrul A introducem o bilă metalică de rază r și densitate ρ_2, iar în B turnăm din nou apă. Cînd cilindrul B se umple, apăsarea lui A dispare din nou. Se cere:

a) Greutatea cilindrului A, gol. b) Densitatea sferei de metal.

(R.F.Ch., nr. 4/1967)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Dacă ρ_0 este densitatea apei, forța arhimedică echilibrează greutatea G_1 a cilindrului A și greutatea alcoolului, adică

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{h}{2} \rho_0 g = G_1 + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{h}{4} \rho_1 g,$$

$$G_1 = \frac{\pi d^2 h\, g}{16} (2\rho_0 - \rho_1).$$

b) Surplusul forței arhimedice echilibrează greutatea bilei

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{h}{2} \rho_0 g = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_2 g, \quad \rho_2 = \frac{3\, d^2 h}{32\, r^3} \rho_0.$$

2.38. Un termometru cu mercur cîntărește $19{,}620 \cdot 10^{-3}$ N; cufundat complet în apă el nu mai cîntărește decît $14{,}715 \cdot 10^{-3}$ N. Să se calculeze greutatea mercurului din termometru știind că densitatea sticlei este $2{,}5 \cdot 10^3$ kg/m³, iar a mercurului $13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³ și că mercurul umple complet tubul.

Rezolvare. Volumul tubului sau volumul apei dezlocuite este

$$V = \frac{G_1 - G_2}{\rho_a g} = \frac{10^{-3}(19{,}620 - 14{,}715)}{10^3 \cdot 9{,}8} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Volumul interior al tubului sau volumul ocupat de mercur este dat de relația

$$(V - V_m)\, \rho_s g + V_m \rho_m g = G_1.$$

$$V_m = \frac{G_1 - V \rho_s g}{g(\rho_m - \rho_s)} = \frac{19{,}620 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8}{9{,}8 \cdot 10^3 (13{,}6 - 2{,}5)} = 6{,}75 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3,$$

$$G_m = V_m \rho_m g = 6{,}75 \cdot 10^{-7} \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 = 90{,}05 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

2.39. Un vas cilindric A (fig. 104), de secțiune S, conține un lichid de densitate ρ_1. În acest vas se introduce un alt vas cilindric B de greutate neglijabilă, cu secțiunea s conținînd un lichid de densitate ρ_2 și care plutește. Nivelul lichidului din vasul A se ridică în acest caz cu a centimetri.

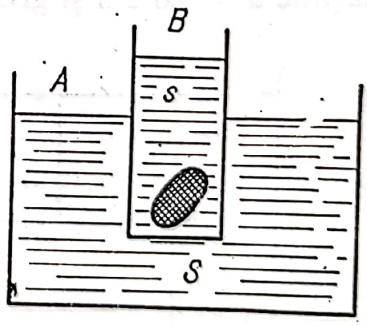


Fig. 104

Introducem apoi complet în vasul B un corp solid de masă M care ridică nivelul lichidului din acest vas cu b centimetri. Se cere să se calculeze:

a) Înălțimea lichidului din vasul B. b) Densitatea corpului solid introdus. c) Cu cît se va ridica nivelul lichidului din A după introducerea greutății M, față de nivelul său inițial și cu cît se cufundă B în A?

Aplicație: $a = 2$ cm; $S = 50$ cm²; $\rho_1 = 1{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³; $s = 10$ cm²; $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ kg/m³; $b = 5$ cm, $M = 340$ g.

Rezolvare. a) Să notăm cu h înălțimea lichidului din vasul B. După principiul lui Arhimede avem

$$a(S-s)\rho_1 g = shg\rho_2$$

de unde rezultă

$$h = \frac{a(S-s)\rho_1}{s\rho_2} = \frac{2\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-4}\ (50-10)\cdot 1{,}6\cdot 10^3}{10\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}8\cdot 10^3} = 0{,}16\ \text{m}.$$

b) Volumul corpului solid va fi

$$V = sb = 5\cdot 10 = 50\ \text{cm}^3 = 5\cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$$

iar densitatea lui

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{340\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-5}} = 6{,}8\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3.$$

c) Fie x înălțimea cu care se ridică nivelul lichidului din A. După principiul lui Arhimede, avem

$$x(S-s)\rho_1 g = Mg + shg\rho_2$$

de unde rezultă

$$x = \frac{M + sh\rho_2}{(S-s)\rho_1} = \frac{(340+128)\,10^{-2}}{64} = \frac{4{,}68}{64} = 0{,}073\ \text{m} = 7{,}3\ \text{cm}.$$

Vasul B se va cufunda în A pe o înălțime

$$h' = \frac{M + sh\rho_2}{s\rho_1} = 29{,}2\ \text{cm}.$$

2.40. O punte plutitoare este formată dintr-o scîndură de lungime $l_1 = 2$ m, lățime $a = 20$ cm și grosime $e = 4$ cm, care se reazemă pe două grinzi de lemn A și B (fig. 105). Grinda A are secțiunea un pătrat de latură $b = 20$ cm și lungimea $l_2 = 1$ m, iar grinda B tot cu secțiunea un pătrat, are latura $b' = 40$ cm și lungimea egală cu a grinzii A. Densitatea lemnului din care sînt confecționate grinzile și scîndura este $\rho = 500$ kg/m³. La ce distanță x față de axa de simetrie longitudinală a grinzii A trebuie

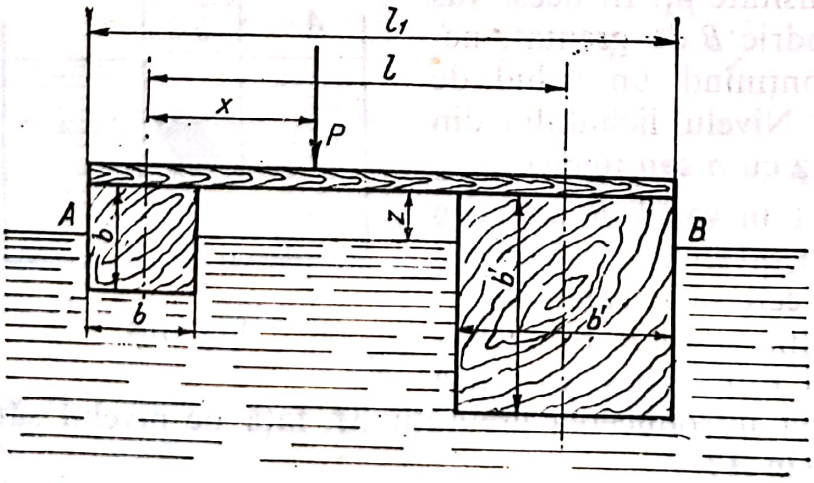


Fig. 105

încărcată puntea cu sarcina $P = 666{,}4$ N, astfel încît să plutească în poziție orizontală. Să se calculeze de asemenea distanța z dintre punte și nivelul apei.

Rezolvare. Distanța dintre axele verticale ale grinzilor este

$$l = l_1 - \frac{b}{2} - \frac{b'}{2} = 2 - 0{,}10 - 0{,}20 = 1{,}70 \text{ m}.$$

Greutatea scîndurii este

$$G = l_1 \, ae \, \rho g = 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}04 \cdot 500 \cdot 9{,}8 = 78{,}4 \text{ N}.$$

Asupra fiecărei grinzi A și B va acționa cîte o forță $G_1 = G_1' = \frac{G}{2} =$ $= 39{,}2$ N.

Greutatea grinzii A este

$$G_2 = b^2 \cdot l_2 \, \rho g = 0{,}04 \cdot 1 \cdot 500 \cdot 9{,}8 = 196 \text{ N}.$$

Greutatea grinzii B este

$$G_2' = b'^2 \, l_2 \, \rho g = 0{,}16 \cdot 1 \cdot 500 \cdot 9{,}8 = 784 \text{ N}.$$

Asupra grinzii A acționează, de asemenea, componenta sarcinii P:

$$P_1 = \frac{l - x}{l} P = \frac{1{,}7 - x}{1{,}7} \cdot 666{,}4 = 392 \ (1{,}7 - x),$$

iar asupra grinzii B acționează componenta

$$P_1' = \frac{x}{l} P = \frac{x}{1{,}7} \cdot 666{,}4 = 392 \, x.$$

Grinda A se cufundă în apă pe înălțimea $b - z$, iar grinda B se cufundă pe înălțimea $b' - z$.

Conform principiului lui Arhimede și ținînd seamă că densitatea apei este $\rho_a = 1000$ kg/m³, putem scrie pentru fiecare grindă în parte

$$G_1 + G_2 + P_1 = b \, (b - z) \, l_2 \rho_a g, \tag{1}$$

$$G_1' + G_2' + P_1' = b' (b' - z) \, l_2 \rho_a g. \tag{2}$$

Făcînd înlocuirile obținem

$$x - 5z = 1{,}3, \tag{3}$$

$$x + 10z = 1{,}9. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuațiile (3) și (4) rezultă

$$x = 1{,}5 \text{ m și } z = 4 \text{ cm}.$$

2.41. O bilă de plumb de rază r este lăsată să cadă liber în apă într-un bazin adînc de 5 m. Aceeași bilă este lăsată să cadă liber de la înălțimea de 2 m deasupra bazinului. Care este timpul necesar pentru a ajunge la fundul bazinului în primul și în al doilea caz? Se neglijează rezistența aerului și frecările corpului cu lichidul. Densitatea plumbului $\rho = 11\,250$ kg/m³. Experiența se face în București.

(G.M.F., nr. 4/1956)

Rezolvare. Forța care produce mișcarea bilei prin apă este:

$$F = \frac{4\pi r^3}{3}\rho g - \frac{4\pi r^3}{3}\rho_a g = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_a \cdot$$

Făcînd simplificările și ținînd seamă că $\rho_a = 1000$ kg/m³, iar $g = 9{,}81$ m/s², se obține

$$a = g \cdot \frac{\rho - \rho_a}{\rho} = 9{,}81 \cdot \frac{11\,250 - 1000}{11\,250} = 8{,}94 \text{ m/s}^2,$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{8{,}94}} = \sqrt{\frac{1}{8{,}94}} = \sqrt{1{,}12} = 1{,}06 \text{ s}.$$

În experiența a doua, bila ajunge la suprafața apei cu viteza inițială

$$v_0 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2} = 6{,}26 \text{ m/s}.$$

Bila avînd o mișcare uniform accelerată în interiorul lichidului, putem scrie

$$h_1 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 \cdot$$

Făcînd înlocuirile obținem ecuația

$$4{,}47\, t_2^2 + 6{,}26\, t_2 - 5 = 0.$$

Rezolvînd această ecuație se obține $t_2 = 0{,}57$ s.

2.42. O sferă cu densitate $\rho = 600$ kg/m³ cade de la înălțimea $H = 12$ m deasupra unei ape liniștite. Să se calculeze pînă la ce adîncime x va pătrunde sfera în apă?

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Sfera ajunge la suprafața apei cu viteza $v_0 = \sqrt{2gH}$. Viteza sferei la oprire fiind egală cu zero, avem

$$v = v_0 - \sqrt{2ax} = 0, \quad x = \frac{gH}{a}.$$

Dacă V este volumul sferei, iar ρ_a densitatea apei, avem

$$V\rho_a g - V\rho g = V\rho a, \quad a = \frac{\rho_a - \rho}{\rho} \cdot g,$$

$$x = \frac{\rho}{\rho_a - \rho} H = \frac{600}{1000 - 600} \cdot 12 = 18 \text{ m}.$$

2.43. Plutitorul T al unul carburator cu esență (fig. 106) are forma cilindrică cu secțiunea de 10 cm² și cu înălțimea de 6 cm. a) Să se calculeze greutatea acestui plutitor, astfel încît să poată pluti în esență cufundat pe 2/3 din înălțimea sa, densitatea esenței, $\rho = 0{,}7 \cdot 10^3$ kg/m³. b) Nivelul esenței din vasul V coborîndu-se, plutitorul cufundat numai pe 1/2 din înălțimea sa, apasă asupra levierului L, care ridică tija P de aramă cu densitatea $\rho' = 8{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³ deschizînd astfel orificiul de pătrundere a esenței în vas. Raportul brațelor celor două leviere este egal cu 1/4. Să se calculeze greutatea tijei P pe care o considerăm cufundată în lichid pe o porțiune de 4/5 din înălțimea sa.

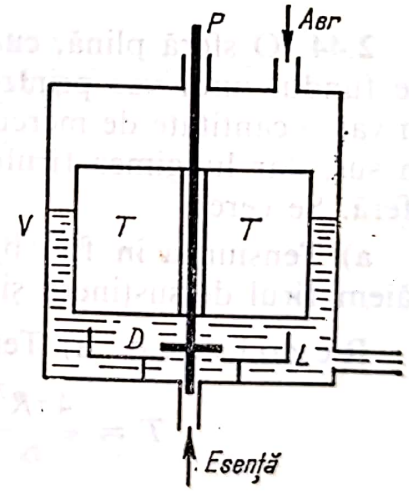


Fig. 106

Rezolvare. a) După legea lui Arhimede, greutatea plutitorului G este egală cu greutatea volumului de esență dezlocuit, adică

$$G = \frac{2}{3} Sh\rho g = \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}7 \times$$

$$\times 10^3 \cdot 9{,}81 = 27{,}468 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

b) Cînd flotorul rămîne pe jumătate cufundat în esență, greutatea esenței dezlocuite este egală cu $20{,}601 \cdot 10^{-2}$ N, iar greutatea aparentă a plutitorului este

$$G' = 10^{-2}(27{,}468 - 20{,}601) = 6{,}867 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

În acest caz plutitorul vine în contact cu levierele apăsînd asupra fiecăruia cu $G'/2 = 3{,}4335 \cdot 10^{-2}$ N.

Scanned with OKEN Scanner

La rîndul lor, levierele apasă asupra discului D al tijei P săltînd-o de pe locașul ei și dînd drumul esenței în carburator.

Forța cu care este împins în sus de fiecare levier, se obține din relația

$$\frac{3{,}4335 \cdot 10^{-2}}{F} = \frac{1}{4}, \quad F = 13{,}734 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

Ambele leviere vor apăsa asupra discului tijei cu forța

$$R = 2F = 2 \cdot 13{,}734 \cdot 10^{-2} = 27{,}468 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

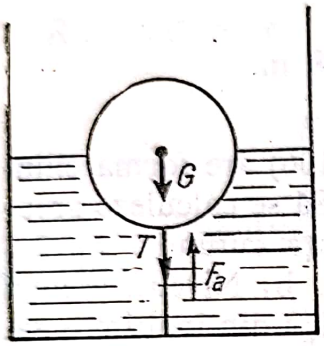


Fig. 107

Pentru ca tija să poată deschide orificiul de intrare a esenței trebuie ca greutatea ei aparentă să fie egală cu forța R:

$$P - \frac{4}{5} \cdot \frac{P}{\rho'} \cdot \rho = R,$$

$$P = \frac{5\rho'}{5\rho' - 4\rho} \cdot R = \frac{5 \cdot 8{,}6}{5 \cdot 8{,}6 - 4 \cdot 0{,}7} \cdot$$

$$\cdot 27{,}468 \cdot 10^{-2} = 29{,}391 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

2.44. O sferă plină, cu raza $R = 4$ cm și masa $m = 1{,}152$ kg este legată de fundul unui vas printr-un fir de greutate neglijabilă (fig. 107). Turnînd în vas o cantitate de mercur cu densitatea $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3, sfera se ridică în sus, dar lungimea firului nu permite să iasă din lichid decît jumătate de sferă. Se cere:

a) Tensiunea în fir. b) Ce poziție va ocupa sfera în lichid atunci cînd tăiem firul de susținere și se stabilește echilibrul.

Rezolvare. a) Tensiunea în fir avînd sensul lui G este

$$T = \frac{4\pi R^3}{6}\rho g - mg = g\left(\frac{2\pi R^3}{3}\rho - m\right) =$$

$$= 9{,}8\left(\frac{6{,}28 \cdot 64 \cdot 10^{-6}}{3} \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 - 1{,}152\right) \approx 6{,}6 \text{ N}.$$

b) Greutatea calotei sferice de lichid dezlocuit este

$$P' = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)\rho g.$$

Pentru plutire, va trebui să avem

$$\frac{\pi h^2}{3}(3R - h)\rho g = mg.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din această relație rezultă

$$h^3 - 12h^2 + 81 = 0, \quad h = 3 \text{ cm}.$$

2.45. Un corp cu masa m și densitatea ρ este susținut în interiorul unui lichid de densitate ρ' cu ajutorul unei sfori de greutate neglijabilă, trecută peste un scripete fix O. Capătul liber al sforii este legat de pîrghia ACB, care se rotește în jurul punctului C (fig. 108). Sfoara face cu orizontala un unghi $\alpha = 30°$.

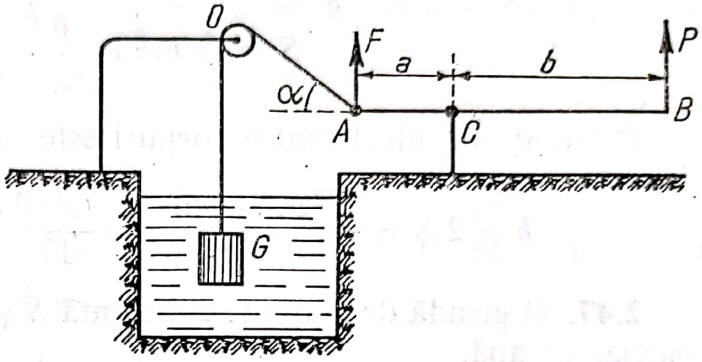


Fig. 108

Cu ce forță P trebuie să ridicăm capătul B al pîrghiei pentru ca aceasta să rămînă în poziție orizontală? Brațul $CA = a$ și $CB = b$.

Aplicație: $m = 15{,}6$ kg; $\rho = 7800$ kg/m³; $\rho' = 1000$ kg/m³: $CA = a = 0{,}2$ m; $CB = b = 0{,}8$ m.

Rezolvare. Tensiunea în fir este

$$T = mg\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right) = 15{,}6 \cdot 9{,}8\left(1 - \frac{1000}{7800}\right) = 133{,}46 \text{ N}.$$

Componenta verticală F a forței T este

$$F = T \sin \alpha = 133{,}46 \sin 30° = 66{,}73 \text{ N}.$$

Valoarea lui P rezultă din relația

$$\frac{F}{P} = \frac{CB}{CA} = \frac{b}{a}, \quad P = \frac{a}{b}F = 16{,}7 \text{ N}.$$

2.46. În două vase A și B unite printr-un perete comun se află două corpuri cu greutăți și densități egale, G și ρ, legate între ele printr-un fir de greutate neglijabilă, trecut peste doi scripeți ficși. Greutățile se află la același nivel. În A se toarnă un lichid de densitate ρ_1, iar în B se toarnă un lichid de densitate $\rho_2 < \rho_1$. Cele două greutăți se pun în mișcare și greutatea din vasul B ajunge la fundul vasului în timp de o secundă.

Care este diferența de nivel dintre cele două corpuri, neglijînd frecările.

Aplicație : $\rho = 8{,}5 \cdot 10^3$ kg/m³; $\rho_1 = 10^3$ kg/m³; $\rho_2 = 0{,}8$ kg/m³.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Accelerația mișcării se află din relația

$$G\left(1-\frac{\rho_2}{\rho}\right)-G\left(1-\frac{\rho_1}{\rho}\right)=\frac{2G}{g}a\,;\quad a=\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{2\rho}.$$

Spațiul străbătut de corpuri este

$$S=\frac{1}{2}at^2=\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{4\rho}.$$

Diferența de nivel dintre corpuri este

$$h=2S=\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{2\rho}=\frac{9{,}8\cdot 0{,}2}{17}=0{,}115\ \text{m}=11{,}5\ \text{cm}.$$

2.47. O grindă de secțiune constantă S și de lungime $2l$ plutește cufundată parțial în apă.

Capătul A este complet cufundat, iar capătul B este suspendat de o sfoară (fig. 109). Densitatea grinzii fiind egală cu ρ, se cere:

a) Lungimea de grindă cufundată în apă. b) Tensiunea în sfoara de susținere. c) Forța arhimedică aplicată grinzii.

Aplicație: $2l=2$ m; $S=0{,}01$ m^2; $\rho=600$ kg/m^3.

Rezolvare. a) Greutatea grinzii este

$$G=2Sl\rho g=2\cdot 0{,}01\cdot 1\cdot 600\cdot 9{,}8=117{,}6\ \text{N}$$

și este aplicată la mijlocul O al grinzii. Forța arhimedică a apei este

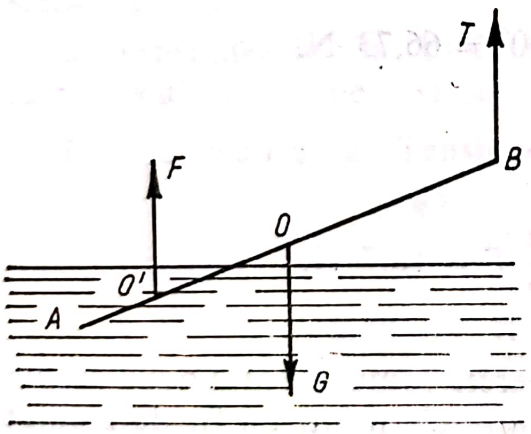


Fig. 109

$$F=xS\rho_a g=98\,x,$$

unde x este porțiunea cufundată în apă, iar $\rho_a=1000$ kg/m^3 este densitatea apei.

Punctul de aplicație O' al forței F (centrul de presiune) se află la jumătatea distanței x. Forțele G, F și tensiunea T în sfoară fiind paralele, avem

$$T=G-F=117{,}6-98\,x=19{,}6\,(6-5\,x),$$

$$\frac{T}{F}=\frac{OO'}{OB},\quad \frac{6-5x}{5x}=\frac{2-x}{2},$$

$$5x^2-20x+12=0,\quad x=0{,}736\ \text{m}.$$

b) $T=19{,}6\,(6-5x)=19{,}6\cdot 2{,}32=45{,}47$ N.

c) $F=98\cdot 0{,}736=72{,}13$ N.

Scanned with OKEN Scanner

2.48. Un densimetru se cufundă în benzină pentru avioane, cu densitatea $\rho_1 = 0{,}715 \cdot 10^3$ kg/m^3 pînă la diviziunea a_1, iar în benzină grea cu densitatea $\rho_2 = 0{,}760 \cdot 10^3$ kg/m^3 pînă la diviziunea a_2. Să se calculeze densitatea ρ a unei benzine pentru automobile știind că în ea densimetrul se cufundă pînă la diviziunea a și că $a_2 - a = a - a_1$.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1942)

Rezolvare. Fie V volumul părții inferioare a densimetrului pînă la diviziunea a_2 iar G greutatea întregului aparat.

După principiul lui Arhimede, avem

$$G = V\rho_2 g. \tag{1}$$

Fie l distanța $a_2 - a$, și S secțiunea tubului gradat. Cînd densimetrul este cufundat în benzina de densitate ρ, volumul dezlocuit este egal cu $V + lS$ și, conform principiului lui Arhimede, avem

$$G = (V + lS)\,\rho g. \tag{2}$$

Dacă notăm cu l_1 distanța $a_2 - a_1$ (gradația începe de la partea superioară a tubului), vom avea pentru benzina de densitate ρ_1

$$G = (V + l_1 S)\,\rho_1 g. \tag{3}$$

Din cele trei ecuații (1), (2) și (3) obținem

$$\rho = \frac{l_1\rho_1\rho_2}{l_1\rho_1 + l(\rho_2 - \rho_1)}. \tag{4}$$

Din datele problemei rezultă că $l_1 = 2l$, iar din (4) deducem

$$\rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{2 \cdot 0{,}715 \cdot 0{,}760 \cdot 10^3}{0{,}715 + 0{,}760} = 0{,}7368 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

2.49. Un areometru marchează 0° în apă, 66° în acid sulfuric de densitate $1{,}84 \cdot 10^3$ kg/m^3 și 43° în acid azotic.

Care este densitatea acidului azotic?

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944

Rezolvare. Fie V volumul total al aparatului v volumul unei diviziuni de pe tijă și P greutatea areometrului.

Cînd cufundăm aparatul în apă, avem

$$10^3 Vg = \quad . \tag{1}$$

Cufundînd aparatul în acid sulfuric, avem

$$1{,}84 \cdot 10^3 g\,(V - 66\,v) = P. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cînd cufundăm aparatul în acid azotic, de densitate x, avem

$$x(V - 43\,v)\,g = P. \tag{3}$$

Din (1), (2) și (3) obținem $x = 1{,}42 \cdot 10^3$ kg/m³.

2.50. Învelișul, nacela și celelalte accesorii ale unui aerostat cîntăresc împreună 980 N. Aerostatul este umplut cu hidrogen a cărui densitate este de 0,090 kg/m³.

La părăsirea terenului, aerostatul are o forță ascensională egală cu 98 N. Știind că densitatea aerului la suprafața pămîntului este egală cu 1,3 kg/m³, se cere:

a) Volumul aerostatului. b) Pînă la ce înălțime se poate ridica aerostatul, admițînd că la fiecare 10 m înălțime presiunea aerului scade cu 1 mm coloană de mercur, iar presiunea atmosferică la sol este de 760 mm coloană de mercur

Rezolvare. a) Dacă P este greutatea aerului dezlocuit, iar G și V greutatea și volumul aerostatului, forța ascensională este

$$F = P - G = 1{,}3\,Vg - (980 + 0{,}09\,Vg),$$

$$V = \frac{F + 980}{9{,}8 \cdot 1{,}21} = \frac{1078}{11{,}856} = 90{,}91 \text{ m}^3 \cdot$$

b) La înălțimea la care se ridică aerostatul avem

$$G = V\rho g, \quad \rho = \frac{G}{Vg} = \frac{1000}{90{,}91 \cdot 9{,}8} = 1{,}19 \text{ kg/m}^3 \cdot$$

Între presiunile și densitățile aerului la înălțimea x și la sol, există relația

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \frac{760 - 0{,}01\,x}{760} = \frac{1{,}19}{1{,}3}, \quad x = 643 \text{ m}.$$

2.51. Un vas deschis, cu gura în sus, este plin cu bioxid de carbon a cărui densitate în raport cu aerul este 1,52. Se lasă să cadă în acest vas un balon de cauciuc cu aer. Capacitatea balonului este de 2 l și învelișul cîntărește o jumătate de gram.

Dacă densitatea aerului este de 1,293 kg/m³, se cere:

a) Raportul dintre volumul părții cufundate în bioxidul de carbon și volumul întreg al balonului. b) În ce raport de volum, trebuie amestecat cu aer, bioxidul de carbon din vas, pentru ca balonul să plutească în interiorul amestecului?

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1946)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Densitatea absolută a bioxidului de carbon este $1{,}52 \cdot 1{,}293 = 1{,}97$ kg/m³, iar masa totală a balonului, $m = 3{,}086 \cdot 10^{-3}$ kg. Dacă v și $V - v$ sînt volumele cufundate în bioxid de carbon și în aer, avem

$$1{,}97\, vg + 1{,}293\,(V - v)\, g = mg.$$

Din această relație se obține $\frac{v}{V} = \frac{37}{100}$.

b) În 100 m³ de amestec avem x metri cubi bioxid de carbon și $(100 - x)$ metri cubi de aer.

Densitatea amestecului este dată de relația

$$100\,\rho = 1{,}97\, x + 1{,}293\,(100 - x)\,; \quad \rho = 1{,}293 + \frac{0{,}667\, x}{100}.$$

Pentru plutire în amestecul de gaze, trebuie ca $V\rho g = mg$.

Făcînd înlocuirile obținem $x = 36{,}9$ m³ bioxid de carbon și 63,1 m³ aer.

2.52. O grindă de lemn cu densitatea $\rho = 700$ kg/m³, cu lungimea $l = 2$ m, lățimea $b = 0{,}30$ m și cu grosimea $h = 0{,}15$ m, este ținută în poziție orizontală la adîncimea de 2 m într-un bazin plin cu apă. La un moment dat, grinda este lăsată liberă. Se cere:

a) Forța necesară pentru menținerea grinzii la 2 m sub apă. b) Timpul în care grinda se ridică la suprafața apei, făcînd abstracție de rezistența apei la mișcarea grinzii. c) Înălțimea porțiunii cufundate, grinda plutind orizontal și avînd una dintre fețele mari în jos. Se consideră $g = 10$ m/s².

(Adm. Instit. Politehnic, Brașov, 1963)

Rezolvare. a) Forța căutată este egală cu forța arhimedică minus greutatea grinzii

$$F = F_a - G = \rho_a\, lbhg - \rho l\, bhg = lbhg\,(\rho_a - \rho) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}15 \cdot 10 \cdot (1000 - 700) = 270 \text{ N}.$$

b) Accelerația mișcării se deduce din relația

$$lbh\rho a = lbhg\,(\rho_a - \rho),$$

$$a = g \cdot \frac{\rho_a - \rho}{\rho} = 10 \cdot \frac{1000 - 700}{700} \approx 4{,}3 \text{ m/s}^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{4{,}3}} = \sqrt{\frac{4}{4{,}3}} \approx 1 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă x este înălțimea porțiunii cufundate, se poate scrie

$$\rho_a \, l \, bxg = \rho \, l \, bhg,$$

$$x = \frac{\rho}{\rho_a} \cdot h = \frac{700}{1\,000} \cdot 0{,}15 = 0{,}105 \text{ m} = 10{,}5 \text{ cm}.$$

2.53. O sferă goală de aluminiu, cu pereții groși, cîntărește 6,75 kg. Cavitatea din interior are capacitatea de 5 l. Se cere:

a) Forța de apăsare de jos în sus (forța arhimedică) care acționează asupra sferei cufundate în apă. b) Forța rezultantă (ascensională) care se exercită asupra sferei cufundată în apă (se va face abstracție de greutatea aerului din interior). c) Timpul în care sfera, lăsată liberă, se urcă pînă la suprafața apei de la adîncimea de 8 m, făcînd abstracție de rezistența opusă de apă. Densitatea aluminiului: $\rho = 2700$ kg/m³. Se neglijează rezistența prin frecare.

(Adm. Instit. Politehnic, Timișoara, 1959)

Rezolvare.

a) $$F_a = \left(V_g + \frac{m}{\rho}\right) \rho_0 \, g = \left(0{,}005 + \frac{6{,}75}{2\,700}\right) \cdot 1\,000 \cdot 9{,}8 =$$

$$= \left(5 + \frac{6{,}75}{2{,}7}\right) 9{,}8 = 7{,}5 \cdot 9{,}8 = 73{,}5 \text{ N}.$$

b) $F = F_a - G = 73{,}500 - 6{,}75 \cdot 9{,}8 = 73{,}500 - 66{,}150 = 7{,}35$ N.

c) Accelerația mișcării sferei sub apă este

$$a = \frac{F}{m} = \frac{7{,}350}{6{,}750} \approx 1{,}09 \text{ m/s}^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{16}{1{,}09}} = \sqrt{14{,}7} = 3{,}83 \text{ s}.$$

Viteza cu care ajunge la suprafața apei

$$v_0 = \frac{a}{t} = \frac{1{,}09}{3{,}83} = 0{,}284 \text{ m/s}.$$

Sfera se va ridica deasupra apei la înălțimea

$$h' = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{0{,}284^2}{19{,}6} = \frac{0{,}0806}{19{,}6} = 0{,}0041 \text{ m} = 4{,}1 \text{ mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.54. Un dop de plută astupă provizoriu orificiul lateral al unui vas plin cu petrol, şi se află la 2,5 m de suprafaţa liberă a lichidului. La înlocuirea dopului acesta a fost împins înăuntru ridicîndu-se prin petrol la suprafaţă. Cunoscînd densitatea petrolului $\rho_1 = 800$ kg/m³, iar densitatea piuţei $\rho_2 = 240$ kg/m³, se cere:

a) Presiunea minimă necesară împingerii dopului înăuntru. b) Acceleraţia dopului în timpul ieşirii lui la suprafaţă. c) Viteza dopului la ieşirea din petrol. d) Înălţimea la care se va ridica dopul deasupra petrolului. Se vor neglija frecările faţă de lichid şi aer.

(R.F.Ch., nr. 6/1965)

Rezolvare

a) $p = \rho_1 gh = 800 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}5 = 19\,600$ N/m².

b) Forţa care acţionează asupra dopului, în interiorul lichidului, este egală cu

$$F = \frac{m}{\rho_2} \cdot \rho_1 g - mg = mg \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}.$$

Din legea lui Newton rezultă

$$a = \frac{F}{m} = g \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} = 9{,}8 \cdot \frac{800 - 240}{240} = 9{,}8 \cdot \frac{560}{240} = 22{,}8 \text{ m/s}^2.$$

c) $v_0 = \sqrt{2aS} = \sqrt{2 \cdot 22{,}8 \cdot 2{,}5} = \sqrt{114} \approx 10{,}7$ m/s.

d) $h' = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{114}{19{,}6} = 5{,}8$ m.

2.55. Un buştean cilindric pluteşte pe apă astfel încît partea ieşită la suprafaţa apei are secţiunea unui segment de cerc a cărei înălţime este egală cu jumătate din raza cilindrului (fig. 110). Să se calculeze densitatea buşteanului ştiind că densitatea apei $\rho_0 = 1000$ kg/m³.

(R.F.Ch., nr. 10/1965)

Rezolvare. Din examinarea fig. 110 se vede uşor că $\sphericalangle AOB = 120°$, iar unghiul sectorului mare de cerc ACB este egal cu $\alpha = 240° = 4\pi/3$ rad.

Aria acestui sector este

$$S_1 = \frac{R^2 \alpha}{2} = \frac{2\pi R^2}{3}.$$

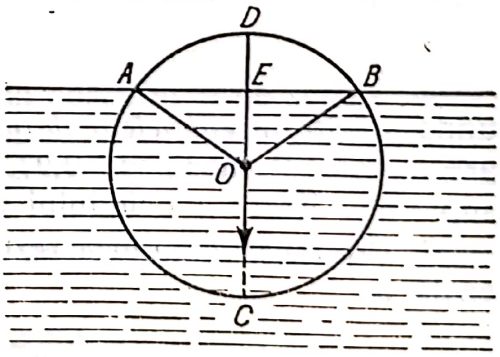


Fig. 110

Aria triunghiului AOB este $S_2 = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$, iar aria segmentului circular cufundat în apă este

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2\pi}{3} R^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12} R^2.$$

Dacă l este lungimea bușteanului, greutatea apei dezlocuite este

$$G_0 = Sl\rho_0 g = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12} \cdot R^2 l \rho_0 g.$$

Greutatea bușteanului este

$$G = \pi R^2 l \rho g.$$

Întrucît G_0 și G trebuie să fie egale, rezultă

$$\rho = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12\pi} \cdot \rho_0 = \frac{30{,}31}{37{,}68} \cdot 1\,000 = 804\ \text{kg/m}^3.$$

B. Hidro și aerodinamica

14. Curgerea fluidelor prin orificii și conducte, rezistența opusă de fluide la mișcarea corpurilor

a. Considerații teoretice

1. Viteza de curgere a unui lichid dintr-un vas larg printr-un orificiu cu suprafața mică, este dată de relația

$$v = \varphi\sqrt{2gh},$$

unde φ este un *coeficient de pierdere* (numit și *coeficient de contracție)* care are o valoare medie de 0,97, g – accelerația gravitației, iar h – înălțimea suprafeței libere a lichidului față de orificiu.

2. Presiunea dinamică rezultă din viteza de curgere a unui fluid și este egală cu

$$p_d = \rho \frac{v^2}{2} = \gamma \frac{v^2}{2g},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ρ și γ sînt densitatea și greutatea specifică a fluidului, iar v — viteza de curgere.

3. Între presiunea statică, presiunea de poziție (datorită diferenței de nivel) și presiunea dinamică ale unui fluid care curge există relația dată de legea lui Daniel Bernoulli

$$p_1 + \rho g h_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g h_r = \text{const},$$

ecuație care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_r = \text{const}.$$

În aceste ecuații p_1 și p_2 sînt presiunile statice, ρ și γ — densitatea și greutatea specifică ale fluidului, h_1 și h_2 — înălțimile la care se află secțiunile de curgere față de un plan orizontal de referință, v_1 și v_2 — vitezele de curgere în secțiunile respective, iar h_r — pierderea de presiune sau de sarcină pe conductă.

Dacă $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = 0$, presiunile de poziție dispar.

4. Debitul de masă (masic) și debitul de volum (volumic) ale unui fluid care trece printr-o secțiune în timp de o secundă, sînt date de relațiile

$$Q_m = \frac{m}{t}, \quad Q_v = \frac{V}{t}, \quad Q_m = \rho Q_v,$$

unde m este masa, V — volumul, ρ — densitatea fluidului, iar t — timpul de curgere.

5. Într-o curgere staționară, debitul fluidului rămîne constant, fiind exprimat prin legea de continuitate

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \ldots = S_n v_n = \text{const},$$

unde $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sînt secțiunile, iar $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — vitezele de curgere respective.

6. Rezistența întîmpinată de corpuri la mișcarea prin fluide este dată de relația

$$R = \frac{c}{2} \rho v^2 S,$$

unde c este un coeficient care depinde de forma corpului și de starea suprafeței lui și care se mai numește și *rezistență specifică*, ρ — densitatea fluidului, v — viteza curentului de fluid, iar S — secțiunea transversală maximă a corpului.

7. Viteza unui corp care cade într-un fluid, ce opune o rezistentă, crește pînă la o valoare limită dată de relația

$$\frac{c}{2} \rho v^2 S = mg, \quad v = \sqrt{\frac{2mg}{c \rho S}},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde m este masa corpului, iar g – accelerația gravitației.

După atingerea acestei viteze constante corpul capătă o mișcare uniformă.

b. Probleme

2.56. Un sifon (fig. 111), cu ramurile verticale $AB = 20$ cm și $CD = 40$ cm, iar ramura BC, orizontală, este umplut cu un lichid de densitate $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ kg/m³. Extremitatea A fiind astupată cu degetul, se introduce sifonul într-un vas plin cu un lichid de densitate $\rho_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ kg/m³ astfel încît porțiunea cufundată ED să fie egală cu 10 cm.

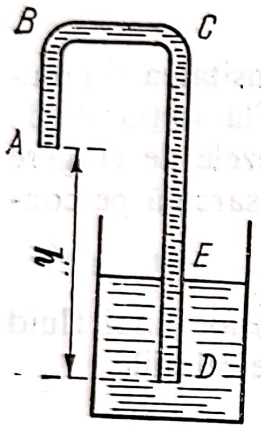


Fig. 111

Se deschide apoi orificiul A. Ce se va întîmpla? Ce lungime va trebui să aibă ramura AB pentru ca:

a) Să nu se producă nici o mișcare a lichidului în sifon.

b) Lichidul din vas să se poată scurge prin sifon. Densitatea mercurului $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³.

Rezolvare. Să notăm cu H presiunea atmosferică, măsurată în N/m². Presiunea lichidului din tub, care apasă asupra lichidului din vas, de sus în jos, este

$$p = H + \frac{\rho_1 g h}{\rho g} = H + \frac{0{,}20 \cdot 0{,}9}{13{,}6} = H + 0{,}0132.$$

Presiunea lichidului din vas, care apasă de jos în sus asupra lichidului din tub este

$$p' = H + \frac{\rho_2 g \cdot ED}{\rho g} = H + \frac{0{,}10 \cdot 1{,}2}{13{,}6} = H + 0{,}0088.$$

Întrucît $p > p'$ rezultă că lichidul din tub va curge în vas.

a) Pentru ca să nu se producă nici o mișcare a lichidelor, trebuie ca presiunea lichidului din tub asupra orificiului D să fie egală cu presiunea lichidului din vas, exercitată asupra aceluiași orificiu.

Notînd cu x lungimea AB, va trebui să avem

$$(CD - x)\frac{\rho_1 g}{\rho g} + H = DE \cdot \frac{\rho_2 g}{\rho g} + H.$$

Făcînd reducerile și înlocuirile, obținem

$$(0{,}40 - x) \cdot 0{,}9 = 0{,}10 \cdot 1{,}2, \quad x = \frac{0{,}24}{0{,}9} = 0{,}266 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru ca lichidul din vas să se poată scurge prin sifon va trebui ca $p' > p$, adică

$$H + DE \cdot \frac{\rho_2 g}{\rho g} > H + (CD - AB) \cdot \frac{\rho_1 g}{\rho g}.$$

Făcînd înlocuirile și reducerile obținem

$$0{,}12 > 0{,}36 - 0{,}9\,AB,\ AB > \frac{0{,}24}{0{,}9},\ AB > 0{,}266\ \text{m}.$$

2.57. Un bandaj de roată cu diametrul exterior $D = 0{,}900$ m, este confecționat din fontă, prin turnare centrifugală, într-o formă care se rotește cu $n = 300$ rot/min.

Cunoscînd densitatea fontei topite $\rho = 7000$ kg/m³ și înălțimea coloanei de fontă lichidă, $h = 0{,}250$ m, se cere să se calculeze presiunea din punctele A și B de pe periferia inferioară a bandajului (fig. 112) în următoarele cazuri:

a) Forma se află în repaus după turnarea fontei. b) Forma se află în mișcare după terminarea procesului de turnare.

Presiunea atmosferică $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².

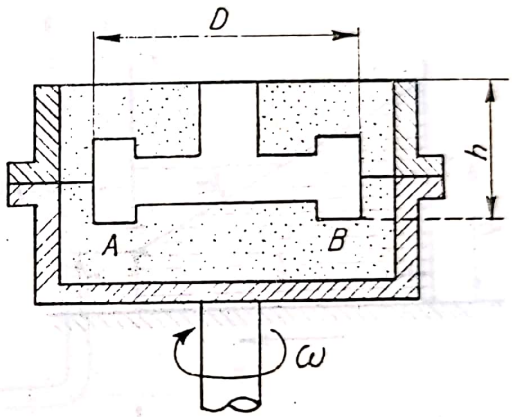


Fig. 112

Rezolvare

a) $p_1 = p_0 + \rho gh = 1{,}013 \cdot 10^5 + 7\,000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}250 \approx 1{,}185 \cdot 10^5$ N/m².

b) $p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} v^2 = p_1 + \frac{\rho}{2} R^2 \omega^2 = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot R^2, \frac{\pi^2 n^2}{900} =$

$$= 1{,}185 \cdot 10^5 + \frac{7\,000}{2} \cdot 0{,}45^2 \cdot \frac{3{,}14^2 \cdot 90\,000}{900} = 8{,}173 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2.$$

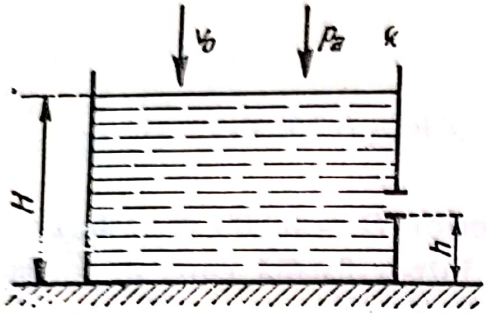
2.58. Un rezervor deschis cu baza dreptunghiulară avînd lungimea $l = 1$ m este prevăzut pe unul dintre pereții frontali (care are ca bază lățimea dreptunghiului) cu un orificiu mic de scurgere (fig. 113).

Marginea inferioară a orificiului se găsește la înălțimea $h = 0{,}25$ m față de fundul rezervorului. În rezervor se află ulei cu densitatea $\rho = 800$ kg/m³, pînă la înălțimea $H = 1$ m. Se cere:

a) Ce presiune trebuie exercitată asupra orificiului pentru ca lichidul să nu curgă cînd rezervorul se află în repaus? b) Cu ce accelerație trebuie

să se miște rezervorul pe un plan orizontal, paralel cu lungimea sa și spre partea orificiului, ca lichidul să nu curgă? c) Ce presiune trebuie exercitată asupra orificiului, dacă rezervorul se mișcă accelerat în sens contrar celui de la punctul (b), astfel ca lichidul să nu curgă din rezervor?

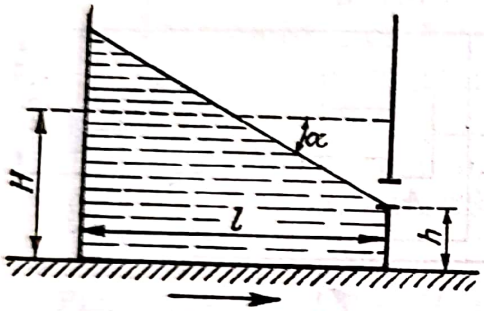
Presiunea atmosferică se va considera $p_a = 760$ torr $= 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².



a

Rezolvare. a) Pentru ca uleiul să nu curgă, trebuie ca presiunea exercitată la orificiu (fig. 113, *a*) să fie egală cu presiunea hidrostatică a uleiului

$$p = \rho g (H - h) = 800 \cdot 9{,}81 (1 - 0{,}25) = 5\,886 \text{ N/m}^2.$$

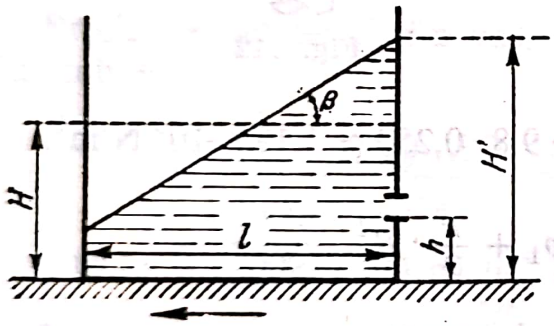


b

b) Pentru ca lichidul să nu curgă cînd rezervorul se mișcă în sensul săgeții (fig. 113, *b*), suprafața lui liberă pe care o ia în mișcare, trebuie să atingă marginea inferioară a orificiului.

În problema 2.29 am văzut că

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g} = \frac{H - h}{\frac{l}{2}} = \frac{2(H - h)}{l}.$$



c

Fig. 113

Din această relație rezultă

$$a = \frac{2g(H - h)}{l} = \frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}75}{1} = 14{,}7 \text{ m/s}^2.$$

c) De data aceasta, suprafața lichidului va lua forma din fig. 113, *c* și vom avea

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{g} = \frac{H' - H}{\frac{l}{2}} = \frac{2(H' - H)}{l}.$$

Din această relație rezultă

$$H' = \frac{a l}{2g} + H = \frac{14{,}7 \cdot 1}{19{,}6} + 1 = 1{,}75 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Presiunea căutată p, este

$$p = \rho g (H' - h) = 800 \cdot 9{,}81 (1{,}75 - 0{,}25) = 800 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 =$$
$$= 11\,772 \text{ N/m}^2 = 11{,}772 \text{ pz.}$$

2.59. Un rezervor A al cărui nivel se menține constant, trebuie alimentat cu un debit de apă $Q = 1{,}5$ m³/s.

Alimentarea se face din rezervorul B care furnizează un debit $Q_1 = 0{,}5$ m³/s și din rezervorul C prin intermediul unui aparat I, numit injector (fig. 114). În rezervoarele B și C nivelul apei se menține constant.

Apa care vine din B printr-o conductă cu secțiunea la vîrf mică, $s_1 = 0{,}0244$ m² și de la o înălțime mare, creează o depresiune în spațiul înconjurător V al injectorului. Această depresiune face ca lichidul din C să urce în V

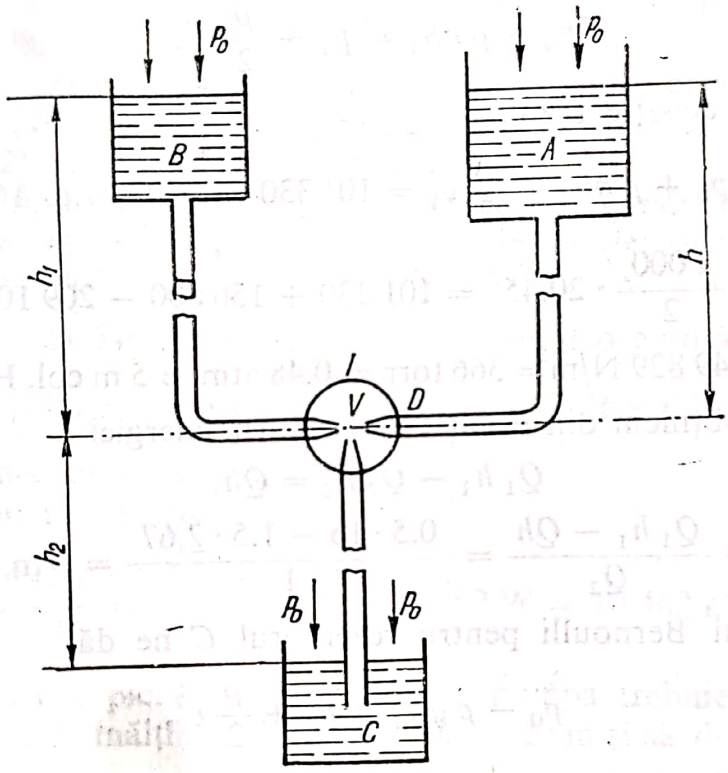


Fig. 114

prin conducta cu secțiunea s_2, după care, împreună cu debitul din B, traversează difuzorul D.

În difuzor, debitele reunite, obținînd o viteză și o presiune mare, sînt refulate în A prin conducta de secțiune $s = 0{,}360$ m².

Știind că înălțimile de la axa injectorului pînă la nivelul rezervoarelor A și B sînt respectiv egale cu $h = 2{,}67$ m și $h_1 = 16$ m, se cere:

a) Debitul furnizat de rezervorul C. b) Viteza de curgere a apei din rezervorul B în injector. c) Depresiunea din spațiul V. d) Înălțimea de la axa

injectorului la rezervorul C. e) Viteza și secțiunea conductei de la rezervorul C. f) Viteza și presiunea apei în conducta de refulare, de la injector la rezervorul A.

Rezolvare. a) Q_1 și Q_2 fiind debitele rezervoarelor B și C, avem

$$Q_2 = Q - Q_1 = 1{,}5 - 0{,}5 = 1\ \text{m}^3/\text{s}.$$

b) Viteza la ieșirea din conducta rezervorului B este

$$v_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{0{,}5}{0{,}02445} = 20{,}45\ \text{m/s}.$$

c) Dacă p_0 este presiunea atmosferică, iar p_1 — presiunea creată în camera V, se poate scrie ecuația lui Bernoulli pentru rezervorul B

$$p_0 + \rho g h_1 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2.$$

Din această ecuație rezultă

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1 - \frac{\rho}{2} v_1^2 = 101\,330 + 1\,000 \cdot 9{,}8 \cdot 16 -$$

$$- \frac{1\,000}{2} \cdot 20{,}45^2 = 101\,330 + 156\,800 - 209\,101 =$$

$$= 49\,829\ \text{N/m}^2 = 366\ \text{torr} = 0{,}48\ \text{atm} \approx 5\ \text{m col. } H_2O.$$

d) Pe h_2 îl obținem din ecuația conservării energiei

$$Q_1 h_1 - Q_2 h_2 = Qh,$$

$$h_2 = \frac{Q_1 h_1 - Qh}{Q_2} = \frac{0{,}5 \cdot 16 - 1{,}5 \cdot 2{,}67}{1} = 4\ \text{m}.$$

e) Ecuația lui Bernoulli pentru rezervorul C ne dă

$$p_0 - \rho g h_2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2.$$

Ținînd seamă că $p_2 = p_1$ rezultă

$$v_2 = \sqrt{2\left(\frac{p_0 - p_1}{\rho} - g h_2\right)} = \sqrt{2\left(\frac{101\,330 - 48\,829}{1\,000} - 9{,}8 \cdot 4\right)} =$$

$$= \sqrt{2\,(52{,}5 - 39{,}2)} = \sqrt{26{,}6} = 5{,}16\ \text{m/s},$$

$$S_2 = \frac{Q_2}{v_2} = \frac{1}{5{,}16} = 0{,}194\ \text{m}^2.$$

f) $v = \frac{Q}{S} = \frac{1{,}5}{0{,}36} = 4{,}17\ \text{m/s}.$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuația lui Bernoulli pentru rezervorul A, scoatem valoarea presiuni

$$p_0 + \rho gh = p + \frac{\rho}{2} v^2,$$

$$p = p_0 + \rho gh - \frac{\rho}{2} v^2 = 101\,330 + 1\,000 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}67 - 500 \cdot 17{,}39 =$$

$$= 101\,330 + 26\,166 - 8\,695 = 118\,801 \text{ N/m}^2 = 891 \text{ torr} = 1{,}172 \text{ atm} =$$

$$= 12{,}10 \text{ m } H_2O.$$

2.60. O pompă acționată de un motor electric, absoarbe apa dintr-un puț de nivel constant, situat la adîncimea $h_1 = 5$ m sub axul pompei. Apa se ridică vertical la înălțimea $h_2 = 12$ m deasupra axului pompei, printr-o conductă de refulare.

Debitul pompei $Q = 3{,}768$ m³/min, iar pierderile prin conducta $h_r = 3$ m coloană de apă. Știind că apa nu poate depăși viteza de 0,5 m/s în conducta de aspirație și 1,25 m/s în cea de refulare, se cere:

a) Puterea și randamentul pompei. b) Diametrul conductelor de aspirație și de refulare. c) Randamentul global al instalației dacă randamentul motorului este de 80%.

Rezolvare. a) Pompa ridică în fiecare minut o greutate

$$G = \rho Vg = \rho Qg = 1\,000 \cdot 3{,}768 \cdot 9{,}8 = 36\,926 \text{ N},$$

de apă la înălțimea $H = h_1 + h_2 = 17$ m.

Rezultă că puterea necesară este

$$P_u = \frac{GH}{t} = \frac{36\,926 \cdot 17}{60} = 10\,462 \text{ W} = 10{,}462 \text{ kW}.$$

Avînd de învins și pierderile prin frecare, pompa trebuie să lucreze ca și cînd ar ridica apa la înălțimea $H' = H + h_r = 20$ m și să dezvolte o putere

$$P_c = \frac{GH'}{t} = \frac{36\,926 \cdot 20}{60} = 12\,308 \text{ W} = 12{,}308 \text{ kW},$$

$$\eta_1 = \frac{P_u}{P_c} = \frac{H}{H'} = \frac{17}{20} = 0{,}85 = 85\%.$$

b) Dacă d_1 și d_2 sînt diametrele conductelor de aspirație și refulare, din ecuația de continuitate

$$Q = \frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$d_1 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}0628}{3{,}14 \cdot 0{,}5}} = 0{,}4 \text{ m} = 400 \text{ mm},$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}0628}{3{,}14 \cdot 1{,}25}} = 0{,}253 \text{ m} = 253 \text{ mm}.$$

c) Randamentul global al instalației este

$$\eta = \eta_1 \eta_2 = 0{,}85 \cdot 0{,}80 = 0{,}68.$$

2.61. Pentru umplerea unei cisterne cu benzină de greutate specifică $\gamma = 7\,640$ N/m^3, se folosește o pîlnie cu diametrul $D = 180$ mm, diametrul țevii de scurgere $d_1 = 45$ mm și înălțimea totală $h = 40$ cm. Benzina curge în pîlnie dintr-un rezervor de nivel constant H, printr-un robinet scurt cu diametrul $d_2 = 30$ mm (fig. 115). Neglijînd frecările și adîncimea cu care pătrunde pîlnia în lichid, se cere:

a) Înălțimea H, astfel ca benzina să nu deverseze din pîlnie. b) Debitul Q de benzină, care curge în cisternă.

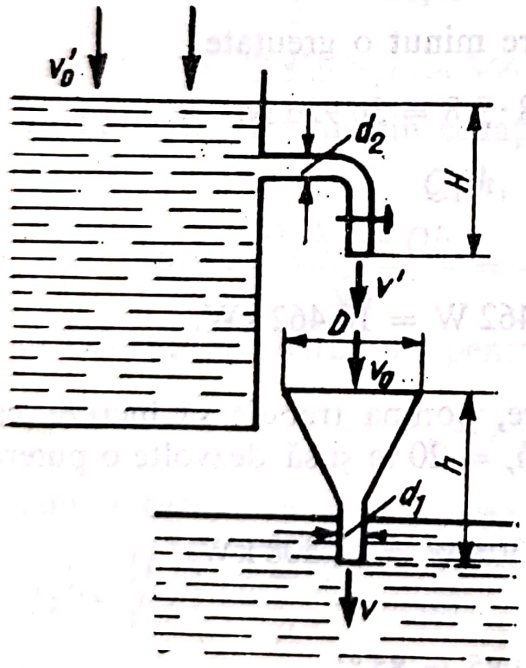


Fig. 115

Rezolvare. a) Aplicînd ecuația lui Bernoulli pentru pîlnie, rezultă

$$\frac{p_0}{\gamma} + h + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}. \qquad (1)$$

Din legea de continuitate a lichidului scurs prin pîlnie se scoate

$$v_0 = \frac{s}{S} v = \left(\frac{d_1}{D}\right)^2 v = \left(\frac{45}{180}\right)^2 v = \frac{v}{16}.$$

Înlocuind în (1) și scoțînd valoarea lui v, se obține

$$v = \sqrt{\frac{512}{255} gh} \approx \sqrt{2gh} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}4} = \sqrt{7{,}84} = 2{,}8 \text{ m/s}.$$

Debitul pîlniei este dat de relația

$$Q = \frac{\pi d_1^2}{4} v = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \sqrt{2gh}. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația lui Bernoulli pentru rezervor și robinet este

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0'^2}{2g} + H = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v'^2}{2g}. \qquad (3)$$

Ținînd seamă că $v_0' = 0$, din (3) rezultă

$$v' = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\, H} = \sqrt{19{,}6\, H}.$$

Debitul dat de rezervor este

$$Q' = \frac{\pi d_2^2}{4} v' = \frac{\pi d_2^2}{4} \cdot \sqrt{2gH}.$$

Pentru ca benzina să nu deverseze, trebuie ca $Q = Q'$, de unde

$$\frac{\pi d_2^2}{4} \sqrt{2gH} = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \sqrt{2gh}.$$

Din această ultimă relație rezultă

$$H = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 h = \left(\frac{45}{30}\right)^4 \cdot 0{,}4 = 2{,}025 \text{ m}.$$

b) Debitul Q este dat de relația (2)

$$Q = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \sqrt{2gh} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}045^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}4} =$$

$$= 0{,}0015896 \cdot 2{,}8 = 0{,}00445 \text{ m}^3/s = 267 \text{ l/min}.$$

2.62. Un micromanometru cu tub înclinat este pus în legătură cu două secțiuni diferite *1* și *2* ale unei conducte prin care circulă aer (fig. 116). Lichidul utilizat în micromanometru este alcool cu densitatea $\rho = 800$ kg/m³. Unghiul de înclinare al tubului este $\alpha = 10°$. Denivelarea lichidului, măsurată de-a lungul tubului fiind $l = 10$ cm, iar densitatea aerului $\rho' = 1{,}3$ kg/m³, se cere:

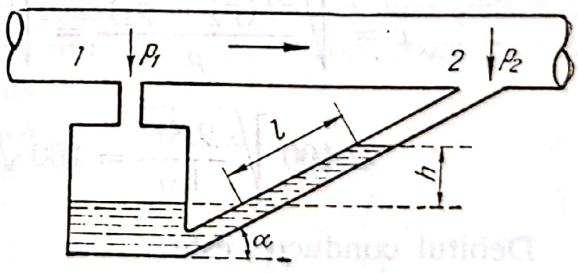


Fig. 116

a) Căderea de presiune a aerului între cele două secțiuni. b) Viteza de curgere a aerului prin conductă.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Pierderea de presiune între cele două secțiuni este

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho gh = \rho gl \sin \alpha = 800 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}10 \cdot \sin 10° =$$

$$= 784 \cdot 0{,}174 = 136{,}4 \text{ N/m}^2 = 1{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ at.}$$

b) Viteza de curgere a aerului în conductă este dată de ecuația lui Bernoulli

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho'}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 136{,}4}{1{,}3}} = \sqrt{209{,}8} = 14{,}4 \text{ m/s.}$$

2.63. Printr-o conductă pe care sînt montate două manometre *1* și *2*, după cum se vede în fig. 117, circulă un gaz cu densitate $\rho = 1{,}6$ kg/m³ Manometrul *1* indică 2 at, iar manometru *2* indică 2,5 at.

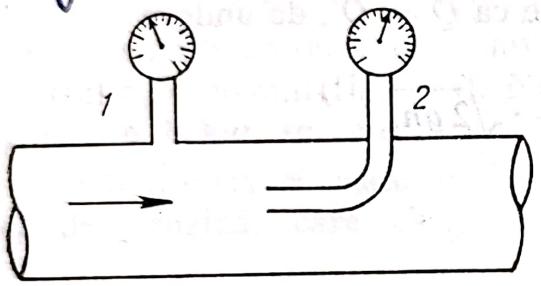


Fig. 117

Să se calculeze viteza cu care circulă gazul prin conductă și debitul conductei știind că ea are secțiunea $S = 0{,}2500$ m².

Rezolvare. Manometrul *2* indică presiunea totală a gazului care circulă prin conductă, adică presiunea statică $p_1 = 2$ at și presiunea dinamică. Conform legii lui Bernoulli, se poate scrie

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} v^2.$$

Din această ecuație rezultă

$$v = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4 (2{,}5 - 2)}{1{,}6}} =$$

$$= 100 \sqrt{\frac{9{,}81}{1{,}6}} = 100 \sqrt{6{,}13} = 100 \cdot 2{,}47 = 247 \text{ m/s.}$$

Debitul conductei este

$$Q = Sv = 0{,}250 \cdot 247 = 61{,}750 \text{ m}^3\text{/s.}$$

2.64. O întreprindere de transporturi auto posedă un număr de 900 turisme pe care trebuie să le spele în fiecare zi. Capacitatea unei instalații de spălare este de 180 turisme pe zi lucrîndu-se cîte 8 ore. Duzele instalației de spălare au secțiunea de scurgere a apei $S = 3{,}14$ mm² și coeficientul de con-

Scanned with OKEN Scanner

tracție $\varphi = 0{,}92$. Presiunea apei la ieșirea din duze este egală cu $p = 98 \cdot 10^4$ N/m². Se cere:

a) Numărul instalațiilor de spălare. b) Timpul necesar pentru spălarea unui turism. c) Cantitatea de apă consumată zilnic pentru spălarea autoturismelor.

Rezolvare

a) $n = \dfrac{900}{180} = 5$ instalatii,

b) $t = \dfrac{8 \cdot 60}{180} = \dfrac{480}{180} = 2'40''$.

c) La ieșirea din duză, presiunea statică se transformă în presiune dinamică

$$p = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \gamma.$$

Ținînd seamă că pentru apă $\gamma = 9\,800$ N/m³ rezultă

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gp}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 98 \cdot 10^4}{9\,800}} = 140 \text{ m/s}.$$

Viteza reală a apei este

$$v = \varphi v_0 = 0{,}92 \cdot 140 = 129 \text{ m/s}.$$

Debitul de apă produs de o duză este

$$q = S \cdot v = 3{,}14 \cdot 10^{-6} \cdot 129 = 405 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} = 0{,}405 \text{ l/s} \approx 24{,}5 \text{ l/min}$$

Cantitatea totală de apă consumată este

$$Q = 24{,}3 \times 5 \times 480 = 58\,320 \text{ l} = 58{,}32 \text{ t}.$$

2.65. Printr-o conductă cilindrică cu raza $R = 10$ cm, circulă petrol cu densitatea $\rho = 800$ kg/m³. Conducta prezintă o gîtuire tronconică cu raza $r = R/2 = 5$ cm. Cu ajutorul a două sonde de presiune se măsoară presiunea statică în partea gîtuită și în cea negîtuită a conductei și se găsește între cele două presiuni astfel măsurate, o diferență $p = 150$ torr (fig. 118). Cunoscînd densitatea mercurului $\rho_m = 13\,600$ kg/m³, se cere:

a) Vitezele petrolului în partea gîtuită și în cea negîtuită a conductei. b) Debitul de petrol furnizat de conductă.

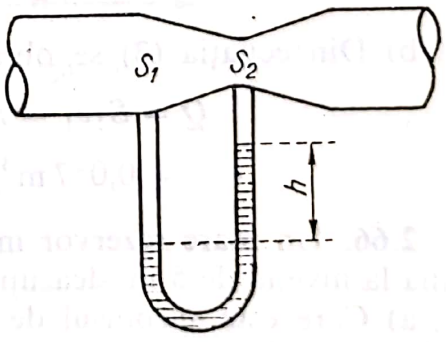


Fig. 118

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Dacă S_1 și S_2 sînt secțiunile, v_1 și v_2 vitezele, iar p_1 și p_2 presiunile statice în partea negîtuită și cea gîtuită a conductei, luînd axa conductei ca axă de referință, putem scrie ecuația lui Bernoulli

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2. \tag{1}$$

Ținînd seamă că

$$p_1 - p_2 = \rho_m g h = 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}150 = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

ecuația lui Bernoulli devine

$$\frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = p_1 - p_2 = 2 \cdot 10^4. \tag{2}$$

Debitul fiind același pe întreaga lungime a conductei, scriem ecuația de continuitate

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2. \tag{3}$$

Din ecuația (3) rezultă

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 = \frac{1}{4} v_2. \tag{4}$$

Înlocuind valoarea lui v_1 în (2) și ținînd seamă că $S_2^2/S_1^2 = 1/16$, se obține

$$\frac{\rho}{2} v_2^2 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 2 \cdot 10^4. \tag{5}$$

Din relația (5) rezultă

$$v_2 = \sqrt{\frac{64 \cdot 10^4}{15\,\rho}} = \sqrt{\frac{64 \cdot 10^4}{15 \cdot 800}} = 53{,}33 = 7{,}3 \text{ m/s}.$$

Din relația (4) rezultă

$$v_1 = \frac{1}{4} v_2 = \frac{7{,}3}{4} = 1{,}825 \text{ m/s}.$$

b) Din ecuația (3) se obține

$$Q = S_1 v_1 = \pi R^2 v_1 = 3{,}14 \cdot 0{,}01 \cdot 1{,}825 =$$
$$= 0{,}057 \text{ m}^3/\text{s} = 0{,}057 \cdot 800 = 45{,}6 \text{ kg/s}.$$

2.66. Un mare rezervor metalic deschis la partea superioară conține apă pînă la nivelul de 5 m, deasupra fundului presupus orizontal. Se cere:

a) Care este surplusul de presiune existent în apă, la fundul bazinului față de presiunea atmosferică și care este presiunea totală la fundul bazinului?

Scanned with OKEN Scanner

b) Cu ce viteză țîșnește apa printr-un orificiu foarte mic practicat pe fundul bazinului. c) Deschiderea orificiului fiind de 3 cm², să se calculeze debitul vînei de lichid în litri pe minut în momentul inițial (se neglijează contracția vînei de lichid).

(Adm. Fac. Construcții, Buc., 1965)

Rezolvare. a) Surplusul de presiune este presiunea hidrostatică

$$p_h = \rho g h = 1\,000 \cdot 9{,}8 \cdot 5 = 49\,000 \text{ N/m}^2 = 49 \text{ pz.}$$

Dacă p_a este presiunea atmosferică, presiunea totală va fi

$$p_t = p_a + p_h = p_a + 49\,000.$$

b) $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5} = \sqrt{98} = 9{,}9$ m/s.

c) Dacă S este aria secțiunii, debitul vînei de lichid va fi

$$Q = S \cdot v = \frac{3}{10^4} \cdot 9{,}9 = 29{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 29{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^4 \approx$$

$$\approx 178 \text{ l/min.}$$

2.67. Un autoturism înaintează pe o șosea asfaltată cu viteza constantă $v = 72$ km/h, iar din față suflă un vînt cu viteza $v' = 51$ km/h, a cărei direcție face un unghi de 45° cu traiectoria automobilului (fig. 119). Secțiunea maximă

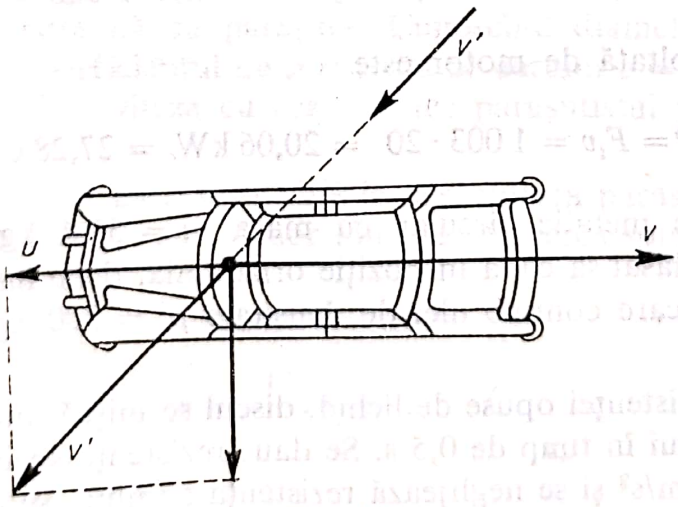


Fig. 119

frontală a autoturismului, $S = 1{,}8$ m² iar greutatea lui și a pasagerilor, $G = 13\,720$ N.

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul de frecare cu drumul, $\mu = 0{,}035$ iar cel de rezistență din partea aerului, $c = 0{,}5$. Șoseaua este orizontală și dreaptă, iar presiunea atmosferică este cea normală. Densitatea aerului, $\rho = 1{,}29$ kg/m³. Se cere:

a) Forța de rezistență opusă de aer la înaintarea autoturismului. b) Puterea dezvoltată de motor la înaintare, în kW și CP.

(R.F.Ch., nr. 6/1965)

Rezolvare. a) Componenta vitezei vîntului paralelă cu direcția de mers a automobilului este

$$u = v' \cos 45° = \frac{51}{3{,}6} \cdot 0{,}707 = 10 \text{ m/s}.$$

Viteza relativă a vîntului față de automobil este

$$v_1 = v - (-u) = v + u = \frac{72}{3{,}6} + 10 = 30 \text{ m/s}.$$

$$F_r = \frac{c}{2} \rho S v_1^2 = \frac{0{,}5}{2} \cdot 1{,}29 \cdot 1{,}8 \cdot 30^2 = 523 \text{ N}.$$

b) Mișcarea automobilului fiind considerată uniformă, forța de tracțiune dezvoltată de motor este

$$F_t = F_f + F_r = \mu N + F_r = 0{,}035 \cdot 13\,720 + 523 = 1\,003 \text{ N}.$$

Puterea dezvoltată de motor este

$$P = F_t v = 1\,003 \cdot 20 = 20{,}06 \text{ kW} = 27{,}28 \text{ CP}.$$

2.68. Un disc metalic circular cu masa $m = 51{,}4$ kg și cu diametrul $d = 0{,}40$ m, este lăsat să cadă în poziție orizontală, de la înălțimea h din aer, într-un rezervor care conține ulei de densitate $\rho' = 800$ kg/m³ pe înălțimea $H = 3$ m.

Din cauza rezistenței opuse de lichid, discul se mișcă uniform și ajunge la fundul rezervorului în timp de 0,5 s. Se dau: rezistența specifică a lichidului, $c = 0{,}2$, $g = 10$ m/s² și se neglijează rezistența aerului. Se cere:

a) Înălțimea h deasupra nivelului lichidului, de la care s-a dat drumul discului. b) Rezistența opusă de lichid la înaintarea discului. c) Densitatea metalului din care este confecționat discul.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Viteza discului în interiorul lichidului și la suprafața acestuia este

$$v = \frac{H}{t} = \frac{3}{0{,}5} = 6 \text{ m/s},$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{6^2}{2 \cdot 10} = \frac{36}{20} = 1{,}8 \text{ m}.$$

b) $R = \frac{c}{2} \cdot \rho' S v^2 = \frac{0{,}2}{2} \cdot 800 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2^2 \cdot 6^2 =$

$$= 0{,}1 \cdot 800 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04 \cdot 36 = 361{,}728 \text{ N}.$$

c) Pentru ca discul să se miște uniform în lichid, trebuie ca

$$mg - \frac{m}{\rho} \rho' g - R = 0.$$

Din această relație rezultă

$$\rho = \frac{mg}{mg - R} \cdot \rho' = \frac{51{,}4 \cdot 10}{51{,}4 \cdot 10 - 361{,}728} \cdot 800 = \frac{411\,200}{514 - 361{,}728} =$$

$$= \frac{411\,200}{152{,}272} = 2\,700 \text{ kg/m}^3.$$

2.69. Un planor coboară vertical cu viteza de 5 m/s. În momentul în care planorul se află la înălțimea de 500 m își dă drumul din el un parașutist care cîntărește 85 kg, împreună cu parașuta. Cunoscînd diametrul parașutei la deschidere $d = 4$ m, coeficientul de rezistență al aerului $c = 0{,}25$, densitatea aerului $\rho = 1{,}3$ kg/m³ și viteza cu care ajunge parașutistul pe sol, egală cu 1 m/s, se cere:

a) Spațiul parcurs de parașutist pînă la deschiderea parașutei. b) Timpul total din momentul lansării din planor pînă la atingerea solului. Se va lucra cu $g = 10$ m/s².

Rezolvare

a) $$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}. \qquad (1)$$

Valoarea lui v este dată de relația

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho cS}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 85 \cdot 10}{1{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot 12{,}56}} = \sqrt{\frac{1\,700}{4}} = \sqrt{425} = 20{,}6 \text{ m/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (1) se obține

$$h = \frac{425 - 25}{20} = \frac{400}{20} = 20 \text{ m}.$$

b) $t_1 = \frac{v - v_0}{g} = \frac{20{,}6 - 5}{10} = 1{,}56 \text{ s}.$

În tot timpul coborîrii cu parașuta deschisă, viteza este constantă, $v' = 1$ m/s, deci

$$t_2 = \frac{H - h}{v'} = \frac{500 - 20}{1} = 480 \text{ s},$$

$$t = t_1 + t_2 = 1{,}56 + 480 = 481{,}56 \text{ s} = 8 \text{ min } 1{,}56 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

Căldura și fizica moleculară

A. Căldura și temperatura

15. Cantitatea de căldură, calorimetria, echivalentul mecanic al căldurii

a. Considerații teoretice

1. Cantitatea de căldură Q înmagazinată de un corp este dată de relația

$$Q = m\,c\,\Delta t = m\,c\,(t_2 - t_1)$$

unde m este masa corpului, c — căldura specifică, iar t_1 și t_2 sînt respectiv temperaturile inițială și finală ale corpului.

2. În sistemul internațional de unități, cantitatea de căldură se măsoară în J, masa în kg, căldura specifică în J/kg·grd sau multiplul acestuia kJ/kg·grd, iar temperatura în grade Celsius (°C) sau grade Kelvin (°K).

3. Temperatura amestecurilor este dată de relația

$$t = \frac{m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2 + \dots}{m_1c_1 + m_2c_2 + \dots} = \frac{\Sigma\, m_ic_it_i}{\Sigma\, m_ic_i}$$

unde m_i sînt masele, c_i — căldurile specifice, iar t_i — temperaturile inițiale ale corpurilor.

4. Capacitatea calorică C sau echivalentul în apă este produsul dintre masa unui corp și căldura sa specifică, $C = mc$.

5. Cantitatea de căldură eliberată de un corp prin arderea lui completă, este dată de relația

$$Q = m\,q$$

unde m este masa corpului, iar q — puterea lui calorică, exprimată în J/kg, sau multiplul acesteia kJ/kg.

6. Randamentul caloric este dat de relația

$$\eta = \frac{Q_u}{Q_c}$$

unde Q_u este căldura utilă, iar Q_c — căldura consumată.

b. Probleme

3.1. Căldura specifică a sulfurii de cupru este 506 J/kg·grd, iar a sulfurii de argint 312 J/kg·grd.

Scanned with OKEN Scanner

Un amestec din aceste două corpuri, încălzit la 40°C, introdus în 6 kg de apă la 7,67°C, îi ridică temperatura acesteia la 10°C. Să se afle cantităţile de sulfură de argint şi sulfură de cupru aflate în amestec.

Rezolvare. Notînd cu x cantitatea de sulfură de cupru şi cu y cantitatea de sulfură de argint, avem ecuaţia

$$506\,x\,(40°-10°)+312\,y\,(40°-10°)=6\,(10°-7{,}67°)$$

de unde se obţine

$$3{,}636\,x+2{,}238\,y=13{,}98. \qquad (1)$$

Greutăţile sulfurilor fiind invers proporţionale cu căldurile lor specifice, avem

$$\frac{x}{y}=\frac{312}{506}. \qquad (2)$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) rezultă

$$x=1{,}920\text{ kg}\ \text{şi}\ y=3{,}120\text{ kg}.$$

3.2. Se amestecă într-un vas 4 kg de apă la temperatura $t_1=20°C$ cu 2 kg de apă la temperatura $t_2=50°C$ şi cu 1 kg de apă la temperatura $t_3=100°C$. Să se calculeze temperatura finală a amestecului neţinînd seamă de încălzirea vasului.

Rezolvare. Cantitatea de căldură pe care o conţine amestecul este egală cu suma cantităţilor de căldură pe care le conţine fiecare lichid separat, adică

$$(4+2+1)\,x=4\cdot 20+2\cdot 50+1\cdot 100$$

unde x este temperatura amestecului.

Din relaţia stabilită rezultă

$$x=\frac{80+100+100}{7}=\frac{280}{7}=40°\text{C}.$$

3.3. Cantitatea de apă necesară unei băi este de 320 kg, iar temperatura potrivită este de 36°C. Apa din cazan are temperatura de 78°C, iar apa din robinetul de răcire are temperatura de 8°C. Cîte kilograme de apă din fiecare fel trebuie amestecate pentru obţinerea temperaturii necesare?

Rezolvare. Fie x cantitatea de apă luată de la cazan şi y cantitatea de apă rece de la robinet (căldura specifică a apei este 4 187 J/kg·grd).

Rezultă imediat ecuaţiile

$$x+y=320, \qquad (1)$$

$$78\cdot 4\,187\cdot x+8\cdot 4\,187\,y=36\cdot 4\,187\,(x+y). \qquad (2)$$

Rezolvînd ecuaţiile (1) şi (2) obţinem

$$x=128\text{ kg}\ \text{şi}\ y=192\text{ kg}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.4. Într-un vas care conține 200 g de apă la temperatura de 20°C se introduc două corpuri de metal: unul de fier avînd temperatura de 100°C și masa de 60 g și unul de cupru avînd temperatura de 50°C și masa 20 g.

Căldurile specifice ale fierului și cuprului fiind egale respectiv cu 460 J/kg·grd și 380 J/kg·grd, se cere să se calculeze temperatura finală a apei neținînd seamă de căldura absorbită de vas.

Rezolvare

$$t = \frac{0{,}2 \cdot 4\,180 \cdot 20 + 0{,}06 \cdot 460 \cdot 100 + 0{,}02 \cdot 380 \cdot 50}{0{,}2 \cdot 4\,180 + 0{,}06 \cdot 460 + 0{,}02 \cdot 380} = 22{,}8^\circ\,\text{C}.$$

3.5. În rezervorul unui primus se toarnă o cantitate de 0,5 l petrol lampant. Randamentul primusului este de 40 %.

Cîtă apă poate să fiarbă pe primus dacă arde tot petrolul și dacă temperatura inițială a apei este 20°C?

Puterea calorică a petrolului este egală cu $4{,}6057 \cdot 10^7$ J/kg, iar densitatea acestuia $\rho = 800$ kg/m^3.

Rezolvare. Cantitatea de căldură produsă prin arderea completă a petrolului este egală cu

$$Q_1 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 800 \cdot 4{,}6057 \cdot 10^7 = 1{,}84 \cdot 10^7\ \text{J}.$$

Din această căldură se întrebuințează pentru fierberea apei numai cantitatea

$$Q_2 = 0{,}40 \cdot 1{,}84 \cdot 10^7 = 7{,}368 \cdot 10^6\ \text{J}.$$

Dacă notăm cu x cantitatea de apă care poate să fiarbă pe primus, aceasta va absorbi o cantitate de căldură

$$Q = x \cdot 4\,187 \cdot (100 - 20) = 80 \cdot x \cdot 4\,187.$$

Egalînd pe Q cu Q_2 rezultă

$$80 \cdot 4\,187 \cdot x = 7{,}368 \cdot 10^6\ \text{J};\ x = \frac{7{,}368 \cdot 10^6}{80 \cdot 4\,187} = 22\ \text{kg}.$$

3.6. Într-un cazan de cupru de 3 kg, se găsesc 3 kg apă cu temperatura de 25°C. În cazan se toarnă alcool cu temperatura de 15°C pentru a obține o soluție cu concentrația de 75%. Care va fi temperatura finală dacă nu se ține seamă de căldura ce poate lua naștere prin amestec. Căldura specifică a cuprului este de 376,8 J/kg·grd a alcoolului de 2 428 J/kg·grd iar a apei de 4 186,8 J/kg·grd.

Rezolvare. Cantitatea de alcool necesară pentru obținerea concentrației, este dată de relația

$$m = 0{,}75\,(3 + m);\ m = 9\ \text{kg}.$$

Dacă t este temperatura finală a amestecului, va trebui să avem

$$3 \cdot 376{,}8\,(25 - t) + 3 \cdot 4\,186{,}8\,(25 - t) = 9 \cdot 2\,428\,(t - 15).$$

Rezolvînd ecuația, obținem $t = 18{,}8$ °C.

Scanned with OKEN Scanner

3.7. Blumurile (blocurile de oțel) sînt transportate pe o distanță de 4 km cu ajutorul unui tren special, de la oțelărie la bluming. În momentul plecării unui transport, un blum cu masa de 7 200 kg, are o temperatură de 1 050°C. Pe primii 250 m trenul efectuează o mișcare uniform accelerată, apoi viteza rămîne constantă, iar pe ultimii 150 m mișcarea trenului este uniform încetinită. Știind că pe drum un blum pierde în fiecare secundă cîte 1 130 kJ, iar viteza constantă a trenului este de 5 m/s, să se calculeze temperatura blumului în momentul sosirii lui la bluming. Căldura specifică a oțelului este egală cu $c = 460$ J/kg·grd.

(R.F.Ch., nr. 9/1965)

Rezolvare. Timpul total de parcurgere de la oțelărie la bluming este

$$t = \frac{2S_1 + S_2 + 2S_3}{v} = \frac{500 + 3\,600 + 300}{5} = 880 \text{ s}.$$

Cantitatea de căldură pierdută în timpul transportului este

$$Q = Q't = 1\,130 \cdot 880 = 9\,944 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Pierderea de temperatură în timpul transportului

$$\Delta t = \frac{Q}{mc} = \frac{9\,944 \cdot 10^5}{7\,200 \cdot 460} = 300°\text{C}.$$

Temperatura cu care ajunge la bluming este

$$t = t_0 - \Delta t = 1\,050° - 300° = 750°\text{C}.$$

3.8. Un autoturism care cîntărește 855 kg împreună cu pasagerii, merge uniform pe un drum rectiliniu orizontal între localitățile A și B. Roțile automobilului au diametrul de 60 cm și execută 477,75 rot/min. În drumul său, autoturismul a consumat 28,35 l benzină cu densitatea $\rho = 720$ kg/m³ și cu puterea calorică $q = 45 \cdot 10^6$ J/kg.

Știind că randamentul termic al mașinii $\eta_t = 0{,}30$, randamentul mecanic $\eta_m = 0{,}65$, coeficientul de frecare cu drumul $\mu = 0{,}12$ și considerînd $g = 10$ m/s², se cere:

a) Viteza de mers, b) Puterea nominală a motorului, c) Consumul specific de benzină la 100 km, d) Uzajul cauciucurilor dacă ele trebuie schimbate după un parcurs de 36 000 km.

Rezolvare. a) $v = R\omega = \frac{\pi Rn}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}3 \cdot 477{,}75}{30} = 15$ m/s.

b) Forța de tracțiune necesară este

$$F = \mu mg = 0{,}12 \cdot 855 \cdot 10 = 1\,026 \text{ N}.$$

Puterea utilă este

$$P_u = F \cdot v = 1\,026 \cdot 15 = 15\,390 \text{ W}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Puterea nominală a motorului

$$P_m = \frac{u}{\eta_m} = \frac{15\,390}{0{,}65} = 23\,677\ \text{W} = 23{,}677\ \text{kW}.$$

c) Căldura produsă de combustibil este

$$Q = V \cdot \rho \cdot q = 28{,}35 \cdot 10^{-3} \cdot 720 \cdot 45 \cdot 10^6 = 918{,}54 \cdot 10^6\ \text{J}.$$

Lucrul mecanic obținut prin arderea combustibilului

$$L_u = \eta_t Q = 0{,}3 \cdot 918{,}54 \cdot 10^6 = 275{,}5626 \cdot 10^6\ \text{J}.$$

Timpul de mers între cele două localități

$$t = \frac{L_u}{P_u} = \frac{275{,}5626 \cdot 10^6}{15\,390} = 18\,000\ \text{s} = 5\ \text{h}.$$

Distanța dintre localități, $S = 270$ km.
Consumul specific de benzină

$$C_s = \frac{28{,}35 \cdot 100}{270} = 10{,}5\ l \text{ la } 100\ \text{km}.$$

d) Uzajul cauciucurilor este

$$U_c = \frac{270 \cdot 100}{36\,000} = \frac{27}{36} = 0{,}75\,\%.$$

3.9. Un avion de 2 000 kg care decolează de pe un aerodrom în 24 s, consumă o cantitate de 0,300 l benzină cu densitate $\rho = 720$ kg/m³ și cu puterea calorică $q = 46 \cdot 10^6$ J/kg. Știind că din căldura produsă s-a folosit numai 30% pentru executarea lucrului mecanic util, coeficientul de frecare cu terenul $\mu = 0{,}05875$, iar $g = 10$ m/s², se cere:
a) Puterea utilă dezvoltată de motor b) Viteza de decolare c) Forța de tracțiune utilă a motorului d) Spațiul de decolare.

Rezolvare. a) Căldura produsă de benzină este

$$Q = V \rho q = 0{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 720 \cdot 46 \cdot 10^6 = 9\,936 \cdot 10^3\ \text{J}.$$

Căldura și lucrul mecanic util sînt

$$Q_u = L_u = 0{,}3\,Q = 0{,}3 \cdot 9\,936 \cdot 10^3 = 2\,980\ \ 800\ \text{J},$$

$$P_u = \frac{L_u}{t} = \frac{2\,980\ \ 800}{24} = 124{,}2 \cdot 10^3\ \text{W}.$$

b) Forța de tracțiune utilă este

$$F_t = m(a + \mu g) = m\left(\frac{v}{t} + \mu g\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind forța de tracțiune în expresia puterii obținem

$$P_u = \frac{1}{2} F_t v = \frac{1}{2} mv \left(\frac{v}{t} + \mu g \right),$$

$$124{,}2 \cdot 10^3 = \frac{1}{2} \cdot 2\,000\, v \left(\frac{v}{24} + 0{,}5875 \right).$$

Făcînd calculele obținem ecuația

$$v^2 + 14{,}1\, v - 2980{,}8 = 0;\ v = 48 \text{ m/s}.$$

c) $F_t = 2\,000 \left(\frac{48}{24} + 0{,}5875 \right) = 2\,000 \cdot 2{,}5875 = 5\,175$ N.

d) $S = \frac{v^2}{2a} = \frac{vt}{2} = \frac{48 \cdot 24}{2} = 576$ m.

3.10. Un meteorit de fier cu masa de 10 kg intră în atmosfera Pămîntului cu o viteză de 3 km/s. Datorită frecării cu aerul, viteza lui se micșorează. Concomitent, temperatura lui se ridică cu 1 530°C. Să se calculeze viteza meteoritului în acest moment. Se va considera căldura specifică a fierului, $c = 460$ J/kg·grd.

(G.M.F., nr. 2/1962)

Rezolvare.

$$W = Q = mc\Delta t = 10 \cdot 460 \cdot 1\,530 = 703{,}8 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Aplicînd teorema energiei cinetice obținem

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2W}{m}} = \sqrt{9 \cdot 10^6 + 2 \cdot 0{,}7038 \cdot 10^6} =$$

$$= 10^3 \sqrt{9 + 1{,}41} = 10^3 \sqrt{10{,}41} = 3\,226 \text{ m/s}.$$

3.11. Într-o cameră cu dimensiunile de 2,5 m, 3 m și 4 m se găsește aer la presiunea normală și la temperatura de 20°C. Lăsîndu-se ușa deschisă, o treime din aerul total este înlocuit cu aer din afară cu temperatura de 5°C. Să se afle ce cantitate de lemne cu puterea calorică de $1\,256 \cdot 10^4$ J/kg trebuie să se ardă pentru ca temperatura aerului să ajungă din nou la 20°C, știind că soba care încălzește are randamentul de 10%. Nu se ține seamă de căldura absorbită de pereți. Pentru aer, $c = 10^3$ J/kg·grd și $\rho = 1{,}3$ kg/m³.

(R.F.Ch., nr. 5/1965)

Rezolvare. După amestecare, aerul din cameră va avea temperatura

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{c_1 m_1 + m_2 c_2}. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă că $c_1 = c_2 = c$, iar $m_1 = \frac{2}{3} V\rho$ și $m_2 = \frac{1}{3} V\rho$, relația (1) devine

$$t = \frac{V\rho\left(\frac{2}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2\right)}{V\rho} = \frac{2t_1 + t_2}{3} = \frac{2 \cdot 20 + 5}{3} = 15\ ^\circ\text{C}.$$

Căldura necesară pentru încălzirea aerului de la 15 la 20°C este egală cu

$$Q = mc(t_1 - t) = V\rho c(t_1 - t) =$$

$$= 2{,}5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1{,}3 \cdot 10^3 (20^\circ - 15^\circ) = 195 \cdot 10^3\ \text{J}.$$

Dacă x este cantitatea de lemne necesară va trebui să avem

$$0{,}10 \cdot 1\,256 \cdot 10^4 x = 195 \cdot 10^3;\ x = \frac{195}{1\,256} = 0{,}155\ \text{kg}.$$

3.12. Un cilindru de fier A, cu masa $m_1 = 350$ kg, un bloc de piatră B cu masa $m_2 = 1\,000$ kg și un cilindru de plumb D cu masa $m = 3$ kg sînt suspendate prin funii, cum se vede în fig. 120. Ridicăm lateral cilindrul A la înălțimea $h_1 = 1{,}20$ m și îi dăm drumul să cadă liber. Din cauza șocului, blocul B se ridică la înălțimea $h_2 = 10$ cm, iar A se ridică din nou la înălțimea $h_3 = 9$ cm. Imediat după șoc, cilindrul D cade intr-un calorimetru cu echivalentul în apă $C = 3\,349$ J/grd. Dacă temperatura inițială $t_0 = 15°C$, căldura specifică a plumbului $c = 125$ J/kg·grd și toată energia este preluată de cilindrul D servind numai la ridicarea temperaturii apei; se cere:

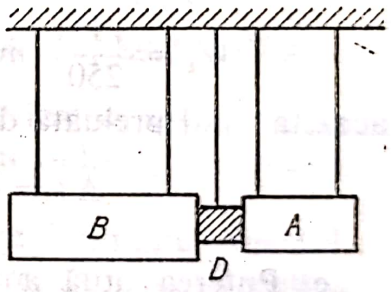


Fig. 120

a) Temperatura cilindrului D după ciocnire b) Temperatura la care se ridică apa.

Rezolvare. a) Energia acumulată de cilindrul D sub formă de căldură este

$$W = W_1 - (W_2 + W_3) = g[m_1 h_1 - (m_2 h_2 + m_1 h_3)] =$$
$$= 9{,}8\,[350 \cdot 1{,}2 - (1\,000 \cdot 0{,}1 + 350 \cdot 0{,}09)] = 2\,827\ \text{J};$$

$$t = \frac{W}{mc} + t_0 = \frac{2\,827}{3 \cdot 125} + 15 = 22{,}5\ ^\circ\text{C}.$$

b) $m_1 c(t - t') = C(t' - t_0)$;

$$t' = \frac{Ct_0 + m_1 ct}{C + m_1 c} = \frac{3\,349 \cdot 15 + 3 \cdot 125 \cdot 22{,}5}{3\,349 + 3 \cdot 125} = 15{,}84\ ^\circ\text{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.13. La turbina unei hidrocentrale, apa este adusă printr-o conductă lungă de 500 m, cu secțiunea $A = 400\ \text{cm}^2$ și cu înclinarea față de orizontală de30°. Se cere: a) Debitul volumic și masic prin conductă. b) Puterea turbinei știind că randamentul instalației este $\eta = 0{,}90$. c) Înainte de lovirea paletelor, apa trece printr-un ajutaj care reduce secțiunea conductei la 1/10 din cea inițială; ce viteză are apa cînd lovește paletele? d) Considerînd că prin frecare apa pierde 1/250 din energia ei, să se calculeze cu cît se încălzește apa în conductă. e) Turbina antrenează o pompă cu randamentul $\eta' = 0{,}85$, care aruncă apa vertical la înălțimea de 70 m. Care este debitul volumic al apei prin pompă? Se va considera $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

(Adm. Instit. Politehnic, Buc., 1967)

Rezolvare. a) Înălțimea și viteza de cădere a apei sînt $H = l \sin \alpha = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250\ \text{m}$; $v = \sqrt{2gH} = 70\ \text{m/s}$,

$$Q_v = vA = 70 \cdot 400 \cdot 10^{-4} = 2{,}8\ \text{m}^3/\text{s},$$

$$Q_m = \rho Q_v = 10^3 \cdot 2{,}8 = 2\,800\ \text{kg/s}.$$

b) $P = \eta Q_m gH = 0{,}90 \cdot 2\,800 \cdot 9{,}8 \cdot 250 = 6\,174 \cdot 10^3\ \text{W}$.

c) $v' = \frac{A}{A'} v = 10\,v = 10 \cdot 70 = 700\ \text{m/s}$.

d) Energia pierdută într-o secundă prin frecare în conductă este

$$W_t = \frac{1}{250} \cdot mg\,Ht = \frac{1}{250} \cdot 2\,800 \cdot 9{,}8 \cdot 250 \cdot 1 = 27\,440\ \text{J};$$

aceasta fiind preluată de apă sub formă de căldură, rezultă,

$$\Delta t = \frac{W_t}{mc} = \frac{27\,440}{2\,800 \cdot 4\,187} = 0{,}0023°\text{C}.$$

e) Puterea utilă a pompei este $P' = \eta' P = 5\,247{,}9 \cdot 10^3\ \text{W}$, iar debitul volumic al acesteia este

$$Q'_v = \frac{P'}{\rho gH'} = \frac{5\,247{,}9 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 70} = 7{,}6\ \text{m}^3/\text{s}.$$

3.14. Frîna hidraulică a unei guri de tun este formată dintr-un cilindru care conține 8,5 kg dintr-un amestec de apă cu glicerină, de căldură specifică $c = 334{,}9\ \text{J/kg} \cdot \text{grd}$. În cilindru se mișcă un piston cu secțiunea de 140 cm^2 solidar cu piesa, care dă impulsul ghiulelei și care este împinsă după tragere. Acest piston este prevăzut cu o serie de găuri foarte fine, astfel încît la recul, lichidul comprimat de piston traversează găurile și suferă o frecare ce îl încălzește. Știind că presiunea medie în cilindru, în acest timp, este de $1\,960 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2$, iar lungimea reculului 40 cm, să se calculeze ridicarea de temperatură a lichidului (se va neglija influența pereților).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat de piston fiind transformat în căldură, avem

$$Q = L = Spl = 140 \cdot 10^{-4} \cdot 1\,960 \cdot 10^{4} \cdot 0{,}4 = 109\,760 \text{ J}.$$

Această căldură este acumulată de lichid care își ridică temperatura cu Δt și putem scrie

$$Q = mc\,\Delta t;$$

$$\Delta t = \frac{Q}{mc} = \frac{109\,760}{8{,}5 \cdot 334{,}9} = 3{,}8^{\circ}\text{C}.$$

3.15. Un gram de hidrogen, arzînd și transformîndu-se în apă, degajă o căldură de $142{,}35 \cdot 10^{3}$ J. Cît cărbune trebuie ars pentru a disocia un gram de apă, dacă din căldura degajată la arderea cărbunelui se utilizează efectiv 50%? Puterea calorică a cărbunelui este de $293 \cdot 10^{5}$ J/kg.

Rezolvare. Din 18 g de apă se obțin, prin disociere, 2 g de hidrogen, iar dintr-un gram de apă se obțin $2/18 = 1/9$ g hidrogen, care necesită o cantitate de căldură

$$Q = \frac{142{,}35 \cdot 10^{3}}{9} = 15{,}8 \cdot 10^{3} \text{ J}.$$

Dacă m este cantitatea de cărbune necesară, putem scrie ecuația

$$0{,}5 \cdot m \cdot 293 \cdot 10^{5} = 15{,}8 \cdot 10^{3}; \quad m = \frac{15{,}8 \cdot 10^{3}}{146{,}5 \cdot 10^{5}} = 1{,}08 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 1{,}08 \text{ g}.$$

3.16. Un glonte cu masa $m = 50$ g, este aruncat vertical în sus cu viteza inițială de 500 m/s. La distanța de 300 m el întîlnește un obiect și se oprește. Se cere:

a) Energia cinetică a glontelui în momentul în care întîlnește obiectul. b) Cu cîte grade se ridică temperatura glontelui la ciocnire, dacă toată energia lui cinetică se transformă în căldură, care este absorbită de glonte. c) Ce viteză inițială ar trebui să aibă glontele pentru ca să atingă la ciocnire temperatura de topire. Se dau: $c = 460$ J/kg·grd; temperatura inițială a glontelui $t_0 = 0^{\circ}$C și temperatura lui de topire 1 530°C.

(Adm. Fac. Fizică-Matematică, Buc., 1965)

Rezolvare. a) Aplicînd teorema energiei cinetice obținem

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = -mgh;$$

$$W_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 - mgh = m\left(\frac{v_0^2}{2} - gh\right) =$$

$$= 0{,}05\left(\frac{250\,000}{2} - 9{,}8 \cdot 300\right) = 6\,103 \text{ J}.$$

b) $\Delta t = \frac{Q}{mc} = \frac{W_c}{mc} = \frac{6\,103}{0{,}05 \cdot 460} \approx 265\ ^\circ\text{C}.$

c) $W_c' = m\left(\frac{v_0'^2}{2} - gh\right) = mc(t' - 0)\ ;$

$$v_0' = \sqrt{2(gh + ct')} = \sqrt{2(9{,}8 \cdot 300 + 460 \cdot 1530)} =$$
$$= \sqrt{2 \cdot 706\,740} = \sqrt{1\,413\,480} \approx 1189\ \text{m/s}.$$

3.17. Pe un plan orizontal se află două bile cu masele $m_1 = 60$ g și $m_2 = 80$ g. Prima bilă este aruncată vertical în sus cu viteza $v_0 = 60$ m/s, iar după 6 s se aruncă și bila a doua cu aceeași viteză. Se cere:

a) Timpul după care cele două bile se vor întîlni și înălțimea acestui punct. b) Energia cinetică a bilelor la întîlnire. c) Limitele între care poate varia timpul de aruncare a bilei a doua. d) La cădere, bilele se cufundă într-un material plastic cu masa $m_3 = 150$ g și cu căldura specifică $c_3 = 837{,}36$ J/kg·grd; să se deducă temperatura finală a celor trei corpuri cunoscînd temperatura lor inițială $t_0 = 20°\text{C}$, (căldurile specifice ale bilelor sînt $c_1 = c_2 = 418{,}68$ J/kg·grd). Rezistența aerului se neglijează și se va considera $g = 10$ m/s^2.

(Adm. Inst. Politehnic, Buc., 1964)

Rezolvare. a) Prima bilă atinge înălțimea maximă

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{3\,600}{20} = 180\ \text{m}$$

după timpul

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{60}{10} = 6\ \text{s}.$$

Rezultă că bila a doua este aruncată cînd prima începe să coboare. Timpul de întîlnire, socotit de la aruncarea bilei a doua, este dat de relația

$$h_{max} = S_1 + S_2 = \frac{gt^2}{2} + v_0 t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t\ ;$$

$$t = \frac{h_{max}}{v_0} = \frac{180}{60} = 3\ \text{s}.$$

Bilele se vor întîlni deci după 9 s de la aruncarea primei bile sau după 3 s de la aruncarea bilei a doua, la înălțimea

$$h = S_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 60 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 9}{2} = 135\ \text{m}$$

Scanned with OKEN Scanner

față de planul orizontal.

b) $v_1 = gt = 10 \cdot 3 = 30$ m/s ; $v_2 = v_0 - gt = 60 - 10 \cdot 3 = 60 - 30 = 30$ m/s,

$$W_{c_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}060 \cdot 900 = 27 \text{ J},$$

$$W_{c_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}080 \cdot 900 = 36 \text{ J}.$$

c) Prima bilă atinge planul după 12 s de la aruncare, deci timpul de aruncare a bilei a doua va trebui să fie

$$0 < t < 12 \text{ s}.$$

d) Energiile cinetice ale bilelor la căderea pe plan, în materialul plastic, sînt

$$W'_{c_1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot 2gh_{max} = m_1 g h_{max},$$

$$W'_{c_2} = \frac{1}{2} m_2 \cdot 2gh_{max} = m_2 g h_{max}.$$

Aceste energii cinetice sînt consumate sub formă de căldură de cele trei corpuri, care își ridică temperatura de la t_0 la t și avem

$$W'_{c_1} + W'_{c_2} = Q = gh_{max}(m_1 + m'_2) = (m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3) \quad (t - t_0).$$

Din această relație rezultă

$$t = \frac{gh_{max}(m_1 + m_2)}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3} + t_0 =$$

$$= \frac{10 \cdot 180(0{,}060 + 0{,}080)}{(0{,}060 + 0{,}080) \cdot 418{,}68 + 0{,}150 \cdot 837{,}36} + 20 = 21{,}36 \text{ °C}.$$

3.18. La strunjirea unei piese cilindrice cu lungimea $l = 10$ cm și cu diametrul $d = 6$ cm, se cunosc următoarele date: frecvența unghiulară a piesei $\omega = 20\,\pi$ s^{-1}, deplasarea laterală a cuțitului la fiecare rotație, egală cu $a = 1$ mm și forța de rezistență $F = 9\,800$ N. Se cere:

a) Viteza liniară la suprafața de contact a piesei cu cuțitul. b) Lucrul mecanic necesar pentru strunjire. c) Puterea motorului electric al strungului, dacă randamentul acestuia este $\eta = 0{,}80$. d) Ce cantitate de țiței s-ar consuma dacă acționarea strungului s-ar face printr-un motor cu ardere internă, puterea calorică a țițeiului fiind egală cu $q = 418{,}68 \cdot 10^5$ J/kg, iar randamentul motorului, 0,30.

(Adm. Inst. Politehnic, Cluj, 1960)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) $v = r\omega = \frac{d}{2}\omega = 0{,}03 \cdot 20\,\pi = 1{,}884$ m/s.

b) Numărul de rotații pentru strunjirea piesei este $N = \frac{l}{a} = \frac{100}{1} =$ $= 100$ rot.

$$L_u = F \cdot \pi d N = 9800 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}06 \cdot 100 = 184{,}63 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

c) Perioada unei rotații este egală cu $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\,\pi} = 10^{-1}$ s, iar timpul total de strunjire, $t = T \cdot N = 10^{-1} \cdot 10^2 = 10$ s

$$P_u = \frac{L_u}{t} = \frac{184{,}63 \cdot 10^3}{10} = 18{,}463 \cdot 10^3 \text{ W} = 18{,}463 \text{ kW},$$

$$P_m = \frac{P_u}{\eta} = \frac{18{,}463}{0{,}8} = 23 \text{ kW}.$$

d) Motorul cu ardere internă necesită un lucru mecanic

$$L'_m = \frac{L_u}{\eta} = \frac{184{,}63 \cdot 10^3}{0{,}3} = 615433 \text{ J};$$

$$m = \frac{L'_m}{q} = \frac{615433}{418{,}68 \cdot 10^5} = 0{,}0147 \text{ kg} = 14{,}7 \text{ g}.$$

16. Dilatația corpurilor solide și lichide. Termometria

a. Considerații teoretice

1. Coeficientul de dilatație liniară a corpurilor solide este

$$\alpha = \frac{l_t - l_0}{l_0 t}$$

unde l_t este lungimea corpului la temperatura t °C, iar l_0 este lungimea corpului la temperatura 0°C; el se exprimă în grd^{-1}.

2. Lungimea unui corp solid la o temperatură oarecare este

$$l_t = l_0 (1 + \alpha t).$$

3. Dacă o bară este încălzită de la temperatura t_1 la temperatura t_2, lungimea ei finală este dată de relațiile

$$l_{t2} = l_{t_1} \cdot \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} = l_{t_1}[1 + \alpha (t_2 - t_1)] \cdot$$

Scanned with OKEN Scanner

4. Lungirea unei bare, produsă prin dilatare, este egală cu

$$\Delta l = l_{t_2} - l_{t_1} = \alpha l_{t_1}(t_2 - t_1).$$

5. Coeficientul de dilatație în volum este

$$\gamma = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}$$

unde V_0 este volumul corpului la temperatura 0 °C, iar V_t este volumul corpului la temperatura t °C.

6. Volumul unui corp la temperatura t este egal cu

$$V_t = V_0(1 + \gamma t).$$

Între γ și α există relația

$$\gamma = 3\alpha.$$

7. Densitatea unui corp în funcție de temperatura este

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$$

unde ρ_0 este densitatea corpului la 0 °C.

8. Coeficientul de dilatație aparentă al lichidelor este egal cu coeficientul lor de dilatație reală minus coeficientul de dilatație în volum al vasului, adică $\gamma_a = \gamma_r - \gamma_v$.

9. Scările termometrice:

a) în scara termometrică Celsius, intervalul dintre cele două puncte fixe 0 °C și 100°C este împărțit în 100 părți egale;

b) în scara termometrică Réaumur, intervalul dintre punctele fixe este 0° și 80° și este împărțit în 80 părți egale;

c) în scara termometrică Fahrenheit, cele două puncte fixe sînt 32° și 212°, iar intervalul dintre ele este împărțit în 180 părți egale;

d) formula de transformare dintr-o scară termometrică în alta este

$$\frac{C}{5} = \frac{R}{4} = \frac{F - 32}{9}$$

unde C este numărul de grade Celsius, R este numărul de grade Réaumur iar F este numărul de grade Fahrenheit.

b. Probleme

3.19. Roata unei locomotive are diametrul $D = 2$ m la temperatura $t_0 = 0$°C. Introducerea bandajului de oțel pe roată s-a făcut la temperatura $t = 350$°C. Cunoscîndu-se coeficientul de dilatație liniară a oțelului, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}, secțiunea bandajului $S = 20$ cm^2 și modulul lui Young, $E = 19{,}6 \cdot 10^{10}$ N/m^2, se cere:

Scanned with OKEN Scanner

a) Diferența dintre numărul de rotații pe care le execută roata în timpul iernii, la temperatura $t_1 = -25°C$ și numărul de rotații executat de roată în timpul verii, la temperatura $t_2 = 25°C$, pe distanța București—Brașov, de 180 km. b) Forțele de presiune exercitate de bandaj asupra roții în timpul iernii și al verii.

Rezolvare. a) Diametrele bandajului în timpul iernii și al verii sînt respectiv egale cu

$$D_1 = D[1 + \alpha(t_1 - t_0)] = 2(1 - 12 \cdot 10^{-6} \cdot 25) = 1{,}9994 \text{ m},$$
$$D_2 = D[1 + \alpha(t_2 - t_0)] = 2(1 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 25) = 2{,}0006 \text{ m}.$$

Dacă n_1 și n_2 sînt rotațiile făcute pe distanța L, avem

$$n_1 - n_2 = \frac{L}{\pi D_1} - \frac{L}{\pi D_2} = \frac{L(D_2 - D_1)}{\pi D_1 D_2} =$$

$$= \frac{180\,000 \cdot 0{,}0012}{3{,}14 \cdot 1{,}9994 \cdot 2{,}0006} = \frac{216}{12{,}56} \approx 17 \text{ rot.}$$

b) Din relația

$$\Delta l = l\alpha(t - t') = \frac{Fl}{SE} \text{ se deduce}$$

$$F_1 = SE\alpha(t - t_1) = 20 \cdot 10^{-4} \cdot 19{,}6 \cdot 10^{10} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 375 = 17{,}64 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

$$F_2 = SE\alpha(t - t_2) = 20 \cdot 10^{-4} \cdot 19{,}6 \cdot 10^{10} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 325 = 15{,}29 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

3.20. Două bare sînt puse cap la cap; una este de cupru și cealaltă de platină. Ele au la 0°C o lungime totală de 4 m, iar la 100°C o lungime totală de 4,0057 m. Se cere lungimea fiecărei bare știind că coeficientul de dilatație al cuprului este egal cu $17 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}, iar al platinei $85 \cdot 10^{-7}$ grd^{-1}.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Fie l_0 și l_0' lungimile barelor de cupru și platină la 0°C. Conform enunțului, avem

$$l_0 + l_0' = 4. \tag{1}$$

Lungimile barelor la 100°C vor fi egale cu

$$l_{100} = l_0(1 + 0{,}000017 \cdot 100) = 1{,}0017\, l_0,$$

$$l_{100}' = l_0'(1 + 0{,}0000085 \cdot 100) = 1{,}00085\, l_0'.$$

Pe de altă parte

$$l_{100} + l_{100}' = 4{,}0057;$$

$$1{,}0017\, l_0 + 1{,}00085\, l_0' = 4{,}0057. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd ecuațiile (1) și (2) obținem

$$l_0 = 2{,}7058 \text{ m si } l_0' = 1{,}2942 \text{ m.}$$

3.21. O bară AB de lungime 30 cm are capătul A fix, iar capătul B se reazemă pe bara CD (fig. 121), care oscilează în jurul punctului O. Capătul C al barei CD se află în fața unei rigle gradate în dreptul diviziunii zero. Să se afle coeficientul de dilatație al barei AB, știind că dacă încălzim această bară de la 20°C la 100°C capătul C al barei CD coboară în C', cu 12 cm sub C. Se mai știe, de asemenea, că $OB = 0{,}4$ cm și $OC = 80$ cm.

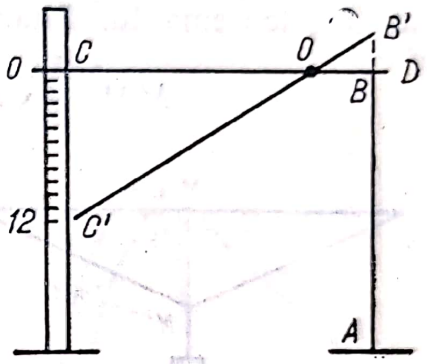


Fig. 121

Rezolvare. Lungirea barei AB este egală cu BB'. Din asemănarea triunghiurilor OBB' și OCC', avem

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{OB}{OC}.$$

Făcînd înlocuirile în această relație, rezultă

$$\frac{BB'}{12} = \frac{0{,}4}{80}$$

de unde rezultă

$$BB' = \frac{4{,}8}{80} = 0{,}06 \text{ cm.}$$

Pe de altă parte, lungirea barei AB este

$$\Delta l = \alpha l (t_2 - t_1)$$

de unde rezultă

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l(t_2 - t_1)} = \frac{BB'}{l(t_2 - t_1)} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{0{,}3(100 - 20)} = 0{,}00025 \text{ grd}^{-1}.$$

3.22. Un fir metalic flexibil, de lungime $2l$, este fixat la cele două extremități A și B care se găsesc într-un plan orizontal (fig. 122). Cu cîte grade trebuie să ridicăm temperatura firului pentru ca deplasarea unei greutăți ce se așază la jumătatea firului să fie de 5 ori cît lungirea firului. Se presupune $2l = 1$ m și coeficientul de dilatație al fierului 0,000018 grd^{-1}.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. După încălzire mijlocul M al firului vine în M'. Lungirea firului este

$$\Delta l = 2l\alpha x$$

unde x este creșterea de temperatură căutată.

Scanned with OKEN Scanner

Prin ipoteza $MM' = 5\,\Delta\,l$, astfel încît

$$MM' = 10\,l\alpha x. \tag{1}$$

Pe de altă parte avem

$$AM' = \frac{AM'\,B}{2} = \frac{2\,l\,(1 + \alpha x)}{2} = l\,(1 + \alpha x)$$

iar din teorema lui Pitagora, rezultă

$$MM' = \sqrt{AM'^2 - AM^2} = l\sqrt{(1 + \alpha x)^2 - 1}. \tag{2}$$

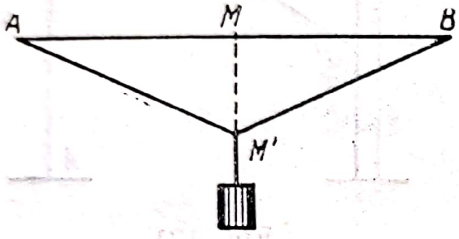


Fig. 122

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$100\,l^2\alpha^2x^2 = l^2\,[(1 + \alpha x)^2 - 1].$$

Făcînd reducerile obținem

$$99\,\alpha x = 2;$$

$$x = \frac{2}{99\alpha} = \frac{2 \cdot 10^6}{18 \cdot 99} = 1122\ ^\circ\text{C}.$$

În cazul general, cînd raportul dintre deplasarea greutății și lungirea firului este egal cu n, adică

$$\frac{MM'}{\Delta l} = n$$

vom avea

$$MM' = n \cdot \Delta\,l = 2\,\alpha n\,l\,x$$

$$2\,\alpha nlx = l\sqrt{(1 + \alpha x)^2 - 1};$$

de aici obținem

$$4\,\alpha n^2\,x = 2 + \alpha x;$$

$$x = \frac{2}{\alpha\,(4n^2 - 1)}.$$

Rezultă că temperatura este independentă de lungimea firului.

3.23. Două lame, una de fier, alta de aramă, paralele și de lungimi egale la temperatura de 0°C, sînt sudate împreună la cele două capete și menținute la distanța $d = 1$ mm una de alta. Se încălzesc lamele la temperatura

Scanned with OKEN Scanner

de 200°C. Sistemul curbîndu-se în formă de arc de cerc (fig. 123), să se calculeze razele celor două lame după curbare. Coeficientul de dilatație al fierului este egal cu $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}, iar al aramei cu $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}.

Rezolvare. Lungimile celor două arce de cupru și de fier sînt

$$l = l_0(1 + \alpha_1 t) \text{ și } l' = l_0(1 + \alpha_2 t).$$

Dacă R și R' sînt razele celor două arce, iar n este unghiul la centru comun, avem

$$R - R' = d; \quad l = \frac{\pi R n}{180}; \quad l' = \frac{\pi R' n}{180}.$$

Din aceste relații rezultă

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'} = \frac{1+\alpha_1 t}{1+\alpha_2 t}.$$

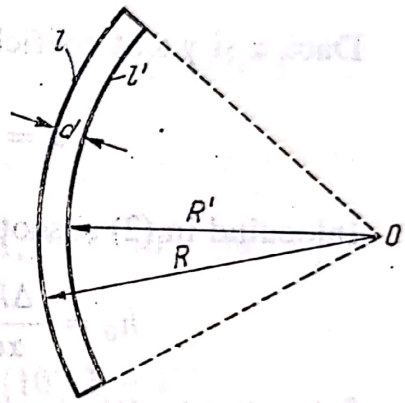


Fig. 123

Prin transformări se obține

$$R' = \frac{1 + \alpha_2 t}{t(\alpha_1 - \alpha_2)} \; d =$$

$$= \frac{1+1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 200}{200 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-5}} \cdot 1 = 835{,}6 \text{ mm},$$

iar $R = 836{,}3$ mm; lama de cupru este în exterior și cea de fier în interior.

3.24. Un disc de fier are la 0°C diametrul egal cu 5,5 m; care este aria discului la 60°C, știind că, pentru fier, coeficientul de dilatație liniară este egal cu 0,0000122 grd^{-1}?

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1942)

Rezolvare. Dacă r_0 este raza discului la 0°C, la temperatura t °C, raza discului va fi egală cu

$$r = r_0(1 + \alpha t).$$

Aria discului la temperatura t°C este egală cu

$$S = \pi r^2 = \pi r_0^2 (1 + \alpha t)^2.$$

Dezvoltînd termenul din paranteză și neglijînd pe $\alpha^2 t^2$, obținem

$$S = \pi r_0^2 (1 + 2\alpha t) = 3{,}14 \cdot 2{,}75^2 (1 + 2 \cdot 0{,}0000122 \cdot 60) =$$

$$= 3{,}14 \cdot 7{,}5625 \cdot 1{,}001464 = 23{,}78 \text{ m}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.25. Un cilindru de fier cu masa de 6 kg se lungește cu 2 mm cînd trece de la 0°C la 100°C. Se cere raza acestui cilindru știind că coeficientul de dilatație cubică este $1/28\,000$ grd^{-1} și densitatea fierului la 0°C este 7800 kg/m^3.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1940)

Rezolvare. Volumul cilindrului la temperatura de 0°C este

$$V_0 = \pi r_0^2 h_0 = \frac{m}{\rho_0}, \tag{1}$$

r_0 fiind raza și h_0 înălțimea cilindrului la 0°C.

Creșterea înălțimii cilindrului este

$$\Delta h = 2 \cdot 10^{-3} = h_0 \alpha t. \tag{2}$$

Dacă α și γ sînt coeficienții de dilatație liniară și cubică, avem

$$\alpha = \frac{\gamma}{3} = \frac{1}{3 \cdot 28\,000} = \frac{1}{84\,000}.$$

Înlocuind în (2) și scoțînd pe h_0, obținem

$$h_0 = \frac{\Delta h}{\alpha t} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 84 \cdot 10^3}{100} = 1{,}68 \text{ m}.$$

Înlocuind în (1) și scoțînd valoarea lui r_0, obținem

$$r_0 = \sqrt{\frac{m}{\pi \rho_0 h_0}} = \sqrt{\frac{6}{3{,}14 \cdot 7\,800 \cdot 1{,}68}} = 0{,}012 \text{ m} = 1{,}2 \text{ cm}.$$

3.26. Într-un cilindru metalic se află un lichid, la temperatura t_1, pînă la înălțimea h. Coeficientul de dilatație liniară al metalului din care este făcut cilindrul este egal cu α, iar coeficientul de dilatație volumică al lichidului γ. Care va fi înălțimea lichidului în cilindru la temperatura t_2?

(R.M.F., nr. 11/1952)

Rezolvare. Dacă notăm cu R raza cilindrului la temperatura t_1 [°C], aria bazei la temperatura t_2 [°C] va fi

$$S_{t_2} = \pi R^2 [1 + 2\alpha (t_2 - t_1),$$

iar volumul lichidului la temperatura t_2

$$V_{t_2} = \pi R^2 h [1 + \gamma (t_2 - t_1].$$

Înălțimea lichidului la temperatura t_2 va fi

$$h_{t_2} = \frac{V_{t_2}}{S_{t_2}} = h \frac{1 + \gamma (t_2 - t_1)}{1 + 2\alpha (t_2 - t_1)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\gamma = 2\alpha$, înălțimea lichidului rămîne constantă și egală cu h, iar dacă $\gamma > 2\alpha$, înălțimea lichidului crește.

3.27. O sferă de metal are volumul de 1,8 dm³ la temperatura de 12°C. Sfera este încălzită pînă ce volumul ei devine 1 815,973 cm³ și apoi este introdusă într-un vas cu 4 kg apă, care-și ridică temperatura la 24°C. Știind că temperatura inițială a apei este de 12°C, că masa sferei este de 20,475 kg, iar căldura specifică a metalului din care-i făcută sfera este de 125,46 J/kg·grd, să se afle temperatura la care a fost încălzită sfera și din ce metal este făcută ea, făcînd abstracție de căldura absorbită de vas cum și de pierderi.

(R.M.F., nr. 8/1952)

Rezolvare. Dacă notăm cu t temperatura la care a fost încălzită sfera, avem

$$20{,}475 \cdot 125{,}46\ (t - 24) = 4 \cdot 4187\ (24 - 12) = 200976\ \text{J}$$

de unde rezultă $t = 102{,}2°\text{C}$.

Creșterea volumului sferei este egală cu

$$\Delta V = 1{,}815973 - 1{,}8 = 0{,}015973\ \text{dm}^3 = 1{,}5973 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3 \cdot$$

Pe de altă parte, avem

$$\Delta V = 1{,}5973 \cdot 10^{-5} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\,\gamma\,(102{,}2 - 12)$$

de unde rezultă coeficientul de dilatație cubică și liniară

$$\gamma = \frac{1{,}5973 \cdot 10^{-5}}{1{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 90{,}2} = 0{,}000098; \quad \alpha = 0{,}000032\ \text{grd}^{-1}.$$

Densitatea sferei la temperatura de 12°C este egală cu

$$\rho_{12} = \frac{M}{V_{12}} = \frac{20{,}475}{1{,}8 \cdot 10^{-3}} = 11\,375\ \text{kg/m}^3 \cdot$$

Densitatea sferei la temperatura 0°C este dată de relația

$$\rho_0 = \rho_{12}\ (1 + \gamma \cdot t) = 11\,375\,(1 + 0{,}000098 \cdot 12) =$$

$$= 11\,375 \cdot 1{,}101 = 11\,388\ \text{kg/m}^3 \cdot$$

Căutînd în tabele la constantele

$$c = 124{,}46\ \text{J/kg} \cdot \text{grd}; \quad \alpha = 0{,}000032\ \text{grd}^{-1}; \quad \rho = 11\,388\ \text{kg/m}^3$$

aflăm că sfera este de plumb.

Scanned with OKEN Scanner

3.28. Un corp este fixat, printr-un fir de dimensiuni neglijabile, sub talerul unei balanțe hidrostatice. Introducem corpul într-un lichid și stabilim echilibrul. Ce relație trebuie să existe între coeficientul de dilatație al corpului și coeficientul de dilatație al lichidului pentru ca echilibrul să se mențină, independent de temperatură?

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1942)

Rezolvare. Să presupunem că corpul de greutate P și volum V se află inițial la aceeași temperatură t ca și lichidul.

Introducînd corpul în lichidul de densitate ρ, pe platanul celălalt va trebui să punem greutatea G, astfel încît să avem

$$G = P - V\rho g, \tag{1}$$

Încălzind corpul și lichidul la temperatura t' și ținînd seamă că G trebuie să rămînă același, vom avea

$$G = P - V'\rho' g. \tag{2}$$

Din (1) și (2) obținem relația

$$V\rho = V'\rho'. \tag{3}$$

Notînd cu γ și γ' coeficienții de dilatație cubică ai sferei și lichidului, avem

$$V' = V[1 + \gamma(t' - t)] \tag{4}$$

$$\rho' = \frac{\rho}{1 + \gamma'(t' - t)}. \tag{5}$$

Ținînd seamă de (4) și (5) relația (3) devine

$$1 + \gamma(t' - t) = 1 + \gamma'(t' - t)$$

de unde rezultă $\gamma = \gamma'$, adică lichidul și corpul trebuie să aibă coeficienți de dilatație egali.

3.29. Se toarnă mercur în două vase comunicante A și B. În ramura A, menținută la temperatura 0°C, înălțimea coloanei de mercur este de 39,3 cm; ramura B este menținută la temperatura de 100°C, iar înălțimea coloanei de mercur este de 40 cm. Să se calculeze coeficientul de dilatație cubică al mercurului.

Rezolvare. Dacă notăm cu h_0 înălțimea coloanei de mercur din ramura A, cu h înălțimea coloanei de mercur din ramura B, cu ρ_0 densitatea mercurului la 0°C și cu ρ densitatea mercurului la $t = 100$°C, avem

$$\frac{h_0}{h} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 + \gamma t}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din această relație rezultă

$$\gamma = \frac{h - h_0}{h_0 t} = \frac{40 - 39{,}3}{39{,}3 \cdot 100} = 0{,}000178 \text{ grd}^{-1}.$$

3.30. Un rezervor termometric este prevăzut cu un tub divizat în părți egale de volum, fiecare diviziune reprezentînd 1 cm³. La temperatura 0°C mercurul marchează diviziunea 0, iar la temperatura 100°C, el marchează diviziunea 250. Să se calculeze volumul ocupat de mercur în starea inițială la temperatura 0°C știind că coeficientul de dilatație al mercurului este $\gamma = 0{,}00018 \text{ grd}^{-1}$, iar coeficientul de dilatație cubică al sticlei este $\gamma_s = 0{,}000026 \text{ grd}^{-1}$.

R e z o l v a r e. *Metoda I.* Ceea ce citim în tub este dilatația aparentă a mercurului.

Coeficientul de dilatație reală sau absolută a mercurului este $\gamma = 0{,}00018 \text{ grd}^{-1}$, iar cel aparent este

$$\gamma_a = \gamma - \gamma_s = 0{,}00018 - 0{,}000026 = 0{,}000154 \text{ grd}^{-1}.$$

Pe de altă parte

$$\gamma_a V_0 (t - t_0) = \Delta V$$

de unde

$$V_0 = \frac{\Delta V}{\gamma_a (t - t_0)} = \frac{250}{0{,}000154 \cdot 100} = 16\,234 \text{ cm}^3.$$

Metoda II. Volumul mercurului după dilatație este

$$V_1 = V_0 [1 + \gamma (t - t_0)].$$

Volumul tubului după dilatație este egal cu

$$V_2 = V_0 [1 + \gamma_s (t - t_0)].$$

Creșterea volumului mercurului, citită pe tub, va fi

$$\Delta V = V_1 - V_2 = V_0 (t - t_0)(\gamma - \gamma_s),$$

de unde rezultă aceeași valoare pentru V_0.

3.31. O bucată de metal, al cărui coeficient de dilatație liniară este α, este cufundată în mercur. La 0 °C ea este împinsă de jos în sus cu o forță F, iar la 60°C cu o forță F'. Să se găsească valoarea coeficientului de dilatație absolută al mercurului. **Aplicație:** $F = 490{,}500 \cdot 10^{-3}$ N; $F' = 485{,}595 \cdot 10^{-3}$ N și $\alpha = 382 \cdot 10^{-8} \text{ grd}^{-1}$.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1948)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Dacă V_0 este volumul bucății de metal și ρ_0 – densitatea mercurului la temperatura $t_0 = 0°$, iar γ – coeficientul de dilatație al mercurului, putem scrie

$$F = V_0 \rho_0 g \; ; \quad F' = V_0 (1 + 3\alpha t) \cdot \frac{\rho_0}{1 + \gamma t} \cdot$$

Prin împărțirea acestor relații se obține

$$\frac{F}{F'} = \frac{1 + \gamma t}{1 + 3\alpha t} \; ; \quad \gamma = \frac{F - F'}{F' t} + 3\alpha \frac{F}{F'} \cdot$$

Făcînd înlocuirile cu date numerice, obținem

$$\gamma = \frac{4{,}905}{485{,}595 \cdot 60} + \frac{1146 \cdot 490{,}5}{485{,}595 \cdot 10^8} = 179 \cdot 10^{-6} \text{ grd}^{-1}.$$

3.32. Pentru determinarea coeficientului de dilatație al petrolului lampant se ia un balonaș de sticlă care este cîntărit în petrol la temperaturi diferite. Cîntărirea la temperatura $t = 15°C$ a dat pentru masa dezlocuită de balonaș, $M = 90$ g, iar cea la temperatura $t_1 = 85°$, $M_1 = 84{,}3552$ g. Cunoscînd coeficientul de dilatație volumică al balonului, $\gamma_s = 0{,}000024$ grd^{-1}, să se calculeze coeficientul de dilatație volumică al petrolului lampant.

(R.M.F., nr. 3/1954)

Rezolvare. Cantitatea de lichid dezlocuit de balonaș la temperatura t este egală cu

$$M = V_0 (1 + \gamma_s t) \frac{\rho_0}{1 + \gamma t} \qquad (1)$$

unde V_0 este volumul balonașului la 0°C, ρ_0 – densitatea petrolului la 0°C iar γ – coeficientul de dilatație volumică al petrolului.

La temperatura t_1 cantitatea de lichid dezlocuit este

$$M_1 = V_0 (1 + \gamma_s t_1) \frac{\rho_0}{1 + \gamma t_1} \cdot \qquad (2)$$

Împărțind (1) cu (2) rezultă

$$\frac{M}{M_1} = \frac{1 + \gamma_s t}{1 + \gamma_s t_1} \cdot \frac{1 + \gamma t_1}{1 + \gamma t} \cdot \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (3) rezultă

$$\gamma = \frac{M(1+\gamma_s t_1) - M_1(1+\gamma_s t)}{M_1 t_1 (1+\gamma_s t) - M t (1+\gamma_s t_1)}.$$

Făcînd înlocuirile, obținem

$$\gamma = \frac{5{,}789}{5820} = 0{,}001 \text{ grd}^{-1}.$$

3.33. Un lingou de oțel cu masa $m = 936$ kg își micșorează temperatura în timpul prelucrării, de la $t_1 = 1\,120°C$ la $t_2 = 760°C$. Știind că densitatea oțelului la 0°C este egală cu $\rho_0 = 7\,800$ kg/m³, iar coeficientul de dilatație liniară al oțelului este $\alpha = 10^{-5}$ grd^{-1}, se cere să se afle cu cît s-a micșorat volumul lingoului în timpul prelucrării.

(R.F.Ch., nr. 10/1965)

Rezolvare. $\Delta V = V_0 \gamma \Delta t = \frac{m}{\rho_0} \cdot 3\alpha (t_2 - t_1) =$

$$= \frac{936}{7{,}8 \cdot 10^3} \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot (1120 - 760) = 13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

3.34. O bară de oțel aflată la $-20°C$, cu lungimea de 50 cm, secțiunea de 10 cm², densitatea 7 800 kg/m³ la 0°C și căldura specifică de 502,416 J/kg·grd, este încălzită într-o instalație cu randamentul de 25 %, prin consumarea a 0,1 kg petrol lampant, care are puterea calorică de $4{,}1868 \cdot 10^7$ J/kg. Pentru a-i împiedica dilatația, bara este supusă unei compresiuni longitudinale. Se cere:

a) Masa barei b) Cantitatea de căldură primită de bară. c) Temperatura la care se încălzește bara. d) Lungirea, prin încălzire, a barei lăsată liberă. Se dau: coeficientul de dilatație liniară $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}.

(Olimpiada de fizică, 1965)

Rezolvare. a) Densitatea barei la temperatura $t_1 = -20°C$, este

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1+\gamma t_1} = \frac{\rho_0}{1+3\alpha t_1} = \frac{7800}{1 - 3 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 7805{,}6 \text{ kg/m}^3;$$

$$m = V_1 \rho_1 = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 7805{,}6 = 3{,}9028 \text{ kg}.$$

b) $Q = m_1 q = 0{,}25 \cdot 0{,}1 \cdot 4{,}1868 \cdot 10^7 = 104{,}67 \cdot 10^4$ J.

Scanned with OKEN Scanner

c) Creșterea de temperatură este egală cu

$$\Delta t = \frac{Q}{mc} = \frac{104{,}67 \cdot 10^4}{3{,}9028 \cdot 502{,}416} = 533{,}8\ ^\circ\text{C} = t - t_1;$$

$$t = \Delta t + t_1 = 533{,}8 - 20 = 513{,}8\ ^\circ\text{C}.$$

d) Din împărțirea relațiilor $l_1 = l_0\,(1 + \alpha t_1)$ și $l = l_0\,(1 + \alpha t)$ și aplicarea unei proprietăți cunoscute a proporțiilor rezultă

$$\Delta l = \frac{\alpha(t - t_1)}{1 + \alpha t_1}\, l_1 = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 533{,}8}{1 - 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20} \cdot 0{,}5 = 0{,}0032\text{m} = 3{,}2\ \text{mm}.$$

3.35. O sferă de fier cu diametrul de 10 cm la temperatura $t_1 = 400^\circ$C, se introduce într-un vas care conține 2 kg apă la temperatura $t_2 = 16^\circ$C. În apa din vas se găsește o bară de cupru, care la această temperatură are lungimea $l = 15$ cm și secțiunea $S = 0{,}02$ cm². Neglijîndu-se capacitatea calorică a vasului și considerîndu-se pentru fier: $\rho_{1_0} = 7\,800$ kg/m³, $c_1 = 459{,}5$ J/kg·grd, $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}; pentru cupru: $\rho_{2_0} = 8\,900$ kg/m³, $c_2 = 376{,}8$ J/kg·grd, $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}, iar pentru apă: $\gamma = 18 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}; $c_3 = 4\,186{,}8$ J/kg·grd,se cere:

a) Temperatura de echilibru termic. b) Volumul sferei. c) Volumul apei. d) Lungimea barei. Datele de la punctele b, c, d se vor calcula pentru temperatura de echilibru.

(R.F.Ch., nr. 9/1965)

Rezolvare. a) Se calculează masele sferei și barei cu formula $m = \frac{V_t}{1 + 3\alpha t} \cdot \rho_0$ și se găsește $m_1 = 4{,}024$ kg și $m_2 = 2{,}668$ kg.

Dacă $m_3 = 2$ kg este masa apei, temperatura de echilibru va fi

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + (m_2 c_2 + m_3 c_3)\, t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3} = 85\ ^\circ\text{C}.$$

b) Volumul sferei scade și este

$$V_t = V_{t_1}[1 + 3\alpha_1 (t - t_1)] = V_{t_1}[1 - 3\alpha_1 (t_1 - t)] = 517\ \text{cm}^3 \cdot$$

c) Volumul apei la 0°C este de 2000 cm³, iar la temperatura de echilibru

$$V_a = V_0 (1 + \gamma t) = 2030{,}6\ \text{cm}^3 \cdot$$

d) Lungimea barei crește fiind egală cu

$$l_1 = l_{t_2}[1 + \alpha_2 (t - t_2)] = 15{,}018\ \text{cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.36. Într-un tub de fier în care se află mercur se introduce o bucată de platină. Se cere:

a) Raportul dintre masa platinei și a mercurului pentru ca, la orice temperatură, tubul să rămînă plin, fără să se verse mercurul. b) Ce condiție trebuie îndeplinită pentru ca problema să fie posibilă. c) Să se calculeze masa platinei știind că secțiunea tubului este $S = 2$ cm^2 și lungimea sa $l = 7{,}5$ cm.

Temperatura la care se află corpurile este 0 °C, densitatea platinei 21 200 kg/m^3, iar a mercurului 13 600 kg/m^3. Coeficientul de dilatație liniară al fierului este $118 \cdot 10^{-7}$ grd^{-1}, al platinei $88 \cdot 10^{-7}$ grd^{-1} și coeficientul de dilatație volumică al mercurului $18 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}.

Rezolvare. a) Din egalarea volumului tubului cu suma volumelor mercurului și platinei la temperatura t [°C], se obține

$$\gamma V_0 = \gamma' V_0' + \gamma'' V_0''$$

unde γ, γ' și γ'' sînt coeficienții de dilatație volumică respectiv ai tubului, mercurului și platinei.

Ținînd seama că la temperatura de 0°C, $V_0 = V_0' + V_0''$, se obține

$$\frac{V_0''}{V_0} = \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma - \gamma''} \text{ si } \frac{M''}{M'} = \frac{\rho_0''}{\rho_0'} \cdot \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma - \gamma''} \tag{1}$$

b) Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca $\gamma' - \gamma > 0$ și $\gamma - \gamma'' >$ de unde rezultă $\gamma' > \gamma > \gamma''$.

c) Din relația (1) și din $V_0 = V'_0 + V''_0$ se obțin ecuațiile

$$\frac{M''}{M'} = \frac{21{,}2}{13{,}6} \cdot \frac{1446}{90} \approx 25 \tag{2}$$

$$Sl = \frac{M'}{\rho_0'} + \frac{M''}{\rho_0''}; \quad 15 = \frac{M'}{13{,}6} + \frac{M''}{21{,}2}. \tag{3}$$

Rezolvînd acest sistem se obține

$$M' \approx 12 \text{ g si } M'' \approx 300 \text{ g.}$$

3.37. Un areometru destinat pentru lichide mai grele decît apa se cufundă pînă la diviziunea zero în apă la temperatura de 4 °C și pînă la diviziunea 15 într-o soluție sărată de densitate 1116 kg/m^3. Se cufundă apoi areometrul în sulfură de carbon la temperaturile de 0 °C și 40 °C; la temperatura 0 °C, areometrul se cufundă pînă la diviziunea 30, iar la temperatura de 40 °C, el se cufundă pînă la diviziunea 26. Se cere să se calculeze:

a) Coeficientul de dilatație al sulfurii de carbon: b) densitatea sulfurii de carbon la 0 °C. c) Densitatea sulfurii de carbon la 40 °C. Se va neglija dilatația areometrului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Să notăm cu M și V — masa și volumul areometrului, cu v — volumul unei diviziuni, cu ρ_0 — densitatea sulfurii de carbon la 0 °C, cu ρ — densitatea sulfurii de carbon la temperatura de 40°C, iar cu γ — coeficientul de dilatație volumică al sulfurii de carbon.

Introdus în apă, aerometrul se cufundă complet și avem

$$M = V \cdot 10^3 \cdot \tag{1}$$

Introdus în soluția sărată, dezlocuiește un volum $V - 15\,v$ de lichid și putem scrie

$$M = 1116\,(V - 15v). \tag{2}$$

În sulfura de carbon la 0 °C, dezlocuiește un volum $V - 30\,v$ de lichid și avem

$$M = \rho_0\,(V - 30\,v). \tag{3}$$

Pentru sulfura de carbon la 40 °C putem scrie, de asemenea

$$M = \rho\,(V - 26\,v). \tag{4}$$

Din relațiile (1) și (2) deducem

$$V = 144{,}3\,v. \tag{5}$$

Volumul sulfurii de carbon la 0 °C este egal cu $V_0 = V - 30\,v$.

De la 0 °C la 40 °C, volumul sulfurii de carbon crește cu $V = 30\,v - 26\,v = 4\,v$.

Pe de altă parte, creșterea de volum este

$$\Delta V = V_0 \gamma\,(t - t_0).$$

Din această relație rezultă

$$4\,v = (V - 30\,v) \cdot \gamma \cdot (40 - 0)$$

și ținînd seamă de (5) vom avea

$$\gamma = \frac{4\,v}{v\,(144{,}3 - 30) \cdot 40} = \frac{1}{1143} = 0{,}000875\ \text{grd}^{-1} \cdot$$

b) Din relațiile (1), (3) și (5) rezultă

$$\rho_0 = \frac{V \cdot 10^3}{V - 30\,v} = \frac{144{,}3 \cdot 10^3}{114{,}3} = 1262{,}4\ \text{kg/m}^3 \cdot$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Densitatea sulfurii de carbon la temperatura t_0 se deduce din relația

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma\,(t - t_0)} = \frac{1262{,}4}{1 + 0{,}000875 \cdot 40} = \frac{1262{,}4}{1{,}0350} = 1219{,}7 \text{ kg/m}^3 \cdot$$

3.38. La ce temperatură un termometru Celsius și unul Fahrenheit vor marca, pe scările lor, același număr de diviziuni (grade) socotite de la indicația zero a fiecăruia? Care este temperatura corespunzătoare acestui număr de grade la un termometru Réaumur?

Rezolvare. Din relația

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9} = \frac{R}{4} \qquad (1)$$

luăm primele două rapoarte, în care punem $C = F = x$ și obținem

$$\frac{x}{5} = \frac{x - 32}{9}$$

de unde rezultă $x = -40\ ^\circ\text{C} = -40\ ^\circ\text{F}$.

Din ultimele două rapoarte ale lui (1) obținem

$$\frac{-40 - 32}{9} = \frac{R}{4}; \quad R = -32\ ^\circ\text{R}.$$

3.39. Așezat în gheață care se topește, un termometru arată temperatura $t_0 = 3\ ^\circ\text{C}$, iar în vaporii apei care fierbe la presiunea de $1{,}013 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$, termometrul arată temperatura $t_1 = 101{,}4\ ^\circ\text{C}$. Ce temperatură va arăta termometrul cufundat în vaporii alcoolului metilic, care fierbe la temperatura de 66,9 °C?

Rezolvare. Gheața topindu-se la 0 °C, iar apa fierbînd la 100 °C, diferența $(t_1 - t_0)$ de diviziuni ale termometrului reprezintă 100 °C. Rezultă că 1 °C reprezintă $\frac{t_1 - t_0}{100}$ diviziuni (grade) de pe termometrul cu care s-a făcut experiența. Temperatura t °C la care fierbe alcoolul metilic, va reprezenta $\frac{t_1 - t_0}{100} \cdot t$ grade ale termometrului, socotite de la diviziunea t_0. Socotit de la diviziunea 0 °C a termometrului, acesta va indica

$$t_2 = \frac{t_1 - t_0}{100} \cdot t + t_0 = \frac{101{,}4 - 3}{100} \cdot 66{,}9 + 3 = 68{,}83\,^\circ\text{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

17. Variația volumului, presiunii și densității gazelor cu temperatura. Legile gazelor perfecte

a. Considerații teoretice

1. Legea Boyle-Mariotte pentru aceeași masă de gaze, la temperatura constantă, este

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 = p_n V_n = C.$$

2. La temperatura constantă densitățile aceleiași mase de gaz sînt direct proporționale cu presiunile, adică

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

3. Volumul aceleiași mase de gaz, la temperatura t °C, cînd presiunea rămîne constantă, este dat de legea Gay-Lussac

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

unde V_0 este volumul gazului la temperatura 0 °C.

Coeficientul de dilatație α este același pentru toate gazele și are valoarea

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0{,}00367 \text{ grd}^{-1}.$$

4. Dacă volumul unui gaz este invariabil, presiunea gazului, în funcție de temperatură, este dată de legea lui Charles

$$p = p_0 (1 + \beta t)$$

p_0 fiind presiunea gazului la temperatura 0 °C, iar $\beta = \alpha = \frac{1}{273}$.

5. Ecuația generală a gazelor perfecte, sau legea Boyle-Mariotte-Gay-Lussac, este

$$pV = p_0 V_0 (1 + \alpha t).$$

Dacă $\frac{p_0 V_0}{273} = R$ si $T = 273 + t°$, ecuația generală a gazelor perfecte pentru 1 kmol de gaz se poate scrie sub formele

$$pV = RT;$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3} = \ldots = \frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $T = 273 + t$ este temperatura absolută a gazului în grade Kelvin (°K), iar $R = 8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot °\text{K}}$ este constanta gazelor perfecte.

6. Legea lui Dalton pentru amestecul de gaze este

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2} + \frac{p_3V_3}{T_3} + \ldots + \frac{p_nV_n}{T_n}$$

unde p, V și T sînt respectiv presiunea, volumul și temperatura amestecului, iar $p_1, p_2, \ldots$; $V_1, V_2, \ldots$; $T_1, T_2, \ldots$ sînt respectiv presiunile, volumele și temperaturile absolute ale gazelor componente.

7. Masa unui volum de gaz, în funcție de temperatură și presiune este

$$M = V\rho_r\rho' \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t} = V\rho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t}$$

unde V este volumul gazului la temperatura t și presiunea p, p_0 — presiunea normală de $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m², ρ' — densitatea aerului, ρ_r — densitatea relativă a gazului în raport cu aerul, iar ρ_0 — densitatea absolută a gazului, toate la presiunea și temperatura normală.

b. Probleme

3.40. Într-un tub de sticlă, închis la un capăt, se găsește mercur și o coloană de aer. Coloana de mercur are înălțimea de 12,5 cm. Dacă întoarcem tubul cu capătul închis în sus, lungimea coloanei de aer este de 7 cm. Dacă îl ținem cu partea deschisă în sus (fig. 124), lungimea coloanei de aer este de 5 cm. Să se calculeze presiunea atmosferică.

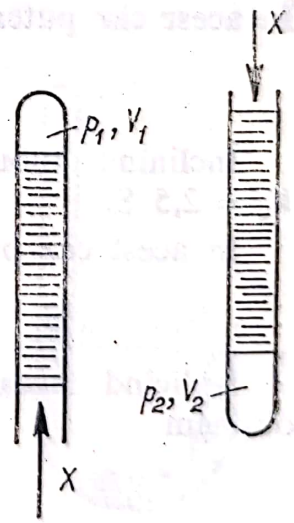


Fig. 124

Rezolvare. Notînd cu p_1 și p_2 presiunile aerului din tub în cele două experiențe, iar cu X presiunea atmosferică, exprimate în centimetri coloană de mercur, putem scrie

$$X = 12{,}5 + p_1 \; ; \quad X + 12{,}5 = p_2 \cdot$$

Eliminînd pe X între aceste relații se obține

$$p_2 - p_1 = 25. \qquad (1)$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte aerului închis în tub, obținem

$$7p_1 = 5p_2 \cdot \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se obține

$$p_1 = 62{,}5 \text{ cm Hg} = 0{,}833 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2,$$

$p_2 = 87{,}5$ cm Hg $= 1{,}663$ N/m² și $X = 75$ cm Hg $= 10^5$ N/m².

Scanned with OKEN Scanner

3.41. Un barometru cu mercur conține puțin aer în camera barometrică, astfel încît în poziție verticală înălțimea coloanei de mercur este de 750 mm, iar lungimea camerei barometrice este de 11 cm. Dacă se înclină tubul barometric astfel încît lungimea camerei barometrice să devină de 2,5 cm, diferența de nivel între mercurul din tub și vasul în care este așezat (fig. 125) este de 743 mm. Să se calculeze presiunea atmosferică X în timpul celor două experiențe!

Rezolvare. Cînd tubul este vertical, presiunea aerului din camera barometrică este p_1, iar volumul său $V_1 = 11\ S$ (S este secțiunea tubului).

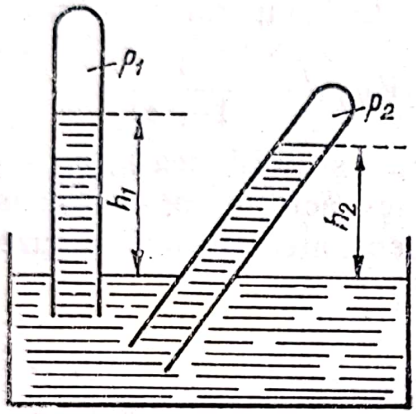


Fig. 125

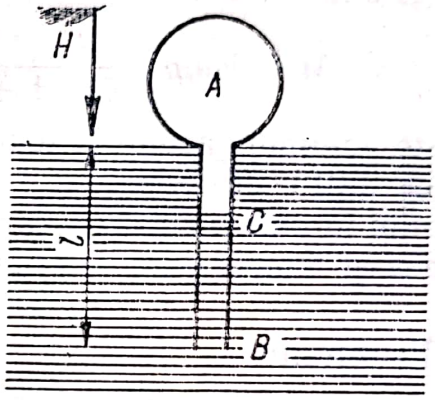


Fig. 126

În acest caz putem scrie

$$X = p_1 + h_1 = p_1 + 750. \tag{1}$$

Înclinînd tubul, presiunea aerului închis este p_2, iar volumul său $V_2 = 2{,}5$ S.

În acest caz putem scrie

$$X = p_2 + h_2 = p_2 + 743. \tag{2}$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte aerului închis în camera barometrică, obținem

$$11\ p_1 = 2{,}5\ p_2 \cdot \tag{3}$$

Rezolvînd ecuațiile (1), (2) și (3) rezultă

$p_1 = 27{,}398 \cdot 10^2$ N/m², $p_2 = 120{,}498 \cdot 10^2$ N/m² și $X = 0{,}85 \cdot 10^5$ N/m².

3.42. Un balon este terminat cu un tub cilindric AB (fig. 126) avînd lungimea $l = 50$ cm și secțiunea $S = 1$ cm².

Scanned with OKEN Scanner

Balonul, inclusiv tubul, are volumul $V = 1$ l și este plin cu aer la temperatura 0 °C și presiunea $H = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².

Tubul balonului este introdus în întregime și în poziție verticală într-o baie de mercur, aflat tot la temperatura de 0 °C. Se cere înălțimea BC pînă la care se poate ridica mercurul în tub.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Exprimăm presiunea în centimetri coloană de Hg. Înainte de a se introduce tubul în baia de mercur, aerul din balon are presiunea $p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² $= H = 76$ cm Hg și volumul $V_1 = V = 1000$ cm³.

Fie $X = BC$ înălțimea la care va urca mercurul în tub.

Presiunea aerului închis în balon este dată de relația

$$p_2 = H + l - X\,; \quad p_2 = 126 - X.$$

Volumul aerului închis în balon este

$$V_2 = V - S\,X = 1000 - X.$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte, rezultă

$$76 \cdot 1000 = (126 - X)\ (1000 - X)$$

de aici găsim ecuația

$$X^2 - 1126\,X + 50\,000 = 0.$$

care, rezolvată, ne dă $X = 46{,}2$ cm.

3.43. Un tub barometric curbat ACC', de secțiune constantă S, conține mercur pînă la nivelul $C - C'$ (fig. 127), iar pe lungimea $AC = 100$ cm, se află aer. Ramura C' este în comunicație cu presiunea atmosferică de $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m². Presiunea atmosferică crescînd de la $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² la $1{,}2 \cdot 10^5$ N/m², să se calculeze volumul și presiunea aerului închis.

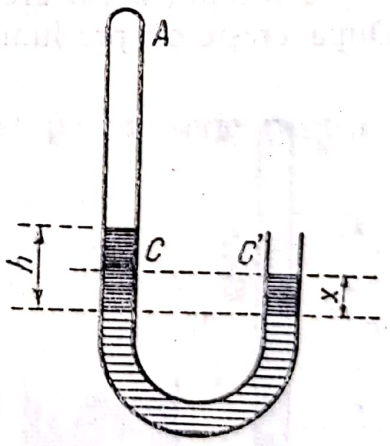


Fig. 127

Rezolvare. Exprimînd presiunea în centimetri coloană de Hg avem $H_1 = 76$ cm Hg și $H' = 1{,}2 \cdot 10^5$ N/m² $= 90$ cm Hg.

Nivelul mercurului fiind același în ambele ramuri, presiunea aerului din ramura AC este egală cu $p_1 = H = 76$ cm Hg, iar volumul $V_1 = 100\ S$. După creșterea presiunii atmosferice, nivelul mercurului din ramura C' scade cu x, iar în ramura AC urcă cu aceeași cantitate față de nivelul inițial. Diferența de nivel a mercurului din cele două ramuri este $h = 2x$.

Presiunea aerului închis în tub va fi

$$p_2 = H' - h = 90 - 2x$$

Scanned with OKEN Scanner

iar volumul său

$$V_2 = (100 - x)\, S.$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte, avem

$$76 \cdot 100\, S = (90 - 2x)(100 - x)\, S$$

de unde obținem ecuația

$$x^2 - 145\, x + 700 = 0;$$

aceasta ne dă $x = 5$ cm. Volumul aerului închis este $V_2 = 95$ S cm³, iar presiunea $p_2 = 90 - 10 = 80$ cm Hg $= 1{,}0663 \cdot 10^5$ N/m².

3.44. Un tub îndoit ca în fig. 128 este prevăzut cu o cuvetă C cu secțiunea S de 10 ori mai mare decît secțiunea s a ramurii A. În ramura A se află aer pe o înălțime de 100 cm, presiunea exterioară fiind egală cu $H = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m², iar mercurul la același nivel în cuvetă și în tub. Să se calculeze volumul și presiunea aerului din tub cînd presiunea exterioară devine $H' = 1{,}026 \cdot 10^5$ N/m².

Rezolvare. Exprimăm presiunile în centimetri coloană de Hg: $p_1 = 76$ cm Hg, $p' = H' = 77$ cm Hg.

La început aerul are presiunea $p_1 = 76$ cm Hg și volumul $V_1 = 100\, s$. După creșterea presiunii exterioare nivelul mercurului din cuveta C scade cu x, iar în ramura A crește cu $10x$.

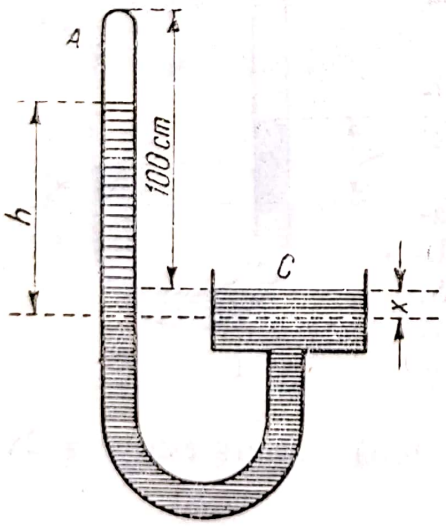


Fig. 128

Diferența de nivel va fi egală cu $h = 11x$. Presiunea aerului din tub va fi $p_2 = H' - h = 77 - 11x$, iar volumul aerului $V_2 = (100 - 10x)\, s$.

Aplicînd legea Boyle-Mariotte, avem

$$76 \cdot 100 s = (77 - 11x)(100 - 10x) s.$$

De aici rezultă ecuația

$$11\, x^2 - 187x + 10 = 0$$

care ne dă valoarea $x = 0{,}54$ mm.

Volumul și presiunea aerului închis în tub vor fi

$$V_2 = 99{,}46 s, \quad p_2 = 76{,}406 \text{ cm Hg} = 1{,}018 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot$$

3.45. Un tub $ABCD$ îndoit în formă de U (fig. 129), cu secțiunea interioară $S = 1$ cm², are ramurile $AB = CD = 150$ cm, iar ramura $BC = 100$ cm și este plin cu aer la presiunea atmosferică $H = 0{,}9997 \cdot 10^5$ N/m². Ramura AB este introdusă într-un lichid cu densitatea $\rho = 1500$ kg/m³ = 1,5 g/cm³ pe lungimea $h = 100$ cm, iar ramura DC este introdusă în apă pe aceeași lungime $h = 100$ cm. Se cere:

a) Cu cît se vor ridica cele două lichide în ramurile AB și DC. b) Presiunea aerului închis în tub după introducerea lui în cele două lichide.

Rezolvare. Exprimăm presiunile în centimetri coloană de Hg: $p_1 = H = 75$ cm Hg.

a) Volumul inițial ocupat de aer în tub este

$$V_1 = (2 \cdot 150 + 100)\, S = 400 \text{ cm}^3,$$

iar presiunea lui

$$p_1 = H = 75 \text{ cm Hg} = \rho' g H$$

unde $\rho' = 13\,600$ kg/m³ = 13,6 g/m³ este densitatea mercurului.

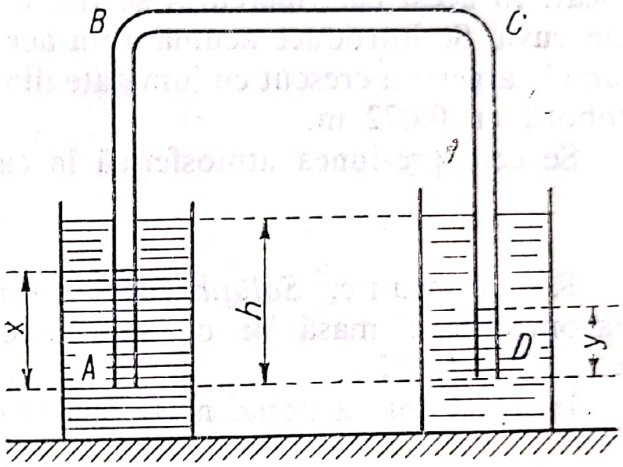


Fig. 129

După introducerea tubului în vase, lichidul din ramura AB va urca cu x, iar cel din ramura DC cu y. Volumul aerului închis în tub va fi de data aceasta

$$V_2 = (400 - x - y)\, S = 400 - x - y \qquad (1)$$

iar presiunea respectivă va fi egală cu p_2.

Densitatea apei fiind $\rho_a = 1000$ kg/m³ = 1 g/cm³ putem scrie pentru fiecare ramură

$$p_2 + \rho g x = \rho' g H + \rho g h, \qquad (2)$$

$$p_2 + \rho_a g y = \rho' g H + \rho_a g h. \qquad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3) obținem

$$y = 1{,}5\, x - 50; \quad p_2 = g\,(1170 - 1{,}5\, x);$$

$$V_2 = 450 - 2{,}5\, x.$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte $p_1 V_1 = p_2 V_2$, obținem

$$400\, \rho' g H = g\,(1\,170 - 1{,}5\, x)\,(450 - 2{,}5\, x);$$

$$408\,000 = (1\,170 - 1{,}5\, x)\,(450 - 2{,}5\, x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ultima relație obținem ecuația

$$3{,}75\,x^2 - 3\,600\,x + 118\,500 = 0. \qquad (4)$$

Rezolvînd ecuația (4) obținem $x = 34{,}13$ cm, iar $y = 1{,}2$ cm.

b) Presiunea aerului din tub este

$$p_2 = 981\,(1\,170 - 1{,}5 \cdot 34{,}13) = 109{,}75 \cdot 10^4\ \text{dyn/cm}^2 = 1{,}0975 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2.$$

3.46. Un barometru cu mercur conține în camera barometrică și aer uscat. În acest caz, mercurul se ridică numai la 0,552 m deasupra nivelului din cuvă. Se introduce acuma atîta aer cît era la început, din care cauză volumul camerei a crescut cu jumătate din cît era inițial, iar coloana de mercur a coborît cu 0,072 m.

Se cere presiunea atmosferică la care s-a lucrat.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. *Soluția I.* Să presupunem că inițial se află în camera barometrică o masă m de aer, care ocupă volumul V_1 sub presiunea $p_1 = H - 0{,}552$.

În experiența a doua, masa de aer devine 2m, iar volumul

$$V = V_1 + \frac{V_1}{2} = \frac{3\,V_1}{2}.$$

Volumul ocupat numai de masa m, va fi egal cu

$$V_2 = \frac{1}{2}\,V = \frac{3\,V_1}{4}.$$

Presiunea aerului în această experiență va fi egală cu

$$p_2 = H - (0{,}552 - 0{,}072) = H - 0{,}480.$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte masei m de aer, se obține

$$(H - 0{,}552)\,V_1 = (H - 0{,}480)\,\frac{3\,V_1}{4}.$$

De aici obținem $H = 0{,}768$ m Hg $= 1{,}02 \cdot 10^5$ N/m².

Soluția II. Aplicăm legea amestecurilor gazului aflat în tub și celui intrat din afară.

Dacă notăm cu p_1, V_1, p_2, V_2 presiunile și volumele celor două gaze, iar cu p și V, presiunea și volumul amestecului, putem scrie

$$pV = p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Presiunea atmosferică la care s-a lucrat fiind egală cu H, avem

$$p = H - 0{,}480; \quad V = V_1 + \frac{V_1}{2} = 1{,}5\, V_1;$$

$$p_1 = H - 0{,}552; \quad p_2 = H.$$

Masa de aer care intră din afară trece de la presiunea H și volumul V_2 la presiunea p_1 și volumul V_1, astfel încît putem scrie legea Boyle-Mariotte

$$HV_2 = p_1 V_1;$$

de aici rezultă

$$V_2 = \frac{p_1}{H} V_1 = \frac{H - 0{,}552}{H} V_1.$$

Înlocuind în (1) obținem

$$1{,}5\, V_1 (H - 0{,}480) = V_1 (H - 0{,}552) + H \frac{H - 0{,}552}{H} V_1;$$

$$1{,}5\,(H - 0{,}480) = (H - 0{,}552) + (H - 0{,}552).$$

Din ultima relație rezultă

$$0{,}5\, H = 0{,}384; \; H = 0{,}768 \text{ mm Hg} = 1{,}02 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

3.47. Un vas are două ramuri verticale A și B de secțiuni S și s și conține mercur. Ramura A este închisă, iar ramura B poate fi pusă în comunicație cu un rezervor R în care se află un gaz (fig. 130). Cînd mercurul este la același nivel MN în ambele ramuri A și B, el se află la presiunea H. Cînd deschidem robinetul și punem în comunicație B cu R, mercurul urcă în B cu lungimea a. Să se exprime în centimetri coloană de Hg presiunea finală în rezervorul R.

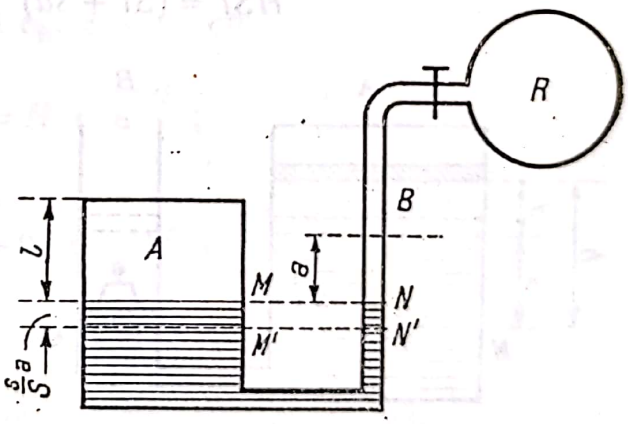


Fig. 130

Aplicație: $S = 10$ cm^2; $s = 2$ cm^2; $a = 10$ cm; $l = 20$ cm; $H = 1{,}025 \cdot 10^5$ N/m^2.

Rezolvare. Exprimăm presiunea în centimetri coloană de Hg: $H = 77$ cm Hg.

Scanned with OKEN Scanner

În prima experiență, aerul din A ocupă volumul $V_1 = Sl$ sub presiunea $p_1 = H$. În experiența a doua, dacă mercurul se ridică în ramura B cu lungimea a, atunci în ramura A el va coborî cu lungimea a', astfel încît să avem relația

$$s\,a = S\,a', \text{ de unde } a' = \frac{s}{S}\,a.$$

Volumul aerului din A va fi

$$V_2 = S\,l + S\,\frac{s\,a}{S} = S\,l + s\,a.$$

Diferența de nivel dintre suprafețele mercurului aflat în cele două ramuri este

$$h = a + \frac{s}{S}\,a = \frac{a}{S}\,(S + s).$$

Dacă notăm cu x presiunea finală în rezervorul R și cu p_2 presiunea aerului din A și scriem că presiunile pe planul $M'N'$ sînt egale în ambele ramuri A și B, avem

$$p_2 = x + h = x + \frac{a}{S}\,(S + s).$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte aerului din ramura A, obținem ecuația

$$HSl = (Sl + sa)\left[x + \frac{a\,(S + s)}{S}\right].$$

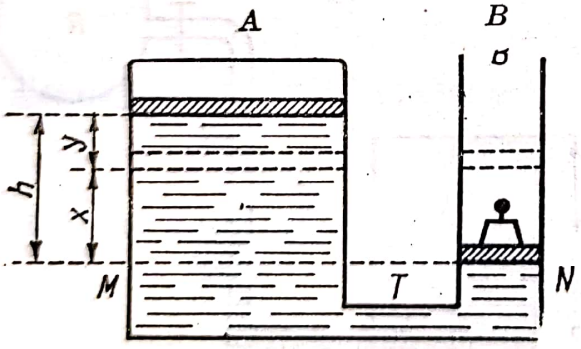


Fig. 131

Făcînd înlocuirile, obținem

$$77 \cdot 10 \cdot 20 =$$

$$= (200 + 20)\left(x + \frac{10 \cdot 12}{10}\right)$$

de unde se găsește $x = 58$ cm.

3.48. Doi cilindri, A de secțiune 300 cm² și B de secțiune 100 cm², conțin un lichid cu densitatea de 900 kg/m³. Acești doi cilindri comunică între ei prin tubul de legătură T (fig. 131). Cilindrul A este închis și conține aer, iar B este deschis.

Două discuri de greutăți neglijabile sînt așezate pe suprafețele lichidelor constituind pistoane etanșe.

Scanned with OKEN Scanner

La început pistoanele sînt în același plan orizontal, iar înălțimea aerului din A este egală cu 20 cm.

Deasupra pistonului din B se adaugă o greutate cu masa de 10 kg. Să se determine noua poziție a pistoanelor.

Presiunea atmosferică este $H = 0{,}981 \cdot 10^5$ N/m^2.

Rezolvare. În prima experiență, volumul închis în cilindrul A este $V_1 = 20 \cdot 300 = 6 \cdot 10^{-3}$ m^3, iar presiunea lui este $p_1 = H = 0{,}981 \cdot 10^5$ N/m^2.

Prin adăugarea greutății în cilindrul B, lichidul din acest cilindru coboară cu înălțimea x, iar în cilindrul A urcă cu înălțimea y, astfel încît

$$100\,x = 300\,y;\ y = \frac{x}{3}.$$

Volumul aerului închis în A va fi

$$V_2 = 3 \cdot 10^{-2}\left(0{,}2 - \frac{x}{3}\right).$$

Diferența de nivel a lichidului din cei doi cilindri este

$$h = x + \frac{x}{3} = \frac{4\,x}{3}.$$

Dacă notăm cu p_2 presiunea aerului din cilindrul A și scriem că în planul MN presiunile în cei doi cilindri sînt egale, obținem

$$p_2 + \rho\,gh = H + \frac{m\,g}{s};$$

$$p_2 + 900 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{4\,x}{3} = 0{,}981 \cdot 10^5 + \frac{10 \cdot 9{,}81}{10^{-2}},$$

$$p_2 = 3\,270\,(33 - 3{,}6\,x).$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte $p_1V_1 = p_2V_2$ obținem ecuația

$$30x^2 - 293x + 15 = 0$$

care conduce la valoarea $x = 5{,}16$ cm.

În cilindrul A pistonul urcă cu

$$y = \frac{x}{3} = \frac{5{,}16}{3} = 1{,}72 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.49. Tubul de sticlă AB, semicapilar, este închis la capătul A și deschis la capătul B (fig. 132). Un index de mercur ab, de lungime k, este în echilibru pentru distanțele Aa respectiv egale cu l, l', l'' cînd tubul se află:

a) în poziția orizontală; b) verticală, cu deschiderea în jos; c) vertical, cu capătul deschis în sus. Se cere:

1. valoarea presiunii atmosferice H în funcție de k, l, l'; k, l, l''; k, l', l''.
2. să se găsească relația dintre l, l', și l''.

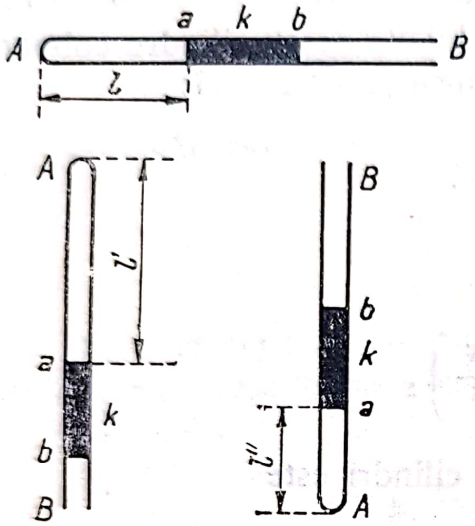


Fig. 132

Aplicație : $k = 30$ mm; $l = 124{,}8$ mm; $l' = 130$ mm; $l'' = 120$ mm.

Rezolvare. 1. Să notăm cu V_1, V_2, V_3 și p_1, p_2, p_3 volumele și presiunile ocupate de aerul închis în tub în cele trei poziții.

a) Pentru poziția orizontală avem

$$V_1 = l\,S \text{ si } p_1 = H.$$

b) Pentru poziția verticală cu capătul deschis în jos, avem

$$V_2 = l'S \quad \text{si} \quad p_2 = H - k.$$

c) Pentru poziția verticală cu capătul deschis în sus, avem

$$V_3 = l''S \quad \text{și} \quad p_3 = H + k.$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte pentru pozițiile a și b, obținem

$$l\,SH = l'S(H - k)$$

de unde

$$H = \frac{l'\,k}{l' - l}. \tag{1}$$

Pentru pozițiile a și c, legea Boyle-Mariotte ne dă

$$l\,SH = l''\,S\,(H + k)$$

de unde

$$H = \frac{l''\,k}{l - l''}. \tag{2}$$

Pentru pozițiile b și c obținem

$$l'S\,(H - k) = l''S\,(H + k)$$

de unde scoatem

$$H = \frac{(l' + l'')\,k}{l' - l''}. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul aplicației de la punctul 1, înlocuind datele numerice în fiecare dintre relațiile (1), (2) și (3), obținem aceeași valoare și anume

$$H = 750 \text{ mm Hg} = 10^5 \text{ N/m}^2.$$

2. Egalînd valorile lui H din relațiile (1), (2) și (3), găsim relația

$$\frac{l'}{l' - l} = \frac{l''}{l - l''} = \frac{l' + l''}{l' - l''}.$$

3.50. Un tub de sticlă cilindric, astupat la un capăt și cu secțiunea interioară $S = 4 \text{ cm}^2$, închizînd o masă oarecare de aer, a fost răsturnat cu deschizătura în jos într-o cuvă cu mercur. Acest tub este fixat la extremitate de un fir care trece după un scripete O și care la celălalt capăt are un taler A (fig. 133). Se încarcă talerul în așa fel încît nivelul mercurului din tub și din cuvă să fie același, distanța de la fundul tubului pînă la nivelul mercurului fiind egală cu $h = 10$ cm. Se pune după aceea în taler o greutate P cu masa $m = 1$ kg și se cere să se calculeze cu cît se va ridica tubul; se admite presiunea atmosferică $H = 0{,}973 \cdot 10^5$ N/m², iar densitatea mercurului 13 600 kg/m³.

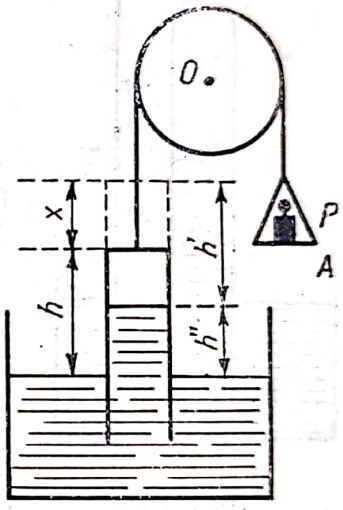


Fig. 133

Rezolvare. Din enunț rezultă că aerul din interior are presiunea $p_1 = H = 0{,}973 \cdot 10^5$ N/m² și volumul $V_1 = hS = 40$ cm³. Din prima experiență rezultă că greutatea tubului este $G = p_1 S$, iar din experiența a doua rezultă condiția de echilibru a tubului și presiunea aerului din interior

$$p_1 S = mg + p_2 S; \; p_2 = p_1 - \frac{mg}{S} = 0{,}728 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Din legea Boyle-Mariotte rezultă înălțimea aerului din tub

$$h' = \frac{p_1}{p_2} h = \frac{0{,}973}{0{,}728} \cdot 10 = 13{,}37 \text{ cm}.$$

Mercurul va urca în tub cu înălțimea h'', dată de relația

$$p_2 + \rho g h'' = H; \; h'' = \frac{H - p_2}{\rho g} = \frac{0{,}245 \cdot 10^2}{13{,}6 \cdot 9{,}81} = 0{,}1838 \text{ m} = 18{,}38 \text{ cm}.$$

Înălțimea cu care se ridică tubul din cuvă este

$$x = h' + h'' - h = 13{,}37 + 18{,}38 - 10 = 21{,}75 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.51 Tubul unui eudiometru de secțiune constantă S [cm²] este plasat într-o cuvă cu mercur. Mercurul se ridică în tub cu $h_1 = 25$ cm deasupra suprafeței libere a mercurului din cuvă (fig. 134). Restul tubului, în lungime de $l_1 = 10$ cm, conține amoniac. Se trec prin eudiometru scîntei electrice pînă ce amoniacul este descompus complet. Să se calculeze lungimea x ocupată de gazele provenite din descompunerea amoniacului, dacă presiunea atmosferică la care s-a lucrat este $p_a = 10^5$ N/m², iar nivelul mercurului din cuvă este invariabil.

Rezolvare. Exprimăm presiunile în centimetri coloană de Hg: $p_a = H = 75$ cm Hg; $p_0 = 76$ cm Hg. Amoniacul din eudiometru ocupă volumul $V_1 = 10\ S$, sub presiunea

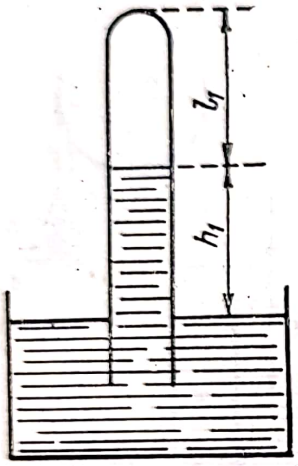


Fig. 134

$$p_1 = H - h_1 = 75 - 25 = 50 \text{ cm Hg}.$$

La presiunea atmosferică normală $p_0 = 76$ cm Hg, amoniacul ocupă volumul V_0', dat de legea Boyle-Mariotte

$$V_0' = \frac{50 \cdot 10\,S}{76} = \frac{500\,S}{76}.$$

Se știe din chimie că la presiunea și temperatura normală, două volume de amoniac dau naștere prin descompunere la patru volume de gaze componente (trei de hidrogen și unul de azot).

Rezultă că la presiunea normală p_0, volumul gazelor componente este egal cu dublul volumului de amoniac, adică

$$V_0 = 2\,V_0' = \frac{1\,000\,S}{76}.$$

În cazul problemei, gazele din eudiometru vor ocupa volumul $V_2 = Sx$ sub presiunea

$$p_2 = H - h_2 = H - (l_1 + h_1 - x) = 75 - (10 + 25 - x) = 40 + x.$$

Aplicînd gazelor componente legea Boyle-Mariotte, rezultă

$$(40 + x)\,Sx = 76\,\frac{1\,000\,S}{76} = 1\,000\,S$$

de unde obținem ecuația

$$x^2 + 40\,x - 1\,000 = 0$$

a cărei soluție admisibilă este $x = 17{,}4$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

3.52. Un balon de sticlă A cu volumul $V = 1000$ cm³ este prelungit cu un gît T de lungime $L = 100$ cm și secțiune $S = 1$ cm². În balon se află o băşică plină cu aer care ocupă un volum $V_1 = 200$ cm³ și care comunică cu exteriorul printr-un robinet r (fig. 135). Gîtul balonului este introdus într-o cuvă cu mercur și este înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Mercurul se ridică în gîtul balonului la același nivel cu cel din cuvă pe lungimea $l = 20$ cm.

Presiunea atmosferică este $H = 10^5$ N/m².

a) Să se calculeze presiunea aerului din balon. b) Se scoate aerul din băşică și se cere să se calculeze lungimea ocupată de mercur în gîtul balonului cum și presiunea aerului din balon. Se presupune că nivelul mercurului din cuvă rămîne constant.

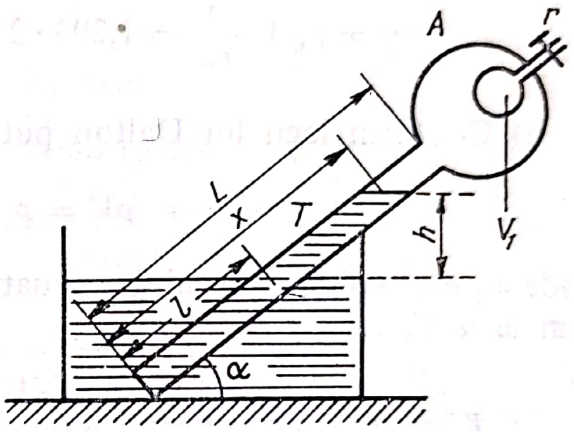


Fig. 135

R e z o l v a r e. Exprimăm presiunea atmosferică în centimetri coloană de Hg: $p' = H = 75$ cm Hg.

a) În prima experiență, volumul și presiunea aerului închis în balon sînt

$$V' = V - V_1 + (L - l)\,S =$$

$$= 1\,000 - 200 + 80 = 880\ \text{cm}^3,$$

$$p' = H = 75\ \text{cm Hg}.$$

b) Dacă mercurul ocupă lungimea x din gîtul balonului, volumul aerului închis în balon este

$$V'' = V + (L - x)\,S = 1\,000 + (100 - x) = 1\,100 - x.$$

Dacă h este diferența de nivel dintre suprafața mercurului din balon și cea din cuvă, măsurată pe verticală, presiunea aerului din balon exprimată în centimetri coloană de Hg va fi

$$p'' = H - h = H - (x - l)\sin\alpha = 75 - (x - 20)\cdot\frac{1}{2} = 85 - \frac{x}{2}.$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte aerului din interior, avem

$$880 \cdot 75 = (1\,100 - x)\left(85 - \frac{x}{2}\right);$$

$$x^2 - 1\,270\,x + 55\,000 = 0.$$

Rezultă $x = 45$ cm și $p'' = 85 - 22{,}5 = 62{,}5$ cm Hg $= 0{,}825 \cdot 10^5$ N/m².

Scanned with OKEN Scanner

3.53. Un balon cu aer comprimat conține $2 \cdot 10^{-2}$ m³ de aer la presiunea $p = 9{,}81 \cdot 10^5$ N/m² și la temperatura de 0 °C. Deschidem robinetul care închide acest balon și lăsăm să iasă din el $4 \cdot 10^{-2}$ m³ de aer în atmosferă, unde presiunea este $p_1 = 10^5$ N/m². Se cere:

a) Cantitatea de aer din balon în starea inițială. b) Presiunea și cantitatea de aer rămas în balon după evacuarea celor $4 \cdot 10^{-2}$ m³ de aer, știind că $\rho_0 = 1{,}293$ kg/m³.

Rezolvare. a) Masa aerului din balon este

$$m = \rho_0 V \frac{p}{p_0} = 1{,}293 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{9{,}81}{1{,}013} = 0{,}250 \text{ kg}.$$

b) Conform legii lui Dalton putem scrie

$$pV = p_1 V_1 + p_2 V$$

unde V_1 este volumul aerului evacuat, iar p_2 presiunea aerului rămas în balon. Din această relație scoatem

$$p_2 = \frac{pV - p_1 V_1}{V} = \frac{9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 2 - 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{-2}} = 7{,}8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Masa aerului rămas în interiorul balonului este

$$m' = \rho_0 V \frac{p_2}{p_0'} = 1{,}293 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{7{,}8}{1{,}013} = 0{,}1992 \text{ kg}.$$

3.54. Două eprubete se află deasupra unei cuve cu mercur, răsturnate cu gura în jos, într-o zi în care presiunea atmosferică este de 10^5 N/m². Eprubeta A conține oxigen al cărui volum V' este 20 cm³, iar coloana de mercur, care se ridică în tub, este $h' = 9$ cm. Eprubeta B conține hidrogen al cărui volum V'' este de 8 cm³, iar coloana de mercur h'', ce se ridică în eprubetă, este 15 cm. Se amestecă conținutul celor două eprubete și se obține un volum $V = 30$ cm³. Să se afle pînă la ce înălțime se va ridica mercurul în eprubeta de amestec?

Rezolvare. Se exprimă presiunea atmosferică în centimetri coloană de Hg: $p_a = H = 75$ cm Hg.

Presiunile oxigenului și hidrogenului din cele două eprubete sînt egale respectiv cu

$$p' = H - h' = 75 - 9 = 66 \text{ cm Hg}.$$

$$p'' = H - h'' = 75 - 15 = 60 \text{ cm Hg}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd legea lui Dalton pentru aflarea presiunii P a amestecului, avem

$$PV = p'V' + p''V''$$

de unde rezultă

$$P = \frac{p'V' + p''V''}{V} = \frac{66 \cdot 20 + 60 \cdot 8}{30} = \frac{1\,800}{30} = 60 \text{ cm Hg} =$$

$$= 0{,}79 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Înălțimea h la care se va ridica mercurul este

$$h = H - P = 75 - 60 = 15 \text{ cm}.$$

3.55. Un balon, gol în interior (vid), este prevăzut cu un tub de secțiune $S = 2$ cm² care conține aer și cu un robinet. Aparatul este răsturnat cu gura în jos într-o cuvă cu mercur. Robinetul fiind închis, mercurul se ridică în tub la înălțimea $h = 25$ cm, iar lungimea ocupată de aer în tub este $l = 55$ cm. Deschizînd robinetul se observă că mercurul se ridică în tub pe înălțimea $h' = 50$ cm. Să se calculeze volumul balonului. Presiunea atmosferică $H = 10^5$ N/m² = 75 cm Hg.

Rezolvare. Robinetul fiind închis, volumul aerului din tub este $V_1 = l\,S = 55 \cdot 2 = 110$ cm³, iar presiunea acestuia, $p_1 = H - h = 75 - 25 = 50$ cm.

Volumul balonului, $V_2 = x$, iar presiunea din interior $p_2 = 0$. După deschiderea robinetului, presiunea aerului din balon și din tub devine $P = H - h' = 75 - 50 = 25$ cm, iar volumul acestuia este $V = V_2 + s\,(l + h - h') = x + 2\,(55 + 25 - 50) = x + 60$.

Din legea lui Dalton

$$PV = p_1V_1 + p_2V_2$$

deducem

$$25\,(x + 60) = 50 \cdot 110;\ x = 160 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

3.56. Un tub cilindric vertical închis la partea superioară este introdus într-o cuvă cu mercur; el conține aer pe o lungime de 20 cm, iar mercurul din tub se ridică cu 30 cm deasupra nivelului mercurului din cuvă. Fără a deplasa tubul, se introduce în el un adaos de lichid avînd tensiunea vaporilor de $0{,}2024 \cdot 10^5$ N/m². Să se calculeze înălțimea mercurului din tub cînd se stabilește echilibrul. Presiunea atmosferică este $H = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m². Se va neglija presiunea hidrostatică a lichidului nevaporizat precum și variația nivelului din cuvă.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Vom exprima presiunile în centimetri coloană de Hg. Volumul și presiunea aerului, înainte de introducerea lichidului, sînt $V_1 = 20\ S$ și $p = H - h = 76 - 30 = 46$ cm Hg. Lichidul introdus, în contact cu mercurul, se vaporizează producînd o presiune $p'_2 = 0{,}2024 \cdot 10^5$ N/m^2 = = 15,2 cm Hg.

Presiunea lichidului coboară nivelul mercurului din tub de la 30 cm la x. Amestecul de aer și vapori va avea volumul $V = (50 - x)\ S$ și presiunea $P = 76 - x$. Presiunea parțială a aerului din tub este dată de legea Boyle-Mariotte

$$p_1V_1 = p_2V_2 = p_2V;\ p_2 = p_1\frac{V_1}{V} = 46 \cdot \frac{20}{50 - x} = \frac{920}{50 - x}.$$

Deoarece presiunea p'_2 a vaporilor saturanți nu se schimbă prin mărirea volumului, presiunea finală a amestecului va fi

$$P = p_2 + p'_2;\ 76 - x = \frac{920}{50 - x} + 15{,}2.$$

Din ultima relație se obține ecuația

$$x^2 - 110{,}8\,x + 2\,120 = 0;\ x = 24{,}6 \text{ cm}.$$

Nivelul mercurului din tub scade deci cu $30 - 24{,}6 = 5{,}4$ cm.

3.57. După cîte curse ale pistonului unei pompe cu capacitatea de 40 cm^3 se poate goli un balon de 2 l, astfel încît presiunea lui să scadă de la $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m^2 pînă la 13,3 N/m^2 (fig. 136).

(R.M.F., nr. 12/1953)

Rezolvare. Fie V volumul balonului, v volumul corpului de pompă și p presiunea inițială a aerului din balon. La ridicarea pistonului P, supapa r se închide datorită presiunii atmosferice, iar supapa a se deschide, astfel încît aerul ocupă volumul $V + v$ sub presiunea p_1 dată de legea

$$(V + v)\,p_1 = V \cdot p$$

de unde rezultă

$$p_1 = \frac{V}{V + v}\ p.$$

La coborîre, supapa r se deschide dînd drumul aerului din corpul de pompa C în atmosferă, iar supapa a se închide, aerul din balon rămînînd la presiunea p_1 (fig. 136).

După a doua ridicare a pistonului, aerul din corpul de pompă și din balon va avea presiunea

$$p_2 = \frac{V}{V + v}\,p_1 = \left(\frac{V}{V + v}\right)^2\ p.$$

Scanned with OKEN Scanner

Continuînd același raționament, după n ridicări ale pistonului, presiunea balonului va fi

$$p_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n p.$$

În cazul problemei, avem

$$p = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2; \; p_n = 13{,}3 \text{ N/m}^2$$

$$V = 2\,000 \text{ cm}^3 \text{ si } v = 40 \text{ cm}^3.$$

Făcînd calculele se obține $n = 388$ curse.

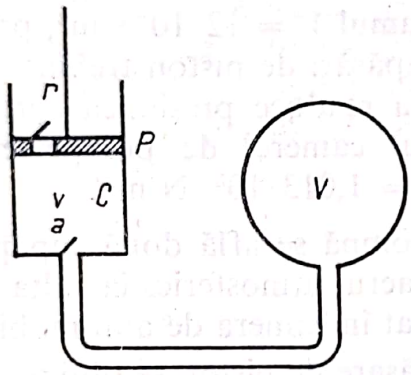


Fig. 136

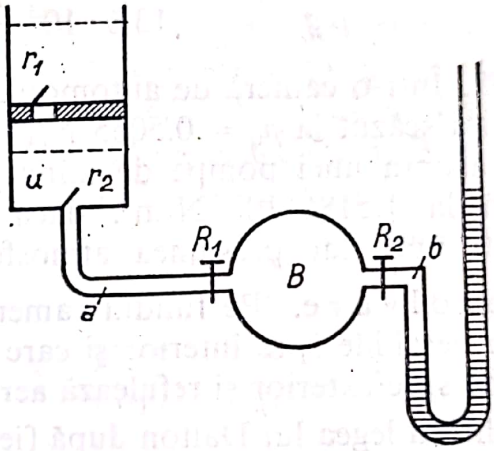


Fig. 137

3.58. În fig. 137 este reprezentată o pompă de aer cu piston, pusă în legătură cu un balon B de volum $V = 2 \cdot 10^{-3}$ m³, plin cu aer la presiunea $p = 1{,}2 \cdot 10^5$ N/m² și cu un manometru cu mercur. Pistonul se află la punctul mort inferior, are suprafața $S = 3 \cdot 10^{-3}$ m² și cursa $l = 0{,}2$ m.

Spațiul mort inferior are volumul $u = 5 \cdot 10^{-6}$ m³ și este plin cu aer la presiunea atmosferică $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m². Se deschid robinetele R_1 și R_2 și se ridică pistonul pînă la punctul mort superior. Dacă se neglijează volumul tuburilor de legătură a și b, se cere:

a) Presiunea aerului din balonul B după a doua ridicare a pistonului.
b) Forța necesară pentru menținerea pistonului la punctul mort superior după a doua ridicare, dacă se neglijează greutatea pistonului și frecările.
c) Diferențele de nivel ale mercurului din cele două ramuri ale manometrului la începutul și la sfîrșitul experienței.

Indicație și răspuns. a) Dacă $v = Sl$ este volumul corpului de pompă, presiunile aerului din balon după prima și a doua ridicare a pistonului sînt date de relațiile

$$p_1 (V + v + u) = Vp + up_0; \; p_2 (V + v + u) = Vp_1 + up_0.$$

Din aceste ecuații rezultă

$$p_2 = \frac{V^2 p + u p_0 (2V + v + u)}{(V + v + u)^2} = 0{,}875 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

b) $F = S(p_0 - p_2) = 30 \cdot 10^{-4} \cdot (1{,}013 - 0{,}875)\, 10^5 = 40{,}425$ N.

c) $h' = \frac{p - p_0}{\rho g} = \frac{(1{,}2 - 1{,}013)\, 10^5}{13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8} = 0{,}14$ m $= 140$ mm,

$$h'' = \frac{p_2 - p_0}{\rho g} = \frac{(0{,}875 - 1{,}013)\, 10^5}{13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8} = -0{,}101 \text{ m} = -101 \text{ mm}.$$

3.59. Într-o cameră de automobil cu volumul $V = 12 \cdot 10^{-3}$ m³, presiunea aerului a scăzut la $p_0 = 0{,}5065$ N/m². Cîte apăsări de piston trebuie să exercităm asupra unei pompe de mînă pentru a readuce presiunea aerului din cameră la $1{,}5185 \cdot 10^5$ N/m², dacă volumul camerei de pompă este $v = 3 \cdot 10^{-4}$ m³, iar presiunea atmosferică $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m²?

Rezolvare. Pe fundul camerei de pompă se află două supape: una care se deschide spre interior și care aspiră aerul atmosferic, iar alta care se deschide spre exterior și refulează aerul aspirat în camera de automobil.

Aplicînd legea lui Dalton după fiecare apăsare de piston se obține

$$V p_0 + v p = V p_1;\ p_1 = p_0 + \frac{v}{V} p,$$

$$V p_1 + v p = V p_2;\ p_2 = p_0 + 2\frac{v}{V} p,$$

$$V p_{n-1} + v p = V p_n;\ p_n = p_0 + n\frac{v}{V} p.$$

Din ultima relație rezultă

$$n = \frac{V(p_n - p_0)}{v p} = \frac{12 \cdot 10^{-3}(1{,}517 - 0{,}5065)}{3 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}013} = 40.$$

3.60. Într-un vas închis se află 1 kg de aer la 17 °C și la presiunea de o atmosferă. Prin încălzire, presiunea s-a ridicat la 4 atmosfere. Să se afle de cîtă căldură a fost nevoie, știind că, pentru aer, căldura specifică sub volum constant, $c_v = 710$ J/kg·grd.

(R.M.F., nr. 1/1954)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Scriem ecuația lui Clapeyron pentru cele două stări ale gazului

$$p_1 V = RT_1 \quad \text{și} \quad p_2 V = RT_2.$$

Prin împărțirea celor două relații obținem

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 = \frac{4}{1} \cdot 290 = 1\,160°K; \; t_2 = 1\,160 - 273 = 887;$$

$$Q = mc_v(t_2 - t_1) = 1 \cdot 710{,}624\,(887 - 17) = 61\,770 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

3.61. Un balon de 10^{-2} m³ este plin cu oxigen la presiunea de $78{,}48 \cdot 10^5$ N/m² și la temperatura de 7 °C. Ce cantitate Q de căldură absoarbe gazul dacă este încălzit pînă la 15,5 °C, știind că densitatea și căldura specifică a oxigenului la 0 °C sînt egale respectiv cu 1,43 kg/m³ și 921 J/kg·grd și că presiunea atmosferică p_0 este $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².

(R.M.F., nr. 12/1952)

Rezolvare

$$m = V \rho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t_1} = 10^{-2} \cdot 1{,}43 \cdot \frac{78{,}48}{1{,}013} \cdot \frac{273}{280} = 1{,}079 \text{ kg},$$

$$Q = mc(t_2 - t_1) = 1{,}079 \cdot 921\,(15{,}5 - 7) = 8\,447 \text{ J}.$$

3.62. Într-o operație de sudură se consumă acetilenă dintr-un tub cu o capacitate de 0,04 m³ care are o presiune de $1{,}4715 \cdot 10^7$ N/m². La sfîrșitul operației se constată că presiunea a scăzut la $0{,}7848 \cdot 10^7$ N/m². Considerînd că acetilena este un gaz perfect și că temperatura s-a menținut constantă în timpul sudurii, să se afle volumul de acetilenă consumat.

(Institutul de Transporturi, 1952

Rezolvare. Aplicăm legea lui Dalton la temperatură constantă

$$pV = p_1 V_1 + p_2 V_2$$

unde V este volumul tubului, p — presiunea inițială a gazului, V_1 — volumul gazului rămas în tub la presiunea p_1, V_2 — volumul gazului consumat la presiunea $p_2 = p_0$.

Ținînd seama că $V_1 = V$ se obține

$$V_2 = V \frac{p - p_1}{p_0} = 0{,}04 \cdot \frac{147{,}15 - 78{,}48}{1{,}013} = 2{,}5 \text{ m}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.63. Într-un barometru cu mercur a pătruns aer, așa fel că la temperatura de 15 °C el arată numai presiunea de 704 mm Hg, cînd adevărata presiune este de 762 mm Hg; camera barometrică are secțiunea S și o lungime de 143 mm. Același barometru arată la temperatura de 30 °C o presiune de 692 mm. Care este adevărata presiune în acest caz, coeficientul de dilatație a aerului fiind egal cu 0,00367 grd^{-1}?

(Adm. Școala Politehnică Buc., 1944)

Rezolvare. *Metoda I.* În prima experiență aerul din camera barometrică are volumul $V_1 = 143\ S$, presiunea $p_1 = H - h = 762 - 704 = 58$ mm Hg și temperatura $t_1 = 15$ °C.

În experiența a doua, volumul aerului din camera barometrică va fi

$$V_2 = S\,[143 + (h - h')] = S\,[143 + [704 - 692)] = 155\,S$$

unde h și h' sînt înălțimile barometrice în primul și în al doilea caz.

Dacă notăm cu x adevărata presiune în cazul al doilea, presiunea aerului închis în camera barometrică va fi $p_2 = x - 692$ iar temperatura acestuia, $t_2 = 30$ °C.

Aplicînd legea Boyle-Mariotte-Gay-Lussac obținem

$$\frac{p_1 V_1}{1 + \alpha t_1} = \frac{p_2 V_2}{1 + \alpha t_2};$$

$$\frac{58 \cdot 143\,S}{1 + 0{,}00367 \cdot 15} = \frac{(x - 692) \cdot 155\,S}{1 + 0{,}00367 \cdot 30}.$$

Din această relație obținem $x = 748$ mm.

Metoda II. Din legea lui Clapeyron

$$p_1 V_1 = nRT_1;\ p_2 V_2 = nRT_2$$

obținem prin împărțire

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1};\ p_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot p_1;$$

$$x - 692 = \frac{303}{288} \cdot \frac{143}{155} \cdot 58$$

de unde deducem aceeași valoare $x = 748$ mm Hg ca și în prima metodă.

Scanned with OKEN Scanner

3.64. Un vas cilindric de sticlă, astupat la ambele capete și gol în interior (fig. 138) cîntărește $m = 14$ kg. Suprafața și înălțimea golului din interior sînt respectiv egale cu $S = 700$ cm² și $h = 40$ cm. Pe unul din capace vasul prezintă un mic orificiu. Se lasă vasul să cadă în apă în poziție verticală cu orificiul în jos și se cere:

a) Adîncimea maximă pînă la care poate pătrunde vasul în apă. b) Cantitatea de apă care a pătruns în interior. c) Presiunea și densitatea aerului din interior. Se cunosc: densitatea sticlei $\rho_s = 2500$ kg/m³; înălțimea manometrică a presiunii atmosferice, $H = 760$ mm Hg, densitatea aerului la presiunea și temperatura normală, $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m³. Se va lucra în SI.

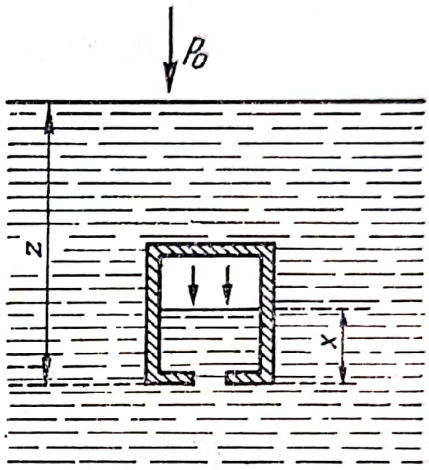


Fig. 138

Rezolvare. a) Să notăm cu z înălțimea maximă de cufundare și cu x înălțimea ocupată de apă în vas (v. fig. 138). Vasul se oprește atunci cînd greutatea lui și a apei din interior, egalează forța arhimedică, adică

$$mg + Sx\rho_a g = V\rho_a g;$$

$$m + Sx\rho_a = V\rho_a. \qquad (1)$$

Volumul de apă dezlocuit de vas este dat de relația

$$(V - V_g)\rho_s = m;$$

$$V = \frac{m}{\rho_s} + Sh = \frac{4}{2\,500} + 0{,}07 \cdot 0{,}4 = 0{,}0056 + 0{,}028 = 0{,}0336\ \text{m}^3.$$

Înlocuind în (1) și scoțînd valoarea lui x, avem

$$x = \frac{V\rho_a - m}{S\rho_a} = \frac{0{,}0336 \cdot 1\,000 - 14}{0{,}07 \cdot 1\,000} = 0{,}28\ \text{m} = 28\ \text{cm}.$$

Apa încetează să mai pătrundă în interior atunci cînd presiunea de pe partea interioară a orificiului este egală cu presiunea de pe partea sa exterioară, adică

$$p_0 + \rho_a gz = p_1 + \rho_a gx \qquad (2)$$

unde p_0 este presiunea atmosferică, iar p_1 — presiunea aerului din interior.

Conform legii Boyle-Mariotte, avem

$$p_1 = \frac{V_0}{V_1} p_0 = \frac{Sh}{S(h-x)} p_0 = \frac{h}{h-x} \rho_m gH. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (2) și scoțînd valoarea lui z, obținem

$$z = \frac{\rho_m}{\rho_a} \cdot \frac{x}{h - x} H + x = \frac{13\,600}{1\,000} \cdot \frac{0{,}28}{0{,}12} \cdot 0{,}76 + 0{,}28 \approx 32 \text{ m}.$$

b) $m' = Sx\,\rho_a = 0{,}07 \cdot 0{,}28 \cdot 1\,000 = 19{,}6$ kg.

c) Din relația (3) rezultă

$$p_1 = \frac{0{,}40}{0{,}40 - 0{,}28} \cdot 13\,600 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}76 = 337\,552 \text{ N/m}^2,$$

$$\rho_{aer} = \rho_0 \frac{p_1}{p_0} = 1{,}3 \cdot 3{,}33 = 4{,}33 \text{ kg/m}^3.$$

3.65. Avem două recipiente A și B (fig. 139); primul, de un litru, conține aer la temperatura de 15 °C și la presiunea de $0{,}96 \cdot 10^5$ N/m², iar al doilea, de doi litri, este plin cu aer la temperatura de 20 °C și presiunea de $4{,}4145 \cdot 10^5$ N/m². Se unesc aceste două recipiente și se deschid robinetele r_1 și r_2. Se cere:

a) Masa de aer ce trece din B în A, cînd temperatura în cele două recipiente este aceea a mediului ambiant, de 15 °C. b) Presiunea gazului în acest moment în cele două recipiente, știind că masa unui litru de aer la 0 °C și $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² este 1,293 g, iar coeficientul de dilatație al aerului este $1/273 \text{ grd}^{-1} = 0{,}00366 \text{ grd}^{-1}$ (se va neglija volumul interior al tubului de legătură).

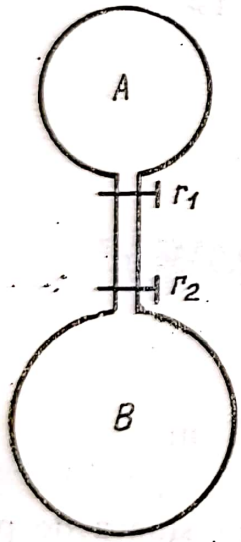


Fig. 139

Rezolvare. Notînd cu p_1, V_1, t_1 și p_2, V_2, t_2 presiunile, volumele și temperaturile aerului din cele două recipiente și cu p, V, t presiunea, volumul și temperatura amestecului, putem scrie, după deschiderea robinetelor, legea lui Dalton

$$\frac{pV}{1 + \alpha t} = \frac{p_1 V_1}{1 + \alpha t_1} + \frac{p_2 V_2}{1 + \alpha t_2}.$$

Ținînd seamă că $V = V_1 + V_2 = 1 + 2 = 3\,l = 3 \cdot 10^{-3}$ m³, $t_1 = t_2 = 15$ °C și făcînd înlocuirile, rezultă

$$\frac{3p}{288} = \left(\frac{0{,}96 \cdot 1}{288} + \frac{4{,}4145 \cdot 2}{293} \right) 10^5$$

de unde deducem $p = 3{,}17 \cdot 10^5$ N/m².

La început, recipientul B conține masa m_1 de aer, egală cu

$$m_1 = \rho_0 V_2 \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t_2} = 1{,}293 \cdot 2 \cdot \frac{4{,}4145}{0{,}96} \cdot \frac{1}{1 + 20 \cdot 0{,}00366} =$$

$$= 11{,}1 \text{ g} = 0{,}0111 \text{ kg}.$$

Scanned with OKEN Scanner

La temperatura de 15 °C și presiunea $p = 3{,}17 \cdot 10^5$ N/m², recipientul B poate să cuprindă o cantitate de aer egală cu

$$m_2 = \rho_0 V_2 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t_2} = \frac{641{,}59}{80{,}17} = 8 \text{ g}.$$

Cantitatea de aer ce trece din B în A va fi egală cu

$$m = m_1 - m_2 = 11{,}1 - 8{,}000 = 3{,}1 \text{ g}.$$

3.66. Un tub subțire de secțiune S este terminat la capete cu două baloane A și B (fig. 140). Aparatul este plin cu aer la temperatura de 0 °C și presiunea de $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m². În porțiunea orizontală a tubului se află un index de mercur l care împarte capacitatea aparatului în două părți egale, la 0 °C. Se încălzește balonul A la t °C și se cere să se calculeze cu cît se va deplasa indexul de mercur.

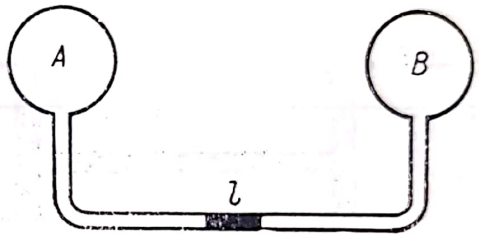


Fig. 140

Aplicație : Volumul întregului aparat $2V_0 = 200$ cm³; $S = 1$ mm², $t = 0{,}1$ °C; $\alpha = 1/273$ grd^{-1}.

Rezolvare. Fie x cantitatea cu care se deplasează indexul. La început partea din stînga a indexului are volumul $V_1 = V_2 = 100$ cm³, presiunea $p_1 = 76$ cm Hg și temperatura absolută $T_1 = 273$ °K.

După încălzire, această parte are volumul $V'_1 = V_0 + Sx = 100 + 0{,}01\,x$, presiunea p'_1 și temperatura $T'_1 = 273{,}1$ °K.

Din relațiile

$$p_1 V_1 = n R T_1; \; p'_1 V'_1 = n R T'_1$$

rezultă prin împărțire

$$\frac{p_1 V_1}{p'_1 V'_1} = \frac{T_1}{T'_1}$$

de aici scoatem

$$p'_1 = \frac{V_1}{V'_1} \frac{T'_1}{T_1} p_1 = \frac{100}{100 + 0{,}01\,x} \cdot \frac{273{,}1}{273} \cdot 10{,}13 \cdot 10^5.$$

Pentru partea din dreapta indexului, putem scrie de asemenea

$$p_2 V_2 = n R T_2; \; p'_2 V''_2 = n R T'_2 = n R T_2$$

de unde rezultă

$$p'_2 = \frac{V_2}{V'_2} \cdot \frac{T'_2}{T_2} p_2 = \frac{100}{100 - 0{,}01\,x} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca indexul să rămînă în echilibru, trebuie ca $p'_1 = p'_2$, adică

$$\frac{100}{100 + 0{,}01\,x} \cdot \frac{273{,}1}{273} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 = \frac{100}{100 - 0{,}01\,x} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5$$

această ecuație se mai poate scrie astfel

$$\frac{100 + 0{,}01\,x}{100 - 0{,}01\,x} = \frac{273{,}1}{273}$$

de unde rezultă $x = 1{,}8$ cm.

3.67. Două corpuri de pompă A și B (fig. 141), identice, de secțiuni S, sînt închise de două pistoane solidare P și P'. Lungimile PA și $P'B$ sînt egale și cilindrii conțin aer la temperatura 0 °C și sub presiunea de $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².

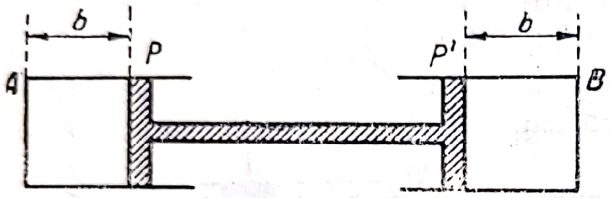


Fig. 141

a) Se încălzește A la temperatura T °K și se cere să se calculeze deplasarea x a pistoanelor și presiunea finală p'_2 în B.

b) Se readuce A la 0 °C menținînd fixe pistoanele PP'; care va fi presiunea finală p''_1 în A?

c) Ce masă de aer trebuie atunci scoasă din B pentru ca PP', făcut mobil, să rămînă pe loc?

Se dau: $\alpha = \frac{1}{273}$ grd^{-1}, $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m³, $S = 2 \cdot 10^{-2}$ m², $PA = b = 0{,}20$ m, $T = 409{,}5$ °K.

Rezolvare. a) Înainte și după încălzire, putem scrie pentru corpul A

$$V_1 = Sb;\ V'_1 = (b + x)\,S$$
$$p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5;\ p'_1 = p'_1$$
$$T_1 = 273°K,\ T'_1 = T = 409{,}5°K.$$

Pentru corpul de pompă B, vom avea, de asemenea

$$V_2 = Sb;\quad V'_2 = (b - x)\,S$$
$$p_2 = 1{,}013 \cdot 10^5;\quad p'_2 = p'_2$$
$$T_2 = 273°K;\quad T'_2 = 273\ °K.$$

Aplicînd legea Gay-Lussac aerului din fiecare corp de pompă și ținînd seamă că pistoanele se deplasează pînă în momentul în care forțele care acționează asupra lor își fac echilibru, adică $Sp'_1 = Sp'_2$ sau $p'_1 = p'_2$, rezultă că $x = 4$ cm, iar $p'_1 = p'_2 = 1{,}28 \cdot 10^5$ N/m².

Scanned with OKEN Scanner

b) în acest caz aerul din corpul A își menține volumul invariabil. Aplicînd legea lui Clapeyron, avem

$$p_1' V_1' = nRT; \; p_1'' V_1' = nRT_0.$$

Împărțind aceste două relații și scoțînd valoarea lui p''_1, obținem

$$p_1'' = \frac{T_0}{T} p_1' = \frac{273}{409{,}5} \cdot 1{,}28 \cdot 10^5 = 0{,}86 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

c) Masa de aer conținută în cilindrul B este egală cu

$$m' = \rho_0 S \cdot (b - x) \frac{p_2'}{p_0}.$$

Pentru ca pistoanele să rămînă pe loc, trebuie ca și în B să avem o presiune egală cu p_1''. Sub această presiune, cilindrul B, poate să cuprindă o masă de aer m'' egală cu

$$m'' = \rho_0 S \cdot (b - x) \frac{p_1''}{p_0}.$$

Masa de aer care trebuie scoasă din cilindrul B este

$$m = m' - m'' = \rho_0 S (b - x) \frac{p_2' - p_1''}{p_0} = 1{,}3 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}16 \cdot \frac{1{,}28 - 0{,}86}{1{,}013} =$$

$$= 1{,}733 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

3.68. Un balon a cărui capacitate este egală cu 250 cm³ este legat de un manometru deschis. Se introduce în balon un corp A (fig. 142) cu masa de 150 g. Cînd mercurul este la același nivel în ambele ramuri ale manometrului, aerul din balon este la temperatura 0 °C și la presiunea $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m². Se ridică temperatura la 25 °C și în același timp se adaugă mercur în manometru pentru a reduce volumul ocupat de aer și de corpul A, la 200 cm³; diferența de nivel a mercurului în cele două ramuri este atunci de $h = 1$ m. Să se calculeze volumul și densitatea corpului A neglijînd dilatația corpului și a pereților balonului; coeficientul de dilatație al aerului este egal cu 0,00366 grd^{-1}.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Exprimăm presiunea p_1 în mm Hg: $p_1 = 760$ mm Hg. Fie x volumul și ρ densitatea corpului A. În prima experiență volumul aerului din balon este egal cu $V_1 = 250 - x$, presiunea $p_1 = 760$ mm Hg, iar temperatura $T_1 = 273$ °K.

În experiența a doua, volumul aerului este $V_2 = 200 - x$, presiunea $p_2 = 760 + 1000 = 1760$ mm Hg, iar temperatura $T_2 = 273 + 25 = 298$ °K.

Din ecuațiile

$$p_1 V_1 = n R T_1; \; p_2 V_2 = n R T_2$$

se deduce prin împărțire

$$\frac{760\,(250 - x)}{1\,760\,(200 - x)} = \frac{273}{298}$$

de unde rezultă $x = 155{,}42$ cm³.

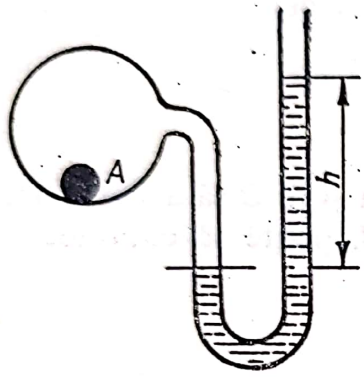


Fig. 142

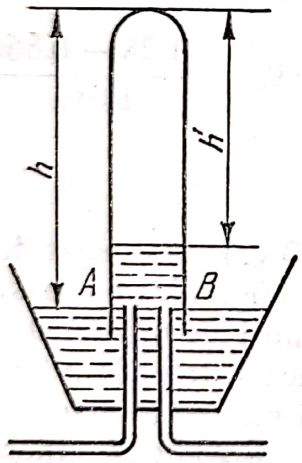


Fig. 143

Densitatea corpului este

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{x} = \frac{195}{155{,}42} =$$

$$1{,}25 \text{ g/cm}^3 = 1\,250 \text{ kg/m}^3.$$

3.69. Gazele provenite din electroliza apei sînt aduse prin cîte un tub într-o eprubetă cilindrică verticală pe o cuvă cu mercur (fig. 143). Cînd bulele de gaz se desprind de tuburi pentru a urca în mercur, ele au un volum de 0,1 cm³. Înălțimea mercurului care umple întreaga eprubetă, deasupra nivelului AB al mercurului din cuvă, este $h = 24$ cm, iar volumul său este $V = 100$ cm³. Orificiile tuburilor sînt la nivelul AB. Presiunea atmosferică fiind de 10^5 N/m² în timpul experienței, iar temperatura de 0 °C, se cere să se calculeze:

a) Cîte bule trebuie să se degaje pentru ca înălțimea h' ocupată de gaze în eprubetă să fie egală cu 18 cm. b) Temperatura la care trebuie încălzit aparatul pentru ca amestecul de gaze să ocupe întreaga înălțime a eprubetei, adică 24 cm. Se va neglija dilatația mercurului și se va lua pentru aer coeficientul de dilatație $\alpha = 1/273 = 0{,}00367$ grd^{-1}.

Rezolvare. a) Dacă notăm cu n numărul bulelor de gaze degajate în eprubetă, volumul lor este egal cu $V_1 = 0{,}1\,n$ cm³ iar presiunea p_1 transformată în centimetri coloană de Hg este: $p = 75$ cm Hg.

Secțiunea eprubetei este egală cu

$$S = \frac{V}{h} = \frac{100}{24} = \frac{25}{6} \text{ cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Volumul final ocupat de gaze este egal cu $V_2 = Sh' = \frac{25}{6} \cdot 18 = 75$ cm³, iar presiunea acestora este egală cu

$$p_2 = H - (h - h') = 75 - 6 = 69 \text{ cm Hg}.$$

Aplicînd gazelor degajate în eprubetă legea Boyle-Mariotte, obținem

$$75 \cdot 0{,}1\, n = 69 \cdot 75;\ n = \frac{69 \cdot 75}{75 \cdot 0{,}1} = 690.$$

b) La sfîrșitul experienței, volumul amestecului de gaze trebuie să fie $V_3 = 100$ cm³, iar presiunea sa, $p_3 = 75$ cm Hg.

Temperatura se obține din ecuațiile

$$p_2 V_2 = nRT_2 \text{ si } p_3 V_3 = nRT_3$$

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{p_2 V_2} T_2 = \frac{75 \cdot 100}{69 \cdot 75} 273 = 395{,}5;$$

$$t_3 = 395{,}5 - 273 = 122{,}5°\text{C}.$$

18. Schimbarea stării de agregare a materiei. Topirea-solidificarea, vaporizarea-condensarea. Higrometria

a. Considerații teoretice

1. Cantitatea de căldură Q' absorbită prin topire sau cedată prin solidificare și căldura Q'' absorbită prin vaporizare sau cedată prin condensare sînt egale cu

$$Q' = m\, l_t \quad \text{si} \quad Q'' = m\, l_v.$$

unde m este masa corpului, l_t – căldura latentă de topire, iar l_v – căldura latentă de vaporizare, ambele măsurate în J/kg în SI.

2. Dacă fiecare gaz dintr-un amestec se găsește la presiunea amestecului, între presiunea p, volumul V ale amestecului, presiunile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ și volumele parțiale ale gazelor din amestec $V, V_2, \ldots, V_n$ există relațiile (legea lui Dalton)

$$p = \sum_1^n p_i;\ V = \sum_1^n V_i;\ pV = \sum_1^n p_i V_i.$$

3. Umiditatea relativă a vaporilor de apă din atmosferă este dată de relația

$$B = \frac{f}{F} \cdot 100$$

unde f este presiunea vaporilor nesaturanți la o temperatură oarecare, iar F – presiunea vaporilor saturanți la aceeași temperatură.

4. Presiunea aerului uscat la o temperatură oarecare este dată de relația

$$p = H - f$$

unde H este presiunea atmosferică, iar f – presiunea vaporilor la temperatura dată.

5. Cantitățile (masele) de aer uscat și de aer umed conținute într-un volum V litri de aer sînt egale respectiv cu

$$m = 1{,}293 \frac{V}{1 + \alpha t} \cdot \frac{H - f}{76} \; ; \; m' = 1{,}293 \, \rho_0 \frac{V}{1 + \alpha t} \cdot \frac{f}{76}$$

unde ρ_0 este densitatea relativă a vaporilor de apă în raport cu aerul, 1,293 – densitatea aerului, iar t – temperatura aerului.

b. Probleme

3.70. Un proiectil de plumb de 20 g pornește din armă cu viteza de 600 m/s, întîlnește un bloc fix de oțel și se topește. Care este temperatura finală a plumbului topit? Temperatura inițială a proiectilului este $t_0 = 15°C$, punctul de topire al plumbului $t_1 = 325°C$, căldura de topire $l = 24{,}28 \cdot 10^3$ J/kg, căldura specifică în stare solidă $c_1 = 125{,}6$ J/kg·grd, căldura specifică în stare lichidă $c_2 = 167{,}5$ J/kg·grd.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1942)

Rezolvare. Energia cinetică a proiectilului transformîndu-se în căldură, avem

$$W = \frac{m v^2}{2} = \frac{0{,}020 \cdot 36 \cdot 10^4}{2} = 3\,600 \text{ J} = Q.$$

Pe de altă parte, putem scrie

$$Q = mc_1 (t_1 - t_0) + ml_t + mc_2 (t - t_1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din această ecuație rezultă

$$t = \frac{Q}{mc_2} - \frac{c_1}{c_2}(t_1 - t_0) - \frac{l_t}{c_2} + t_1 = \frac{3600}{0{,}02 \cdot 167{,}5} -$$

$$- \frac{125{,}6}{167{,}5}(325 - 15) - \frac{24\,280}{167{,}5} + 325 = 1074 -$$

$$- 232 - 145 + 325 = 1022 \ ^\circ\text{C}.$$

3.71. Într-un calorimetru de fier de 1 kg se află 1 kg de apă cu temperatura inițială de 15°C. În apa din calorimetru se toarnă 0,200 kg cositor topit la temperatura de 480°C. Temperatura finală a apei devine egală cu 22,4°C.

Să se calculeze căldura de topire a cositorului. Căldura specifică a cositorului în stare solidă și lichidă este de 252 J/kg·grd, iar temperatura de topire a acestuia este egală cu 232°C. Căldura specifică a fierului este 462 J/kg·grd.

Rezolvare. Căldura cedată de cositor este egală cu

$$Q = 252 \cdot 0{,}2\,(480 - 232) + 0{,}200\,l + 252 \cdot 0{,}2\,(232 - 22{,}4) =$$

$$= 23\,000 + 0{,}2\,l.$$

Această căldură este primită de apă și de calorimetru, care absorb

$$Q' = 4187 \cdot (22{,}4 - 15) + 462\,(22{,}4 - 15) = 34\,400 \text{ J}.$$

Egalînd cele două cantități de căldură avem

$$23\,000 + 0{,}2\,l = 34\,000; \quad l = 57\,350 \text{ J/kg}.$$

3.72. Un calorimetru de alamă care cîntărește 0,500 kg conține 1 kg de gheață la −10°C. Se lasă să cadă în calorimetru un curent de apă la temperatura de 80°C cu o viteză constantă. Greutatea apei scurse este de 0,050 kg în fiecare minut. Se presupune că aparatul calorimetric nu suferă nici o pierdere de căldură și că gheața este destul de fin pulverizată, astfel încît amestecul să se facă instantaneu. Se cere:

a) După cît timp temperatura amestecului devine 0°C, toată gheața fiind topită? b) După cît timp această temperatură va fi de 10°C? Căldura specifică a alamei este de 418 J/kg·grd și a gheții 2 093 J/kg·grd. Căldura latentă de topire a gheții este 334 000 J/kg.

Rezolvare. a) Notînd cu x timpul căutat, cantitatea de apă scursă în calorimetru va fi egală cu $50\,x$, iar căldura cedată calorimetrului

$$Q = 0{,}050\,x\,(80 - 0) \cdot 4187 = 16\,750\,x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această căldură este distribuită astfel:

$$Q_1 = 0{,}500 \cdot 418\,[0 - (-10)] = 2093 \text{ J}$$

este căldura absorbită de vasul calorimetric;

$$Q_2 = 1 \cdot 2093\,[0 - (-10)] = 20\,930 \text{ J}$$

este căldura necesară pentru încălzirea gheții de la $-10°C$ la $0°C$;

$$Q_3 = 1 \cdot 334\,000 = 334\,000 \text{ J}$$

reprezintă căldura necesară pentru topirea gheții.

Din ecuația

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

rezultă

$$16\,750\,x = 2093 + 20\,930 + 334\,000 = 357\,024$$

de unde

$$x = \frac{357\,020}{16\,750} = 21'22''.$$

b) Dacă y este timpul căutat, căldura cedată de apă este egală cu

$$Q = 0{,}050\,y\,(80 - 10) \cdot 4187 = 14\,700\,y.$$

Aici intervine în plus cantitatea de căldură necesară pentru încălzirea apei provenită din gheață, de la temperatura 0 °C la 10 °C.

Procedînd ca la punctul anterior obținem

$$14\,700\,y = 398\,000$$

de unde y = 27'8'',

3.73. Un termometru (fig. 144) de construcție specială conținînd $M = 13{,}6$ kg de mercur, are lateral o eprubetă de sticlă cu pereții subțiri, sudată de pereții termometrului și pătrunzînd pînă în centrul rezervorului. Temperatura mercurului fiind egală cu 10 °C, se introduce în eprubetă o cantitate $m = 10$ g de gheață la temperatura 0 °C, care pătrunde pînă în fundul rezervorului, unde se topește. Știind că tija termometrului are o secțiune s = 1 mm² se întreabă cu cît va varia nivelul mercurului în tijă? Nu se va ține seamă de greutatea termometrului și se va presupune că nu există schimb de căldură între aparat și mediul înconjurător. Densitatea mercurului la 0 °C este egală cu 13 600 kg/m³, căldura sa specifică c = 138 J/kg·grd, iar căldura de topire

Scanned with OKEN Scanner

a gheții $l = 335 \cdot 10^3$ J/kg. Coeficientul de dilatație absolută al mercurului este $\gamma = 18 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}, iar coeficientul de dilatație volumică al sticlei este $\gamma_s = 26 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}.

Rezolvare. Variația nivelului de mercur din tijă este

$$h = \frac{V - V'}{s} \tag{1}$$

unde V este volumul mercurului la temperatura $t = 10$ °C, iar V' volumul mercurului la temperatura t' pe care o atinge aparatul după topirea gheții.

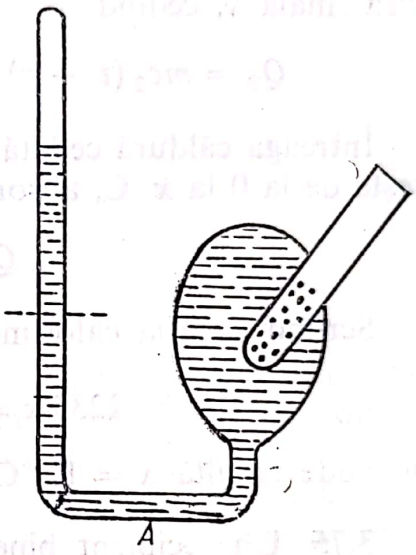


Fig. 144

Dacă ținem seamă că

$$V = V_0 [1 + (\gamma - \gamma_s) t];$$

$$V' = V_0 [1 + (\gamma - \gamma_s) t']$$

și înlocuim în (1), obținem

$$h = \frac{V_0 (\gamma - \gamma_s)(t - t')}{s} =$$

$$= \frac{13{,}600 \cdot 0{,}000154}{10^3 \cdot 13{,}6 \cdot 10^{-6}} (10 - t'). \tag{2}$$

Valoarea lui t' se deduce din ecuația calorimetrică

$$10^{-2} \cdot 335 \cdot 10^3 + 10^{-2} \cdot 4187\, t' = 13{,}600 \cdot 138\, (10 - t'). \tag{3}$$

Din ecuația (3) obținem

$$t' = 8^{\circ}\text{C}.$$

Înlocuind valoarea lui t' în (2), avem

$$h = \frac{13{,}600 \cdot 0{,}000154}{10^3 \cdot 13{,}6 \cdot 10^{-6}} \cdot 2 = 0{,}308 \text{ m}.$$

3.74. Topim 0,500 kg fosfor la temperatura $t = 54$ °C, pe care îl turnăm apoi într-un calorimetru a cărui constantă este $C = 2\,235$ J/grd. Cunoscînd temperatura inițială a calorimetrului, $t = 0$ °C, temperatura de topire a fosforului $t' = 44$ °C, căldura specifică a fosforului în stare lichidă $c_1 = 860$ J/kg·grd, căldura specifică a fosforului în stare solidă $c_2 = 747$ J/kg·grd și căldura de topire a fosforului $l = 21\,100$ J/kg, să se calculeze temperatura finală a calorimetrului după solidificarea și răcirea fosforului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Răcindu-se de la t la t', fosforul cedează cantitatea de căldură

$$Q_1 = mc_1 (t - t') = 0{,}500 \cdot 860 (54 - 44) = 4300 \text{ J},$$

iar în timpul solidificării fosforul cedează cantitatea de căldură

$$Q_2 = ml = 0{,}500 \cdot 21\,100 = 10\,550 \text{ J}.$$

După solidificare, fosforul se răcește de la temperatura t' pînă la temperatura finală x, cedînd

$$Q_3 = mc_2 (t' - x) = 0{,}500 \cdot 747 (44 - x) = 372 (44 - x) \text{ J}.$$

Întreaga căldură cedată de fosfor este luată de calorimetru, care se încălzește de la 0 la x °C, absorbind căldura

$$Q = C (x - 0) = 2235\, x.$$

Scriind ecuația calorimetrică, obținem

$$2235\, x = 4300 + 10\,550 + 372 (44 - x)$$

de unde rezultă $x = 12$ °C.

3.75. Un recipient bine protejat de încălzire și răcire contra influenței exterioare conține 1 kg de apă supratopită la temperatura de -2 °C. Lăsăm să cadă în această apă o bucată de gheață. Să se spună ce se întîmplă și cîtă apă se transformă în gheață cînd s-a restabilit echilibrul, căldura de topire a gheții fiind $l = 335\,000$ J/kg, iar căldura ei specifică $c = 2\,222$ J/kg·grd.

Rezolvare. Prin aruncarea bucății de gheață se vor solidifica brusc x kg de apă, care cedează $33\,500\, x$ jouli.

Restul de $(1 - x)$ kg de apă rămasă în stare lichidă se încălzește de la -2 la 0 °C, absorbind o cantitate de căldură egală cu $2 (1 - x) \cdot 4\,187$ J. Apa solidificată la -2 °C se încălzește pînă la 0 °C absorbind $cx = 2\,222\, x$ jouli, astfel încît putem scrie

$$335\,000\, x = 2 (1 - x) \cdot 4187 + 2222\, x$$

de unde rezultă $x = 0{,}0245$ kg $= 24{,}5$ g.

3.76. Un strat de zăpadă are suprafața de S metri pătrați, iar grosimea de 0,1 m. Densitatea zăpezii fiind egală cu 200 kg/m³, iar Soarele trimițînd 1 745 J/m²·s, să se afle în cît timp se va topi zăpada. Căldura de topire a zăpezii este egală cu 335 000 J/kg.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Masa stratului de zăpadă, exprimată în kg, este egală cu

$$m = Sh\rho = S \cdot 0{,}1 \cdot 200 = 20\,S.$$

Căldura necesară topirii este egală cu

$$Q_1 = ml = 20\,S \cdot 335\,000 = 6\,700\,000\,S \text{ J}.$$

Căldura trimisă de Soare în x secunde este

$$Q_2 = 1745 \cdot S \cdot x \text{ jouli}$$

Cantităţile de căldură Q_1 şi Q_2 fiind egale, rezultă

$$1745\,Sx = 6\,700\,000\,S;$$

$$x = \frac{6\,700\,000}{1745} = 3840'' = 64'.$$

3.77. Ce cantitate m de apă la temperatura $t_1 = 20$ °C poate fi îngheţată prin evaporarea unei cantităţi $M = 0{,}100$ kg eter sulfuric cu temperatura $t_2 = 20$ °C? Căldura specifică a eterului este $c_2 = 2\,093$ J/kg·grd, iar căldura sa de vaporizare $l_v = 376\,830$ J/kg. Căldura de evaporare a eterului se presupune independentă de temperatură, iar căldura de topire a gheţii este $l_t = 334{,}96 \cdot 10^3$ J/kg.

Rezolvare. La început eterul se răceşte de la temperatura t_2 la 0 °C şi căldura pe care o cedează, împreună cu căldura cedată de apă prin răcire de la temperatura t_1 la 0 °C şi prin solidificare, este luată de eter pentru vaporizare. Putem deci scrie ecuaţia

$$m(c_1 t_1 + l_t) + Mc_2 t_2 = Ml_v.$$

Din această ecuaţie rezultă

$$m = \frac{M(l_v - c_2 t_2)}{c_1 t_1 + l_t} = \frac{0{,}100\,(90 - 0{,}5 \cdot 20) \cdot 4187}{(20 + 80) \cdot 4187} = 0{,}08 \text{ kg}.$$

3.78. Un nor care s-a aflat la înălţimea de 1 km, a dat pe o suprafaţă de 10 km² o ploaie de 4 mm. Se cere:

a) Ce cantitate de căldură s-a pus în libertate în timpul formării norului prin condensarea vaporilor de apă. b) Ce cantitate de căldură apare în urma frecării picăturilor de ploaie cu aerul ştiind că ele ajung pe pământ cu viteza de 10 m/s. Se va considera căldura de vaporizare a apei $l_v = 226 \cdot 10^4$ J/kg, iar acceleraţia gravitaţiei $g = 10$ m/s².

(G. M. F., nr. 2/1962)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Cantitatea de apă conținută în nor este

$$m = \rho V = 1000 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^7 \text{ kg.}$$

Căldura pusă în libertate prin condensare este

$$Q = ml_v = 4 \cdot 10^7 \cdot 226 \cdot 10^4 = 904 \cdot 10^{11} \text{ J.}$$

b) Cantitatea de căldură care apare în urma frecării picăturilor cu aerul este egală cu energia mecanică pierdută, adică

$$Q' = W_p = mgh - \frac{1}{2} mv^2 = m\left(gh - \frac{v^2}{2}\right) =$$

$$= 4 \cdot 10^7 \left(10 \cdot 10^3 - \frac{10^2}{2}\right) = 4 \cdot 10^9 \cdot 99{,}5 = 398 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

3.79. Într-un radiator se introduc vapori de apă la temperatura $t = 100$ °C. Din radiator curg înapoi în cazan $2 \cdot 10^{-3}$ m³ de apă în timp de un minut. Ce cantitate de căldură cedează radiatorul mediului înconjurător în 8 ore, dacă apa care curge înapoi în cazan are temperatura $t' = 40$ °C. Căldura de vaporizare a apei este $l_v = 226 \cdot 10^4$ J/kg, iar căldura specifică a apei, $c =$ $= 4\,186$ J/kg·grd. Pierderile de căldură se neglijează.

(Adm. Fac. Mec. Agricolă, Cluj, 1965)

Rezolvare. Din enunțul problemei rezultă că în radiator se introduce o cantitate $m = 2$ kg vapori de apă pe minut, care cedează mediului ambiant cantitatea de căldură

$$Q' = ml_v + mc(t - t') = 2 \cdot 226 \cdot 10^4 + 2 \cdot 4186\,(100 - 40) =$$

$$= 452 \cdot 10^4 + 50{,}232 \cdot 10^4 = 502{,}232 \cdot 10^4 \text{ J.}$$

Cantitatea de căldură cedată de radiator în timp de 8 ore este

$$Q = 502{,}232 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 60 = 241 \cdot 10^7 \text{ J.}$$

3.80. Într-un calorimetru de alamă cu căldura specifică de 418,7 J/kg·grd care cîntărește 0,250 kg, se află 0,100 kg de gheață la temperatura de -10 °C. Se toarnă în calorimetru 0,375 kg apă caldă la 50°C obținîndu-se un amestec de apă cu temperatura de 20 °C. Se trec după aceea prin calorimetru vapori de apă la temperatura de 100 °C obținîndu-se un amestec de 0,500 kg de apă cu temperatura de 49,5 °C. Cunoscînd căldura specifică a gheții, de 2 093 J/kg·grd, se cere:

a) Căldura de topire a gheții. b) Cantitatea de vapori de apă introdusă în calorimetru. c) Căldura de vaporizare a apei.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) $0{,}250 \cdot 418{,}7 \cdot 30 + 0{,}100 \cdot 2093 \cdot 10 + 0{,}100\, l +$ $+ 0{,}100 \cdot 4187 \cdot 20 = 0{,}375 \cdot 4187 \cdot 30$;

$$l = 335\,000 \text{ J/kg}.$$

b) Cantitatea de vapori de apă care s-a introdus în calorimetru este egală cu

$$m = 0{,}500 - 0{,}375 - 0{,}100 = 0{,}500 - 0{,}475 = 0{,}025 \text{ kg}.$$

c) Ecuația calorimetrică este

$$0{,}025\, l_v + 0{,}025 \cdot 4187\,(100 - 49{,}5) = 0{,}250 \cdot 418{,}7\,(49{,}5 - 20) +$$
$$+ 0{,}475 \cdot 4187\,(49{,}5 - 20).$$

Din această ecuație se obține $l_v = 22{,}5 \cdot 10^5$ J/kg.

3.81. Într-un vas calorimetric cilindric, cu suprafața bazei $S = 120$ cm², se găsește un lichid cu temperatura $t_0 = 4$ °C, care are densitatea $\rho = 800$ kg/m³ și căldura specifică $c = 1\,675$ J/kg·grd. În calorimetru se găsește și o bucată de metal cu densitatea $\rho' = 8\,800$ kg/m³ și căldura specifică $c' = 418{,}7$ J/kg·grd. Presiunea exercitată de lichid asupra bazei vasului este egală cu $p = 1\,568$ N/m², iar forța arhimedică care împinge bucata de metal este egală cu $F_a = 0{,}49$ N. Considerîndu-se $g = 9{,}8$ m/s², se cere:

a) Înălțimea lichidului din vas. b) Volumul și masa bucății de metal. c) Volumul și masa lichidului. d) Dacă în vas se toarnă 0,100 kg de vapori de apă cu temperatura de 100 °C și cu căldura latentă de vaporizare $l_v = 2{,}27 \cdot 10^6$ J/kg, ce temperatură finală are amestecul.

(Adm. Inst. Politehnic, Buc., 1965)

Rezolvare.

a) $h = \dfrac{p}{\rho g} = \dfrac{1568}{800 \cdot 9{,}8} = \dfrac{1568}{7840} = 0{,}2 \text{ m} = 20 \text{ cm}.$

b) $V' = \dfrac{F_a}{\rho g} = \dfrac{0{,}49}{800 \cdot 9{,}8} = \dfrac{0{,}49}{7840} = 6{,}25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3,$

$$m' = V'\rho' = 6{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 8{,}8 \cdot 10^3 = 0{,}550 \text{ kg}.$$

c) $V = Sh - V' = 120 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 10^{-2} - 6{,}25 \cdot 10^{-5} = 233{,}75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3,$

$$m = V\rho = 233{,}75 \cdot 10^{-5} \cdot 8 \cdot 10^2 = 1{,}870 \text{ kg}.$$

d) $(mc + m'c')(t - t_0) = m''l_v + m''c_a(100 - t)$;

$$(1{,}87 \cdot 1675 + 0{,}55 \cdot 418{,}7)(t - 4) = 0{,}1\,[2{,}27 \cdot 10^6 + 4187\,(10 - t)];$$

$$3979\, t = 283\,112; \quad t = 71{,}1 \text{ °C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.82. Într-un calorimetru de alamă având căldura specifică $c_1 = 418{,}7$ J/kg·grd și masa $m_1 = 0{,}500$ kg, se găsește $m_2 = 1$ kg de gheață cu căldura specifică $c_2 = 2\,093$ J/kg·grd la temperatura $t_1 = -10$ °C. În calorimetru se toarnă apă caldă la $t_2 = 55$ °C. Se cere:

a) Ce cantitate de apă caldă va trebui să turnăm pentru a obține în calorimetru numai gheață la temperatura de 0 °C. b) Ce cantitate de apă caldă la temperatura de 55 °C va trebui să turnăm în continuare pentru ca în calorimetru să existe numai apă la 5 °C. c) După ce a încetat turnarea apei se introduce în calorimetru 0,500 kg platină, iar temperatura apei se ridică cu 5 °C. Ce temperatură inițială a avut bucata de platină? Se neglijează toate pierderile. Căldura specifică a platinei este 134 J/kg·grd, iar căldura de topire a gheții este $l = 335 \cdot 10^3$ J/kg.

Rezolvare

a) $(m_1c_1 + m_2c_2)(0 - t_1) = x(ct_2 + l)$;

$$(0{,}5 \cdot 418{,}7 + 1 \cdot 2093) \cdot 10 = x(4187 \cdot 55 + 335\,000).$$

Rezolvînd ecuația se obține $x = 0{,}039$ kg apă, iar în calorimetru vom avea 1,039 kg gheață la 0 °C.

b) $0{,}500 \cdot 418{,}7 \cdot 5 + 1{,}039 \cdot 335\,000 + 1{,}039 \cdot 4187 \cdot 5 =$

$= x \cdot 4187(55 - 5)$; $x = 1{,}771$ kg apă.

În calorimetru vom avea 2,810 kg apă la 5 °C.

c) $0{,}500 \cdot 418{,}7 \cdot 5 + 2{,}810 \cdot 4187 \cdot 5 = 0{,}500 \cdot 134(t - 10^{\circ})$.

Rezultă $t = 903{,}6$ °C.

3.83. Într-o cadă cu masa $m_1 = 10$ kg și cu căldura specifică $c_1 = 418{,}7$ J/kg·grd, care conține $m_2 = 20$ kg apă la temperatura $t_1 = 20$ °C, cade de la înălțimea $h = 5$ m o bucată de gheață cu masa $m_3 = 2$ kg și cu temperatura $t_3 = -5$ °C. Se cere cantitatea x de vapori de apă la 100 °C, care trebuie introdusă în amestecul din cadă, pentru ca temperatura finală să fie $t = 15$ °C, fără a se schimba starea inițială a căzii cu apă. Se dau: căldura specifică a gheții $c_3 = 2\,093$ J/kg·grd, căldura de topire a gheții $l_t = 33{,}6 \cdot 10^4$ J/kg·grd și căldura latentă de vaporizare a apei $l_v = 2{,}255 \cdot 10^6$ J/kg. Se neglijează frecarea în aer și variația lui g cu altitudinea.

(Olimpiada de fizică, 1965)

Rezolvare Cada și apa din ea având temperatura mai ridicată cedează o parte din căldură, care, împreună cu căldura vaporilor și cea produsă prin

Scanned with OKEN Scanner

căderea gheţii, vor servi la transformarea gheţii în apă la temperatura t, adică:

$$(c_1m_1 + c_2m_2)(t_1 - t) + x[l_v + c_2(100 - t)] + m_3gh = m_3(c_3t_3 + l_t + c_2t);$$

$$(418{,}7 \cdot 10 + 4187 \cdot 20)(20 - 15) + x[2{,}255 \cdot 10^6 + 4187(100 - 15)] +$$

$$+ 2 \cdot 9{,}8 \cdot 5 = 2(2093 \cdot 5 + 336\,000 + 4187 \cdot 15).$$

Făcînd calculele se obţine $x = 0{,}144$ kg.

3.84. Un vas cilindric cu înălţimea $H = 2$ m conţine un strat de mercur cu grosimea $h = 1$ m, iar deasupra aer la presiunea atmosferică $p_0 = 9{,}81 \cdot 10^4$ N/m². Vasul se închide la partea superioară şi, printr-un orificiu de bază, mercurul începe să curgă. Se cere înălţimea stratului de mercur din vas, cînd scurgerea se opreşte.

(R. F. Ch., nr. 10/1965)

R e z o l v a r e. Scurgerea se opreşte cînd presiunea atmosferică din afară va fi egală cu suma dintre presiunea hidrostatică a mercurului şi presiunea aerului din vas, adică

$$p_0 = p_1 + \rho gx. \tag{1}$$

Din legea Boyle-Mariotte se calculează p_1

$$p_0(H - h)S = p_1(H - x)S;$$

$$p_1 = \frac{p_0(H - h)}{H - x}.$$

Făcînd înlocuirile în (1) se obţine

$$\rho gx^2 - x(\rho gH + p_0) + p_0h = 0. \tag{2}$$

Făcînd înlocuirile în ecuaţia (2) cu datele numerice se obţine

$$13\,600 \cdot 9{,}81\,x^2 - x(13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 2 + 9{,}8 \cdot 10^4) + 9{,}81 \cdot 10^4 \cdot 1 = 0;$$

$$34x^2 - 93x + 25 = 0; \quad x = 0{,}30 \text{ m}.$$

3.85. Două bile metalice cu masele egale se trimit una contra celeilalte cu viteze egale. Să se calculeze viteza cu care trebuie proiectate cele două bile pentru ca ele să se topească, socotind că întreaga energie se transformă în căldură şi că nu există pierderi de căldură în exterior.

Date numerice: $c = 209{,}3$ J/kg·grd, $t_0 = 20$ °C, temperatura de topire $t = 320$ °C, căldura de topire $l = 25\,120$ J/kg.

(Inst. de Transp., cursurile fără frecvenţă, 1952)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Căldura provenită din energia cinetică a celor două bile, $Q = 2 \cdot 1/2\, mv^2 = mv^2$, servește la topirea lor, adică

$$mv^2 = 2m\,[c\,(t - t_0) + l]\,;$$

$$v = \sqrt{2\,[209{,}3\,(320 - 20) + 25\,120]} = 419 \text{ m/s}.$$

3.86. O cantitate oarecare de fosfat de sodiu se află în stare supratopită, la temperatura $t_0 = 0$ °C. Se aruncă în această substanță o cantitate foarte mică de fosfat de sodiu solid provocînd astfel cristalizarea. Dacă se cunosc: punctul de topire $t = 36$ °C, căldura de topire $l = 100\,500$ J/kg, căldura specifică în stare solidă $c = 1\,745$ J/kg·grd și căldura specifică în stare lichidă $c' = 3\,140$ J/kg·grd ale fosfatului de sodiu, se cere să se afle ce cantitate de substanță cristalizează.

Rezolvare. Fie m cantitatea de fosfat de sodiu în stare lichidă și x cantitatea de fosfat de sodiu care cristalizează brusc prin aruncarea fosfatului de sodiu solid în soluție și care degajă o cantitate de căldură $Q = lx = 100\,500\,x$ jouli. Această căldură este distribuită astfel:

a) Încălzește lichidul necristalizat, de la temperatura t_0 la temperatura de topire t, consumînd cantitatea de căldură

$$Q_1 = c'\,(m - x)\,(t - t_0) = 113\,040\,(m - x).$$

b) Încălzește substanța cristalizată de la temperatura t_0 la temperatura t, consumînd cantitatea de căldură

$$Q_2 = cx\,(t - t_0) = 1745\,x\,(36 - 0) = 62\,820\,x.$$

Ecuația calorimetrică este

$$Q = Q_1 + Q_2\,; \quad 24\,x = 27\,(m - x) + 15\,x$$

de unde rezultă $x = 3/4\,m$; $x/m = 0{,}75 = 75\,\%$.

3.87. Un teren cu aria de 2000 m² este acoperit cu un strat gros de 70 cm de zăpadă, cu temperatura de -10°C. Terenul este curățit cu mașini speciale de topit zăpadă, cu un randament de 30%. Mașinile se încălzesc cu lemne cu puterea calorică de $134 \cdot 10^5$ J/kg. Ce cantitate de lemne este necesară în acest scop, dacă densitatea zăpezii este 600 kg/m³, căldura ei specifică 1675 J/kg·grd, iar căldura de topire a zăpezii $335 \cdot 10^5$ J/kg?

(Olimpiada de Fizică, 1952)

Rezolvare. Cantitatea de zăpadă care trebuie curățită este

$$m = 2000 \cdot 0{,}7 \cdot 600 = 840\,000 \text{ kg}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă x este cantitatea de lemne necesară, q – puterea lor calorică și η – randamentul, putem scrie ecuația calorimetrică

$$\eta qx = mc(t - t_0) + ml.$$

Din această ecuație rezultă

$$x = \frac{m[c(t - t_0) + l]}{\eta q} = \frac{84 \cdot 10^4 (1675 \cdot 10 + 335 \cdot 10^3)}{0{,}3 \cdot 134 \cdot 10^5} = 73{,}5\ 10^3 \text{ kg}.$$

3.88. Un calorimetru conține 0,800 kg de gheață la temperatura de 0°C. Se introduce în el un curent de vapori de apă saturați la 100°C în cantitate de 5 g/min. Acești vapori se condensează și topesc gheața. Să se calculeze timpul în care toată gheața se topește precum și cantitatea totală de apă conținută în calorimetru?

Se dă căldura de vaporizare a apei la 100°C, care este de $22{,}5 \cdot 10^5$ J/kg, iar căldura de topire a gheții de $3{,}35 \cdot 10^5$ J/kg.

(Adm. Școala Politehnică, București, 1946)

Rezolvare. În timp de x minute se introduce în calorimetru cantitatea $m = 5 \cdot 10^{-3}\ x$ kilograme de vapori, care cedează gheții căldura de condensare și de răcire. Ecuația calorimetrică este $5 \cdot 10^{-3}\ x(22{,}5 \cdot 10^5 + 4187 \cdot 100) = 0{,}800 \cdot 3{,}35 \cdot 10^5$.

Rezolvînd ecuația se obține $x = 20$ min 6 s.

În calorimetru se află $m = 0{,}800 + 5 \cdot 10^{-3}\ x = 900{,}45 \cdot 10^{-3}$ kg apă.

3.89. Pentru producerea vaporilor de apă necesari unei uzine textile se folosește un cazan încălzit cu motorină. Cazanul dă 200 kg vapori pe oră. Să se calculeze cantitatea de motorină necesară pe oră, știind că apa intră în cazan la temperatura de 15°C și că numai 15% din căldura produsă este absorbită de apă. Puterea calorică a motorinei este egală cu $46 \cdot 10^6$ J/kg, iar căldura de vaporizare a apei $22{,}55 \cdot 10^5$ J/kg.

(Concursul de fizică, 1952)

Rezolvare. Dacă notăm cu x cantitatea de motorină consumată într-o oră, cantitatea de căldură furnizată apei din cazan este

$$Q = \eta qx = 0{,}15 \cdot 46 \cdot 10^6 x = 6{,}9 \cdot 10^6 x.$$

Această cantitate de căldură este distribuită astfel:

a) Cele 200 kg apă transformate în 200 kg de vapori, se încălzesc de la 15°C la 100°C și absorb

$$Q_1 = 200 \cdot 4187(100 - 15) = 7{,}12 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

b) Cele 200 kg apă la temperatura de 100°C se evaporă și absorb cantitatea de căldură

$$Q_2 = 22{,}55 \cdot 10^5 \cdot 200 = 45{,}2 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Întrucît

$$Q = Q_1 + Q_2$$

rezultă că

$$6{,}9 \cdot 10^6 x = 7{,}12 \cdot 10^7 + 45{,}2 \cdot 10^7 = 52{,}32 \cdot 10^7;$$

$$x = 75{,}8 \text{ kg}.$$

3.90. Într-un aparat de distilare se folosesc 66 l de apă de răcire la 10,2°C. Prin distilare se obțin 3 kg de alcool, iar apa se încălzește la 21,05°C. Care este căldura de vaporizare a alcoolului, știind că acesta începe să fiarbă la 78,4°C, iar căldura specifică în stare lichidă a alcoolului este de 2430 J/kg·grd?

Rezolvare. Să notăm cu x căldura de vaporizare cerută.

Căldura cedată de vaporii de alcool pentru a se transforma în alcool, la temperatura de fierbere, plus căldura cedată de alcoolul lichid pentru a se răci de la temperatura de fierbere pînă la 21,05°C este egală cu căldura absorbită de apă pentru a se încălzi de la 10,2 la 21,05°C, adică

$$3x + 3 \cdot 2430\,(78{,}40 - 21{,}05) = 66 \cdot 4186{,}8\,(21{,}05 - 10{,}2);$$

$$x = 8{,}6 \cdot 10^5 \text{ J/kg}.$$

3.91. Pe un primus cu randamentul de 50% se încălzesc 2 l apă de la 10 la 100°C și se evaporă o parte din apă. Cîtă apă s-a evaporat dacă în primus au ars 44,5 g de petrol lampant cu puterea calorică de $46 \cdot 10^6$ J/kg, iar căldura de vaporizare a apei este $22{,}55 \cdot 10^5$ J/kg ?

Rezolvare. Notînd cu x cantitatea de apă vaporizată, ecuația calorimetrică este

$$0{,}50 \cdot 44{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 46 \cdot 10^6 = 2 \cdot 4187\,(100 - 10) + 22{,}55 \cdot 10^5 x;$$

de unde rezultă $x = 0{,}120$ kg.

3.92. Într-un amestec de 20 l de apă și 10 kg de gheață la temperatura de 0°C, se toarnă plumb topit la temperatura de topire de 327°C. Temperatura finală a amestecului ajunge la 100°C, dar în același timp se vaporizează 200 g apă. Să se afle cît plumb s-a turnat, căldura de topire a plumbului fiind egală cu 20 934 J/kg, iar căldura specifică a plumbului în stare solidă cu 125,6 J/kg·grd.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Căldura cedată prin solidificarea și răcirea celor x kilograme de plumb turnat în amestec se consumă pentru încălzirea apei, topirea gheții, încălzirea apei provenite din gheață și pentru vaporizarea apei, adică

$$20\,934\,x + 125{,}6\,x\,(327 - 100) = 20 \cdot 4187 \cdot 100 + 10\,(335\,000 + 4187 \cdot 100) + \\ + 0{,}200 \cdot 2{,}225 \cdot 10^6 .$$

Rezolvînd ecuația rezultă $x = 331$ kg.

3.93. Într-un vas gol, de capacitate 2,02 l, se introduce un litru de aer uscat sub presiunea $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² și $20 \cdot 10^{-6}$ m³ de apă. Se întreabă care va fi presiunea interioară, presupunînd că temperatura este de 30°C în momentul experienței și că presiunea maximă a vaporilor de apă, la această temperatură, este de $4{,}14 \cdot 10^3$ N/m² ?

Rezolvare. În stare inițială, aerul din balon are presiunea $p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² și volumul $V_1 = 1\ l = 10^{-3}$ m³.

După introducerea apei, volumul aerului devine

$$V_2 = 2{,}020 - 0{,}020 = 2l = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 ;$$

presiunea p_2 a aerului se deduce din legea Boyle-Mariotte

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5}{2} = 5{,}065 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2 .$$

Presiunea vaporilor de apă la 30°C fiind $f = 0{,}414 \cdot 10^4$ N/m², presiunea totală interioară este dată de legea lui Dalton

$$p = p_2 + f = (5{,}065 + 0{,}414)\,10^4 = 5{,}479\ \text{N/m}^2 .$$

3.94. Punctul de aburire (temperatura la care vaporii care se află în aer devin saturanți) al unei camere este 8°C. Camera are lungimea de 10 m, lățimea de 5 m și înălțimea de 3 m. Temperatura camerei este de 18°C. Se cere:

a) Umiditatea absolută a camerei. b) Umiditatea relativă. c) Cantitatea de vapori aflată în cameră.

Rezolvare. a) Din tabele găsim că punctului de aburire 8°C îi corespunde presiunea $f = 1{,}065 \cdot 10^3$ N/m² și cantitatea de vapori de $8{,}3 \cdot 10^{-3}$ kg/m³.

b) Din tabele se găsește, de asemenea, că presiunea vaporilor de apă saturanți, la temperatura de 18°C, este egală cu $F = 2{,}07 \cdot 10^3$ N/m². Umiditatea relativă va fi

$$B = 100 \cdot \frac{f}{F} = 100 \cdot \frac{1{,}065}{2{,}07} = 51{,}7\ \%.$$

c) Volumul camerei este $V = 150\ m^3$, iar cantitatea de vapori care se găsește în cameră este

$$M = 150 \cdot 8{,}3 \cdot 10^{-3} = 1{,}245\ kg.$$

3.95. Masa unui metru cub de aer la temperatura 0°C și presiunea $1{,}013 \cdot 10^{-5}\ N/m^3$ este 1,293 kg, iar densitatea relativă a vaporilor de apă în raport cu aerul, 5/8. Să se calculeze, în acest caz, masa unui metru cub de aer la temperatura de 30°C și presiunea $1{,}025 \cdot 10^5\ N/m^2$, starea higrometrică fiind 3/4, iar presiunea vaporilor la 30°C fiind de $4{,}2 \cdot 10^3\ N/m^2$.

Rezolvare. Din relația

$$B = \frac{f}{F}$$

scoatem

$$f = B \cdot F = \frac{3}{4} \cdot 4{,}2 \cdot 10^3 = 3{,}15 \cdot 10^3\ N/m^2 \cdot$$

Presiunea aerului uscat va fi egală cu

$$p = H - f = (102{,}5 - 3{,}15)\, 10^3 = 99{,}35 \cdot 10^3\ N/m^2 \cdot$$

Masa unui metru cub de aer uscat la 30°C și $99{,}35 \cdot 10^3\ N/m^2$ este

$$m' = 1 \cdot 1{,}293 \frac{99{,}35}{101{,}3} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}00367 \cdot 30} = 1{,}143858\ kg.$$

Masa unui metru cub de vapori de apă la 30°C și presiunea f va fi egală cu

$$m'' = 1 \cdot 1{,}293 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}00367 \cdot 30} = 0{,}02262\ kg.$$

Masa totală a unui metru cub de aer umed la 30°C va fi deci

$$m = m' + m'' = 1{,}143858 + 0{,}022620 = 1{,}166478\ kg.$$

3.96. Un balon de sticlă, cu capacitatea de 10 l la 0°C, conține, la această temperatură, aer uscat a cărui presiune este $1{,}013 \cdot 10^5\ N/m^2$. Se introduc în balon 10 g de apă fără ca masa aerului să varieze; se închide balonul și se încălzește la 100°C. Să se calculeze presiunea interioară în centimetri coloană de mercur.

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul de dilatație al sticlei este $\gamma = \frac{1}{116\,100}$ grd^{-1}, iar al aerului $\alpha = \frac{1}{273}$ grd^{-1}. Densitatea relativă a vaporilor de apă este 5/8, iar masa unui litru de aer, în condiții normale, este de $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ kg.

Rezolvare. Prin încălzire la 100°C, capacitatea balonului devine

$$V = V_0(1 + \gamma \cdot t) = 10\left(1 + \frac{100}{116\,100}\right) = 10{,}008613\ \text{l}.$$

Presiunea aerului uscat la 100 °C se deduce din relația

$$\frac{p_0 V_0}{1 + \alpha t_0} = \frac{pV}{1 + \alpha t}$$

în care $p_0 = 76$ cm, $V_0 = 10$ l, $t_0 = 0$°C, iar

$$V = V_0(1 + \gamma t) = 10{,}008613\ \text{l}, \quad t = 100°\text{C}.$$

Vom avea deci

$$p = \frac{p_0 V_0 (1 + \alpha t)}{V_0 (1 + \gamma t)} = \frac{76\,(1 + 0{,}00367 \cdot 100)}{1 + 0{,}000008613 \cdot 100} = 103{,}80\ \text{cm Hg}.$$

Prin încălzire la 100 °C, cele 10 g apă se transformă în 10 g de vapori, care ocupă volumul $V = 10{,}008613$ l și au presiunea f, ce se deduce din relația

$$m = 10 = 1{,}3 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{f}{76} \cdot \frac{10{,}008613}{1{,}367};$$

$$f = \frac{10 \cdot 8 \cdot 76 \cdot 1{,}367}{1{,}3 \cdot 5 \cdot 10{,}007613} = 127{,}74\ \text{cm Hg}.$$

Presiunea totală a amestecului este

$$H = p + f = 103{,}80 + 127{,}74 = 231{,}54\ \text{cm Hg}.$$

3.97. Un cilindru plasat într-o incintă la temperatura $t = 100$ °C este despărțit în două compartimente egale A și B, printru-un piston etanș, fără frecare și de greutate neglijabilă. Cele două compartimente conțin aer la 100 °C sub presiunea de $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m^2. În compartimentul A se injectează vapori de apă pînă cînd aerul din acest compartiment devine saturat. Pistonul va lua o nouă poziție de echilibru. Să se calculeze:

a) Raportul în care variază volumul aerului în compartimentul B; b) Raportul în care variază presiunea în B.

Aplicație pentru cazul în care volumul cilindrului este de 10 l.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) La început fiecare compartiment are volumul V și presiunea $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².

După ce introducem vapori de apă în compartimentul A, acesta va avea volumul V' și presiunea p', iar compartimentul B va avea volumul V'' și presiunea p''.

Putem deci scrie următoarele relații

$$V' + V'' = 2V \tag{1}$$

$$p' = p'' \tag{2}$$

relația (2) fiind stabilită în baza condiției de echilibru a pistonului.

Aplicînd aerului din B legea Boyle-Mariotte, avem

$$p''V'' = pV = 1{,}013 \cdot 10^5 V. \tag{3}$$

Aerul din compartimentul A fiind saturat, umiditatea relativă este $B = 1$ și deci $f = F$.

Presiunea vaporilor de apă la 100 °C fiind $F = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m², presiunea aerului uscat din compartimentul A este

$$p' - f = p' - 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot$$

Aplicînd aerului uscat din compartimentul A legea Boyle-Mariotte avem

$$(p' - 1{,}013 \cdot 10^5)\, V' = 1{,}013 \cdot 10^5 V. \tag{4}$$

Din relațiile (1), (2), (3) și (4) obținem ecuația

$$V''^2 - 4VV'' + 2V^2 = 0$$

de unde rezultă $V'' = 0{,}595\ V$.

Volumul aerului din B scade deci în raportul $V''/V = 0{,}595$.

În cazul particular în care $2V = 20$, avem $V'' = 5{,}95$ l.

b) Din relația (3) scoatem

$$p'' = 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{V}{V''} = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{0{,}595} \cdot$$

Presiunea în B crește față de presiunea inițială în raportul

$$\frac{p''}{p} = \frac{1}{0{,}595} = 1{,}7.$$

În cazul particular: $p'' = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 1{,}7 = 1{,}725 \cdot 10^5$ N/m².

Scanned with OKEN Scanner

B. Fizica moleculară

19. Teoria cinetică moleculară a materiei, fenomene moleculare în lichide

a. Considerații teoretice

1. *Legea lui Avogadro.* Volume egale de gaze diferite în condiții egale de temperatură și de presiune ocupă același număr de molecule. La temperatura $t_0 = 0$ °C și presiunea $p_0 = 1$ atm, o moleculă gram din orice gaz ocupă un volum $V_0 = 22{,}414$ l, numit *volum molecular* sau *volum molar normal.*

Un mol din orice substanță, conține același număr de molecule, $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$, numit *numărul lui Avogadro.*

2. *Numărul lui Loschmidt* este numărul de molecule cuprins într-un centimetru cub de gaz în condiții normale de presiune și de temperatură și este

$$n_0 = \frac{N}{V_0} = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{22\,414} = 2{,}673 \cdot 10^{19} \text{ molecule/cm}^3 .$$

3. Între volumul molar, presiunea și temperatura unui gaz există relația

$$pV = RT.$$

Pentru o cantitate de gaz de volum V și masă m, avem

$$p\,V = \frac{m}{M} RT = n\,RT$$

unde M este masa moleculară a gazului, iar n este numărul de moli conținuți în cantitatea de gaz.

4. Densitatea unui gaz este egală cu

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} .$$

5. Presiunea exercitată de un gaz asupra pereților vasului este egală cu

$$p = \frac{1}{3} n\, mv^2 = \frac{2}{3} n\, W_c$$

unde v este viteza medie pătratică, $W_c = mv^2/2$ este energia cinetică medie a moleculelor gazului iar n numărul de molecule din unitatea de volum de gaz.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ținem seamă că $n = N/V$ avem

$$pV = \frac{1}{3} N m v^2 = RT = \frac{2}{3} N W_c.$$

6. Dacă notăm cu $k = R/N = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K constanta lui Boltzmann

$$W_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT;$$

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{mN}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$p = n k T; \quad n = \frac{p}{k T}.$$

7. Tensiunea superficială σ este rezultanta, pe unitatea de lungime, a forțelor tangențiale la suprafața lichidului. Ea se măsoară în newtoni pe metru (N/m).

Tensiunea superficială mai poate fi definită prin raportul dintre creșterea energiei potențiale și creșterea suprafeței unui lichid datorită unei cauze exterioare, adică

$$\sigma = \frac{W}{S}$$

și de aceea ea se mai poate exprima și în jouli pe metru pătrat (J/m²).

8. *Capilaritatea.* Dacă r este raza tubului capilar, h înălțimea coloanei de lichid și ρ densitatea, avem

$$2\pi r \sigma \cos \theta = r^2 h \rho g; \; \sigma = \frac{r h \rho g}{2 \cos \theta},$$

unde θ este unghiul de racordare dintre suprafața lichidului și perete.

b. Probleme

3.98. a) Cunoscînd volumul molecular al unei substanțe în stare de gaz, $V_0 = 22{,}414$ l, să se calculeze din formula gazelor perfecte valoarea constantei R pentru o moleculă-gram de gaz în condiții normale de temperatură și presiune.

b) Folosind formula lui Clausius $pV = 2/3\ Nmv^2$ și legea gazelor perfecte $pV = RT$ să se calculeze viteza medie pătratică a moleculelor pentru următoarele gaze: hidrogen, oxigen și azot la temperatura de 0 °C.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se calculeze viteza medie pătratică a moleculelor de hidrogen la 800 °C.

Se dau greutățile moleculare ale hidrogenului, oxigenului și azotului: 2, 32, 28.

(R.M.F., nr. 6/1951)

Rezolvare

a) $R = p_0 V_0 \alpha = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 22{,}414 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{273} = 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol °}K} =$

$$= 8\,314 \frac{\text{J}}{\text{k mol °}K}.$$

b) Din cele două relații date scoatem

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

pentru $T = 273°\text{K}$, obținem

$$v_{H_2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314 \cdot 273}{2 \cdot 10^{-3}}} = 1\,844 \text{ m/s},$$

$$v_{O_2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} = 461 \text{ m/s},$$

$$v_{N_2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314 \cdot 273}{28 \cdot 10^{-3}}} = 492{,}4 \text{ m/s}.$$

c) Pentru hidrogen la $T = 800 + 273 = 1073$ °K, avem

$$v_{H_2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314 \cdot 1\,073}{2 \cdot 10^{-3}}} = 3\,660 \text{ m/s}.$$

3.99. Patru grame de azot la temperatura de 27 °C și presiunea de $5{,}065 \cdot 10^4$ N/m², ocupă un volum de 7 l. Să se calculeze masa moleculară a azotului.

Rezolvare

$$M = \frac{m R T}{p V} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,314 \cdot 300}{5{,}065 \cdot 10^5 \cdot 7 \cdot 10^{-3}} = 28.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.100. Într-un vas se află 100 g apă și 8 g gheață la temperatura de 0 °C și presiunea de $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m². Cunoscînd căldura de topire a gheții $l_t = 334 \cdot 10^3$ J/kg și căldura de vaporizare a apei $l_v = 2{,}25 \cdot 10^6$ J/kg se cere:

a) Căldura necesară pentru topirea gheții. b) Căldura totală necesară pentru transformarea amestecului în vapori la 100 °C. c) Cantitatea de combustibil necesară vaporizării amestecului, dacă puterea calorică a combustibilului este $29{,}26 \cdot 10^6$ J/kg, iar randamentul încălzitorului este 80%. c) Volumul vaporilor formați la temperatura de 100 °C și presiunea atmosferică normală. e) Dacă temperatura vaporilor crește cu 50 °C, care este volumul ocupat de vapori ?

(Adm. Instit. Politehnic, Buc., 1967)

Rezolvare

a) $Q_1 = ml_t = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 334 \cdot 10^3 = 2672$ J.

b) $Q = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 334 \cdot 10^3 + 108 \cdot 10^{-3} (4187 \cdot 100 + 2{,}25 \cdot 10^6) = 290892$ J.

c) $m' = \dfrac{Q}{\eta q} = \dfrac{290\,892}{0{,}8 \cdot 29{,}26 \cdot 10^6} \approx 0{,}0125$ kg $= 12{,}5$ g.

d) La 100 °C vaporii au presiunea $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² și presupunîndu-i un gaz perfect, avem

$$V_1 = n\frac{RT_1}{p} = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT_1}{p} = \frac{108 \cdot 10^{-3}}{18} \cdot \frac{8\,314 \cdot 373}{1{,}013 \cdot 10^5} = 0{,}183 \text{ m}^3.$$

$$\text{e) } V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 0{,}183 \cdot \frac{423}{373} = 0{,}208 \text{ m}^3.$$

3.101. Un schior coboară o pantă înclinată cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Să se determine viteza de coborîre, dacă presiunea aerului $p = 8 \cdot 10^4$ N/m², temperatura $t = -3$ °C, masa schiorului $m = 72$ kg și aria secțiunii sale frontale $S = 0{,}40$ m². Coeficientul de frecare cu zăpada, $\mu = 0{,}04$ iar cel de rezistență din partea aerului, $c = 1{,}5$ (fig. 145).

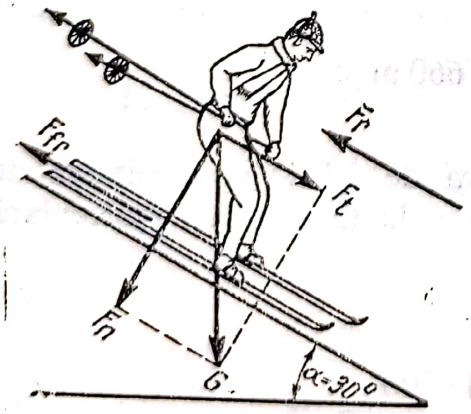


Fig. 145

Se cunoaște $M_a = 28{,}9$ și constanta generală a gazelor, $R = 8314$ J/kmol °K.

(R. F. Ch., nr. 7/1965)

Rezolvare. Componenta greutății paralelă cu planul trebuie să echilibreze forța de frecare și forța de rezistență a aerului. Putem scrie deci

$$F_t = F_r + F_{fr};\ mg \sin \alpha = \frac{c}{2} \rho S v^2 + \mu mg \cos \alpha. \qquad (1)$$

Din ecuația generală a gazelor rezultă

$$\rho = \frac{p M_a}{R T} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 28{,}9}{8\,314 \cdot 270} = 1{,}0294 \text{ kg/m}^3.$$

Scoțînd valoarea v din (1) și făcînd înlocuirile obținem

$$v = \sqrt{\frac{2 mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{c S \rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 72 \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}500 - 0{,}04 \cdot 0{,}866)}{1{,}5 \cdot 0{,}40 \cdot 1{,}0294}} =$$

$$= \sqrt{\frac{657{,}44}{0{,}6176}} = \sqrt{1064{,}50} = 32{,}6 \text{ m/s}.$$

3.102. Un balon umplut cu heliu, trebuie să aibă forța ascensională de 29 430 N la înălțimea de 8000 m, unde presiunea atmosferică este de $3{,}425 \cdot 10^4$ N/m², iar temperatura aerului de 233 °K. Cunoscîndu-se $M_{aer} = 28{,}9$ și $M_{heliu} = 4$, se cere:

a) Volumul balonului la această înălțime și cantitatea (masa) de heliu necesară pentru încărcarea balonului. b) Volumul balonului și forța ascensională la sol, unde presiunea atmosferică este de $9{,}81 \cdot 10^4$ N/m², iar temperatura aerului 15 °C (288 °K).

(Olimpiada de fizică, 1962)

Rezolvare. a) Dacă G_a și G_h sînt greutățile aerului și heliului, iar m_a și m_h masele lor și dacă se neglijează greutatea învelișului și a nacelei avem

$$F = G_a - G_h = g (m_a - m_h). \qquad (1)$$

Din legea generală a gazelor $pV = mRT/M$ scoatem valorile lui m_a și m_h pe care introducîndu-le în (1) obținem

$$F = \frac{g p V}{R T} (M_a - M_h). \qquad (2)$$

Din această relație scoatem valoarea lui V, ținînd seamă că $p = 3{,}425 \cdot 10^4$ N/m² iar $R = 8314$ J/kmol °K,

$$V = \frac{F \cdot R \cdot T}{g\, p\, (M_a - M_h)} = \frac{29\,430 \cdot 8\,314 \cdot 233}{9{,}81 \cdot 3{,}425 \cdot 10^4 \cdot 24{,}9} = 6\,785 \text{ m}^3,$$

$$m_{H_e} = \frac{p\, V\, M_h}{R\, T} = \frac{3{,}425 \cdot 10^4 \cdot 6\,785 \cdot 4}{8\,314 \cdot 233} = 481 \text{ kg}.$$

b) $$V' = \frac{m_{H_e}}{M_{H_e}} \cdot \frac{RT}{p} = \frac{481}{4} \cdot \frac{8314 \cdot 288}{9{,}81 \cdot 10^4} = 2937 \text{ m}^3,$$

$$F' = \frac{g\, p\, V}{R\, T}(M_a - M_{H_e}) = \frac{9{,}81 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4 \cdot 2\,937 \cdot 24{,}9}{8\,314 \cdot 288} = 29\,430 \text{ N}.$$

3.103. Două recipiente A și B, perfect izolate de mediul înconjurător, sînt unite printr-un tub de volum neglijabil prevăzut cu robinet de închidere. Recipientul A conține $n = 1{,}015$ kmoli de oxigen la presiunea $p = 50{,}65 \cdot 10^5$ N/m² și temperatura $t_1 = 27$ °C, iar B este gol (vidat).

Cunoscînd constanta gazelor perfecte $R = 8314$ J/kmol °K și greutatea moleculară a oxigenului $M = 32$, se cere:

a) Masa oxigenului și volumul recipientului A. b) Densitatea ρ_0 a oxigenului la presiunea și temperatura normală. c) Deschizînd robinetul, o parte din oxigen trece în B, iar în ambele recipiente se stabilește aceeași presiune și temperatură, $p = 20{,}26 \cdot 10^5$ N/m² și $t = 17$ °C. Care este volumul recipientului B ? d) Cantitatea de căldură pierdută de gazul din A după deschiderea robinetului și stabilirea echilibrului termic, dacă oxigenul are căldura specifică $c = 921$ J/kg·grd.

Rezolvare

a) $$m = n\, M = 1{,}015 \cdot 32 = 32{,}48 \text{ kg},$$

$$V_1 = \frac{n\, RT_1}{p_1} = \frac{1{,}015 \cdot 8\,314 \cdot 300}{50{,}65 \cdot 10^5} = 0{,}5 \text{ m}^3.$$

b) $$\rho_{t_1} = \frac{m}{V_1} = \frac{32{,}48}{0{,}5} = 64{,}96 \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_0 = \rho_{t_1} \cdot \frac{p_0}{p_1}(1 + \alpha\, t_1) = \frac{64{,}96 \cdot 1{,}013 \cdot 300}{50{,}65 \cdot 273} = 1{,}427 \text{ kg/m}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Ținînd seamă că presiunea inițială în recipientul B este $p_2 = 0$, volumul V_2, al acestui recipient, este dat de legea lui Dalton

$$\frac{p(V_1 + V_2)}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T} = \frac{p_1 V_1}{T_1};$$

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p} \cdot \frac{T}{T_1} - 1 \right) = 0{,}5 \left(\frac{50{,}65}{20{,}26} \cdot \frac{290}{300} - 1 \right) = 0{,}7075 \text{ m}^3.$$

d) Cantitatea de gaz care trece în B este

$$m' = \frac{pV_2 M}{RT} = \frac{20{,}26 \cdot 0{,}7075 \cdot 32}{8\,314 \cdot 290} = 19 \text{ kg},$$

$$\Delta Q = mct_1 - (m - m')ct = c[mt_1 - (m - m')t] =$$

$$= 921\,(32{,}48 \cdot 27 - 13{,}48 \cdot 17) = 596\,624 \text{ J},$$

3.104. Într-un rezervor de volum V, se găsește hidrogen la temperatura $t = 15$ °C și la presiunea $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m². Se ridică temperatura gazului la $t_1 = 37$ °C și, pentru a menține presiunea constantă se scoate din vas o cantitate $m_0 = 6{,}052$ g de hidrogen la presiunea atmosferică $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² și la temperatura $t_0 = 15$ °C.

Cunoscînd masa moleculară a hidrogenului egală cu 2 și densitatea acestuia la presiunea și temperatura normală, $\rho_0 = 0{,}089$ kg/m³, se cere:

a) Densitatea hidrogenului la 15 °C. b) Volumul ocupat de gaz la ieșirea din rezervor. c) Volumul rezervorului. d) Masa gazului rămas în rezervor. e) Numărul de moli de gaz rămași cum și cei aflați inițial în rezervor.

(Adm. Inst. Politehnic, Buc., 1967)

Rezolvare

a) $$\rho_t = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{1 + \alpha t} = 1 \cdot \frac{0{,}089 \cdot 273}{288} = 0{,}084 \text{ kg/m}^3.$$

b) $$V_0 = \frac{m_0}{\rho_{t_0}} = \frac{m_0}{\rho_t} = \frac{6{,}052 \cdot 10^{-3}}{0{,}084} = 0{,}072 \text{ m}^3.$$

c) Înainte de evacuare, gazul ieșit, de volum V_0 și cel rămas, de volum V_1, au format un amestec de volum V și temperatură $T = 273 + 15 = 288$ °K.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd legea amestecurilor sub presiune constantă și ținînd seamă că $V_1 = V$, obținem

$$\frac{V}{288} = \frac{0{,}072}{288} + \frac{V}{310}; \quad V = 1{,}0145 \text{ m}^3.$$

$$\text{d) } m_1 = V_1 \rho_{t_1} = V \frac{\rho_0}{1 + \alpha t_1} = \frac{1{,}0145 \cdot 0{,}089 \cdot 273}{310} =$$

$$= 0{,}0795 \text{ kg} = 79{,}5 \text{ g}.$$

$$\text{e) } n_1 = \frac{m_1}{M} = \frac{79{,}5}{2} = 39{,}8; \quad n = \frac{m_0 + m_1}{M} = \frac{85{,}552}{2} = 42{,}8 \text{ moli}.$$

3.105. Un amestec de azot și hidrogen se găsește într-un rezervor cu capacitatea de 5 l la temperatura de 20 °C. Presiunea parțială a hidrogenului este de $5{,}065 \cdot 10^4$ N/m², iar cantitatea de azot aflată în aparat este de 0,85 mol. Să se determine presiunea amestecului de gaze.

Rezolvare. Dacă p_H și p_N sînt presiunile hidrogenului și azotului, avem

$$p = p_H + p_N;$$

$$p_N = n \frac{RT}{V} = 0{,}85 \cdot \frac{8{,}314 \cdot 293}{5 \cdot 10^{-3}} = 4{,}15 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2,$$

$$p = (0{,}5065 + 4{,}15)\, 10^5 = 4{,}6565 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

3.106. Care este viteza medie pătratică a hidrogenului aflat la temperatura de 127 °C ? Care este masa moleculară a unui gaz aflat la aceeași temperatură dar care are viteza medie pătratică de 4,7 ori mai mare ?

(G.M.F., nr. 3/19)

Rezolvare. Viteza medie pătratică a hidrogenului este

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}314 \cdot 400}{2}} = 2{,}24 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

Notînd cu v_1 și M_1 viteza medie pătratică și masa moleculară a gazului cerut, avem

$$\frac{v}{v_1} = 4{,}7 = \sqrt{\frac{M_1}{M}}$$

de unde rezultă

$$M_1 = 4{,}7^2 M = 22{,}09 \cdot 2 = 44{,}18 \text{ g/mol}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.107. Să se calculeze energia eliberată la contopirea picăturilor mici de apă cu raza $r = 10^{-3}$ mm într-o picătură mare de rază $R = 2$ mm. Să se calculeze, de asemenea, energia eliberată la contopirea picăturilor mici de glicerină de rază $r = 5 \cdot 10^{-4}$ mm într-o picătură mare de rază $R = 5$ mm. Se dau tensiunile superficiale ale apei și glicerinei $73 \cdot 10^{-3}$ N/m² și $65 \cdot 10^{-3}$ N/m.

(R. M. F., nr. 1/1955 și G.M.F., nr. 2/1955)

Rezolvare. Dacă notăm cu n numărul picăturilor mici, suprafața acestora va fi

$$S = 4\pi r^2 n. \tag{1}$$

Suprafața picăturii mari este egală cu

$$S_0 = 4\pi R^2. \tag{2}$$

Întrucît $S > S_0$, prin contopirea celor n picături mici într-o picătură mare, se va elibera o cantitate de energie egală cu

$$W = (S - S_0)\,\sigma = 4\pi (r^2 n - R^2)\,\sigma. \tag{3}$$

Pentru determinarea numărului n al picăturilor mici, vom scrie relația

$$\frac{4\pi r^3 n}{3} = \frac{4\pi R^3}{3},$$

de unde rezultă $n = R^3/r^3$, care introdus în (3) ne dă

$$W = 4\pi \left(r^2 \frac{R^3}{r^3} - R^2 \right) \sigma = 4\pi R^2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \sigma. \tag{4}$$

Făcînd înlocuirile în relația (4) obținem:
pentru apă

$$W = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} - 1 \right) 73 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 50{,}24 \cdot 10^{-6} \cdot 1\,999 \cdot 73 \cdot 10^{-3} = 0{,}0037 \text{ J},$$

pentru glicerină

$$W = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-7}} - 1 \right) 65 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 10^{-4} \cdot 3{,}14 \cdot 9\,999 \cdot 65 \cdot 10^{-3} = 0{,}2 \text{ J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.108. Pentru determinarea tensiunii superficiale a unui lichid se cîntărește o picătură care se rupe de la un capilar și se măsoară diametrul d al gîtului picăturii în momentul ruperii. S-a găsit că 318 picături de lichid cîntăresc 5 g iar $d = 0{,}7$ mm. Să se găsească tensiunea superficială a acestui lichid.

Rezolvare. Forțele de tensiune superficială de-a lungul circumferinței gîtului picăturii echilibrează greutatea picăturii.

Dacă notăm cu $r = d/2 = 0{,}07/2 = 0{,}035$ cm raza gîtului, cu σ tensiunea superficială, a lichidului și cu $G = mg$ greutatea picăturii, avem

$$2\pi r\,\sigma = mg;\ \sigma = \frac{mg}{2\pi r} = \frac{15{,}7\cdot 10^{-6}\cdot 9{,}81}{6{,}28\cdot 3{,}5\cdot 10^{-4}} = 0{,}07\ \text{N/m}.$$

3.109. Un cadru dreptunghiular de sîrmă $ABDC$ (fig. 146) are latura MN mobilă. Cînd laturile MN și AB sînt alăturate, se introduce cadrul într-o soluție de apă cu săpun. Se ține cadrul în poziție verticală, iar de mijlocul laturii MN, a cărei lungime $l = 1{,}5$ cm, se trage cu o forță $F = 1{,}20\cdot 10^{-3}$ N. Latura MN deplasîndu-se, se formează o peliculă a cărei tensiune superficială ține în echilibru forța F. Să se calculeze tensiunea superficială a lichidului.

Rezolvare. Fie $AM = BN = h$ deplasarea laturii MN. Pentru crearea suprafeței $ABNM$ se consumă lucrul mecanic egal cu

$$L = F\,h.$$

Observăm că se formează două membrane de lichid de o parte și de alta a cursorului MN, astfel încît aria totală a acestora este

$$S = 2\,h\,l,$$

Conform definiției tensiunii superficiale, avem

$$\sigma = \frac{L}{S} = \frac{Fh}{2\,l\,h} = \frac{F}{2\,l} = \frac{1{,}20\cdot 10^{-3}}{2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2}} = 4\cdot 10^{-2}\ \text{N/m}.$$

3.110. Într-un lichid cu densitatea $\rho = 800$ kg/m^3 și tensiunea superficială $\sigma = 5{,}1\cdot 10^{-2}$ N/m se introduce un tub capilar (fig. 147) de rază $r = 0{,}25$ cm. La ce înălțime medie se ridică lichidul în tubul capilar, dacă unghiul de racordare cu sticla este egal cu $\theta = 45°$?

Rezolvare. Componenta verticală a tensiunii superficiale, care ține în echilibru coloana de lichid este egală cu $\sigma' = \sigma\cos\theta$. Pentru echilibru, putem scrie deci

$$2\,\pi\,r\,\sigma' = \pi\,r^2\,h\,\rho\,g$$

unde h este înălțimea medie de ridicare.

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd înlocuirile şi scoţînd valoarea lui h, avem

$$h = \frac{2\,\sigma\cos\theta}{r\,\rho\,g} = \frac{2\cdot 51\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}707}{2{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 800\cdot 9{,}81} = 4{,}07\cdot 10^{-3}\ \text{m} = 0{,}407\ \text{cm}.$$

3.111. Două lame paralele introduse în apă sînt depărtate între ele cu distanţa $e = 0{,}15$ cm. Care este tensiunea superficială σ, ştiind că lichidul se ridică între cele două lame la o înălţime $h = 1$ cm, iar unghiul de racordare este $\theta = 0°$.

Rezolvare. Greutatea coloanei de lichid cuprinsă între cele două lame este egală cu suma forţelor capilare ce se exercită de-a lungul liniei de

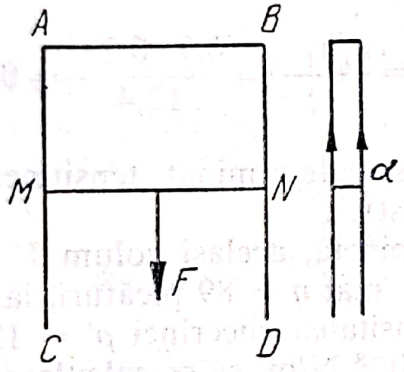


Fig. 146

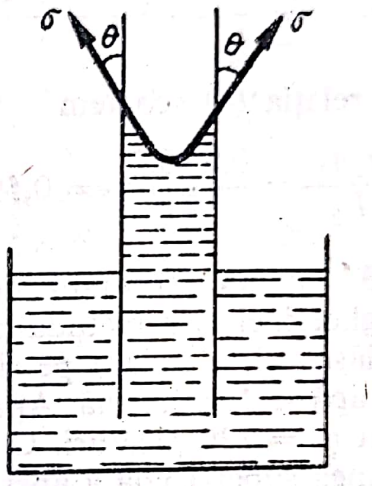


Fig. 147

contact a apei cu cele două lame, adică

$$he\,\rho\,g = 2\sigma l\cos\theta$$

unde l este lăţimea lamelor pe care o considerăm egală cu unitatea.

Din această relaţie rezultă

$$\sigma = \frac{he\,\rho g}{2l\cdot\cos\theta} = \frac{10^{-2}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 10^{3}\cdot 9{,}8}{2\cdot 1} = 73{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{N/m}.$$

3.112. Într-un lichid a cărui densitate este 800 kg/m³ se afundă trei tuburi capilare. Înălţimile la care se ridică lichidul în cele trei tuburi capilare sînt $h_1 = 6{,}2$ mm; $h_2 = 9{,}4$ mm şi $h_3 = 12{,}4$ mm. Se cunoaşte diametrul primului tub $d_1 = 1{,}8$ mm. Să se calculeze tensiunea superficială a lichidului şi razele tuburilor al doilea şi al treilea ştiind că udarea este perfectă.

(R. M. F., nr. 6/1952)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Pentru fiecare dintre cele trei tuburi se poate scrie

$$2\pi r_1\sigma = \pi r_1^2 h_1 \rho g; \tag{1}$$

$$2\pi r_2\sigma = \pi r_2^2 h_2 \rho g; \tag{2}$$

$$2\pi r_3\sigma = \pi r_3^2 h_3 \rho g. \tag{3}$$

Din aceste relații rezultă

$$h_1 r_1 = h_2 r_2 = h_3 r_3 \cdot \tag{4}$$

Din (1) obținem

$$\sigma = \frac{r_1 h_1 \rho g}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 800 \cdot 9{,}81}{2} = 21{,}896 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}.$$

Din relația (4) scoatem

$$r_2 = \frac{r_1 h_1}{h_2} = \frac{0{,}9 \cdot 6{,}2}{9{,}4} = 0{,}59 \text{ mm}, \quad r_3 = \frac{r_1 h_1}{h_3} = \frac{0{,}9 \cdot 6{,}2}{12{,}4} = 0{,}45 \text{ mm}.$$

3.113. Într-un laborator de biologie s-a determinat tensiunea superficială a glicerinei prin metoda picăturilor, astfel:

S-a lăsat să se scurgă pe rînd dintr-o pipetă, același volum V centimetri cubi de apă și de glicerină. Apa scursă a format $n = 89$ picături, iar glicerina a format $n' = 126$ picături. Cunoscînd densitatea glicerinei $\rho' = 1260$ kg/m^3 și tensiunea superficială a apei $\sigma = 73{,}5 \cdot 10^{-3}$ N/m, să se calculeze tensiunea superficială a glicerinei.

Rezolvare. Dacă notăm cu v volumul unei picături de apă și cu v' volumul unei picături de glicerină, avem

$$V = n v = n' v' \cdot \tag{1}$$

Notînd cu m și m' masele celor două picături de apă și de glicerină, iar cu ρ densitatea apei, relația (1) devine

$$V = n \frac{m}{\rho} = n' \frac{m'}{\rho'}$$

de unde rezultă

$$\frac{m}{m'} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{\rho}{\rho'}.$$

Pe de altă parte, tensiunile superficiale ale apei și glicerinei sînt date de relațiile

$$2\pi r\sigma = mg \text{ și } 2\pi r\sigma' = m'g$$

Scanned with OKEN Scanner

unde r este raza orificiului de scurgere al pipetei, egal cu raza gîtului pe care îl formează picătura în momentul desprinderii, iar g este accelerația gravitației.

Din ultimele două relații obținem

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{m'}{m} = \frac{n\rho'}{n'\rho}$$

de unde rezultă

$$\sigma' = \frac{n\rho'}{n'\rho}\,\sigma = \frac{89 \cdot 1{,}26}{126 \cdot 1} \cdot 73{,}5 \cdot 10^{-3} \approx 65{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}.$$

3.114. Pe fundul unui vas există o fisură cu lățimea $a = 0{,}02$ mm. Pînă la ce înălțime h se poate turna mercur în vas fără ca acesta să se scurgă prin fisură ? Densitatea mercurului $\rho = 13\,600$ kg/m^3, iar tensiunea superficială $\sigma = 0{,}487$ N/m.

Rezolvare. Considerînd o lungime egală cu un centimetru din fisură, greutatea coloanei de lichid cuprinsă între marginile fisurii, este echilibrată de forțele create de tensiunea superficială de-a lungul celor două margini ale fisurii, adică

$$2 \cdot 1 \cdot \sigma = 1 \cdot a \cdot \rho g h; \quad h = \frac{2\sigma}{a\rho g} = \frac{2 \cdot 0{,}487}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 13{,}6 \cdot 9{,}81 \cdot 10^3} = 0{,}37 \text{ m}.$$

3.115. De pe fundul unui lac se degajă bule de gaze cu diametrul $d_1 = 1$ mm. Cînd ajung la suprafața apei, diametrul bulelor de gaze devine $d_2 = 1{,}1\ d_1$. Să se calculeze adîncimea lacului știind că tensiunea superficială a apei, $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ N/m, iar presiunea atmosferică $p_0 = 1$ at $= 9{,}81 \cdot 10^4$ N/m^2. Temperatura este aceeași.

Rezolvare. Pe fundul și la suprafața apei, bulele de gaze au volumele

$$V_1 = \frac{\pi d_1^3}{6} \text{ și } V_2 = \frac{1{,}331\,\pi d_1^3}{6}.$$

Tensiunea superficială creează în interiorul bulei o presiune dată de relația

$$\frac{\pi d^2}{4}\,p = \pi d\sigma; \quad p = \frac{4\sigma}{d}.$$

Presiunea totală la care este supusă bula pe fundul lacului, este egală cu

$$p_1 = p_0 + \rho g h + \frac{4\sigma}{d_1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Presiunea bulei la suprafața apei este egală cu

$$p_2 = p_0 + \frac{4\sigma}{d_2} = p_0 + \frac{4\sigma}{1{,}1\, d_1}.$$

Aplicînd legea Boyle-Mariotte obținem

$$\frac{\pi d_1^3}{6}\left(p_0 + \rho g h + \frac{4\sigma}{d_1}\right) = \frac{1{,}331\,\pi d_1^3}{6}\left(p_0 + \frac{4\sigma}{1{,}1\, d_1}\right).$$

Din această relație rezultă

$$h = \frac{1}{\rho g}\left(0{,}331\, p_0 + \frac{0{,}84\,\sigma}{d_1}\right) = 3{,}32 \text{ m}.$$

3.116. Într-un cilindru cu piston mobil de greutate neglijabilă, este închis un balon de săpun cu diametrul $d = 1$ cm, umplut cu aer. La început, în cilindru presiunea aerului este egală cu presiunea atmosferică $p_0 = 1$ at $= 9{,}81 \cdot 10^4$ N/m^2. Împingînd încet pistonul în cilindru, balonul de săpun se comprimă și diametrul lui se reduce la jumătate. Cunoscînd tensiunea superficială a apei cu săpun, $\sigma = 40 \cdot 10^{-3}$ N/m, să se determine presiunea aerului din cilindru.

Rezolvare. Volumul și presiunea inițială ale balonului sînt

$$V_1 = \frac{\pi d^3}{6}; \quad p_1 = p_0 + \frac{4\sigma}{d}.$$

După împingerea pistonului, volumul și presiunea balonului devin

$$V_2 = \frac{\pi d^3}{48}; \quad p_2 = p + \frac{8\sigma}{d}.$$

Conform legii Boyle-Mariotte, avem

$$\frac{\pi d^3}{6}\left(p_0 + \frac{4\sigma}{d}\right) = \frac{\pi d^3}{48}\left(p + \frac{8\sigma}{d}\right).$$

Din această relație rezultă

$$p = 8\, p_0 + \frac{24\sigma}{d} = 8 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4 + \frac{24 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 78{,}4896 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2.$$

3.117. În două tuburi capilare comunicante cu diametrii $d_1 = 0{,}5$ mm și $d_2 = 1$ mm se află glicerină la temperatura $t = 20$ °C. Cunoscînd tensiunea

Scanned with OKEN Scanner

superficială $\sigma = 66 \cdot 10^{-3}$ N/m la temperatura de 20 °C, densitatea $\rho_0 = 1260$ kg/m³ la temperatura 0°C și coeficientul de dilatație cubică $\gamma = 0{,}0005$ grd^{-1} ale glicerinei, se cere să se afle diferența ascensiunii capilare (diferența de nivel) a lichidului din cele două tuburi.

Rezolvare. Densitatea glicerinei la temperatura de 20°C este

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t} = \frac{1260}{1 + 0{,}0005 \cdot 20} = \frac{1260}{1{,}01} = 1250 \text{ kg/m}^3.$$

Ascensiunile capilare în cele două tuburi sînt

$$h_1 = \frac{4\sigma}{d_1 \rho g} \text{ și } h_2 = \frac{4\sigma}{d_2 \rho g}.$$

Diferența ascensiunii capilare este

$$h_1 - h_2 = \frac{4\sigma (d_2 - d_1)}{d_1 d_2 \rho g} = \frac{4 \cdot 66 \cdot 10^{-3} \cdot (0{,}1 - 0{,}05) \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}25 \cdot 9{,}81 \cdot 10^3} =$$

$$= 2{,}15 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2{,}15 \text{ cm}.$$

C. Noțiuni de termotehnică

20. Lucrul mecanic al gazelor și vaporilor, mașini termice

a. Considerații teoretice

1. Lucrul mecanic produs prin destinderea gazului sub presiune constantă este egal cu produsul dintre presiune și variația de volum a gazului, adică

$$L = p \Delta V = p (V_2 - V_1).$$

2. Lucrul mecanic al gazului sub presiune variabilă este egal cu aria mărginită de axa absciselor, de curba de variație a presiunii și de ordonatele volumului inițial și final al gazului.

3. Lucrul mecanic al mașinilor termice cu piston, cu simplu efect, într-o cursă, exprimat în jouli, este egal cu

$$L = (p_1 - p_2) S l$$

Scanned with OKEN Scanner

unde p este presiunea inițială cu care aburul sau gazul intră în cilindru, măsurată în newtoni pe metru pătrat, p_2 este presiunea finală sub care se face evacuarea aburului sau gazului, S este aria pistonului în metri pătrați și l este cursa pistonului, în metri.

Dacă mașina este cu dublu efect, lucrul mecanic efectuat într-o cursă este

$$L = 2\,(p_1 - p_2)\,S\,l.$$

Ținînd seamă că produsul Sl reprezintă volumul cilindrului, avem

$$L = (p_1 - p_2)\,V.$$

4. Puterea mașinilor termice cu simplu efect, exprimată în wați, este

$$P = \frac{p\,Sl\,n}{60}$$

unde p este presiunea medie a aburului sau gazului, iar n este turația mașinii.

Pentru mașinile termice cu dublu efect, avem

$$P = \frac{2\,p\,Sl\,n}{60}.$$

5. Randamentul termic al mașiniilor termice este

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

unde Q_1 este căldura primită de la abur sau gaz, Q_2 — căldura pierdută prin evacuare, T_1 și T_2 temperaturile absolute a izvorului cald și a corpului rece.

b. Probleme

3.118. Într-o mașină cu abur cu piston, cu simplu efect, presiunea aburului este $p = 2{,}21 \cdot 10^5$ N/m². Aria pistonului este $S = 500$ cm², iar cursa $l = 0{,}4$ m. Într-un minut pistonul se duce și se întoarce de 120 ori. Se cere să se calculeze:

a) Lucrul mecanic efectuat de mașină. b) Puterea mașinii.

Rezolvare. a) Lucrul mecanic efectuat într-un minut este

$$L = p\,Sl\,n = 2{,}21 \cdot 10^5 \cdot 500 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}4 \cdot 120 = 529\,740 \text{ J}.$$

b) Puterea mașinii este

$$P = \frac{p\,Sl\,n}{60} = \frac{529\,740}{60} = 8829 \text{ W} = 8{,}829 \text{ kW}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.119. O mașină cu abur cu dublu efect, lucrează cu o presiune a aburului $p = 5{,}886 \cdot 10^5$ N/m² și cu emisiunea în atmosferă. Aria pistonului este $S = 2$ dm² iar cursa $l = 0{,}3$ m. Turația mașinii este de 120 rot/min. Presiunea atmosferică este $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m². Se cere:

a) Lucrul mecanic efectuat de mașină, b) Puterea mașinii.

Rezolvare.

a) $L = 2(p - p_0)\,Sln = 2 \cdot 4{,}873 \cdot 10^5 \cdot 200 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}3 \cdot 120 = 701\,712$ J.

b) $P = \dfrac{2(p - p_0)\,Sln}{60} = \dfrac{701\,712}{60} = 11\,695$ W $= 11{,}695$ kW.

3.120. Presiunea medie a vaporilor într-o mașină cu abur este egală cu $p = 1{,}962 \cdot 10^5$ N/m². Diametrul pistonului este $D = 49$ cm, diametrul tijei pistonului, $d = 6{,}5$ cm, iar cursa pistonului, $l = 10$ cm. Să se calculeze puterea acestei mașini știind că randamentul mecanic este $\eta = 85\%$, iar turația 150 rot/min. Mașina lucrează cu dublu efect.

Rezolvare. Aria activă a pistonului este

$$S = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{3{,}14}{4}(2\,401 - 42{,}25) =$$

$$= \frac{3{,}14 \cdot 2358{,}75}{4} = 1\,852 \text{ cm}^2.$$

Puterea produsă de abur este

$$P = \frac{2\,p\,Sln}{60} = \frac{2 \cdot 1{,}962 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1852 \cdot 0{,}1 \cdot 150}{60} = 18\,200 \text{ W} = 18{,}2 \text{ kW}.$$

Puterea utilă pe care o poate furniza mașina este

$$P_u = \eta\,P = 0{,}85 \cdot 18{,}2 = 15{,}4 \text{ kW}.$$

3.121. Un motor termic primește gazul de la sursa caldă la temperatura $t_1 = 800$ °C și, după ce lucrează în cilindru, este cedat sursei reci la temperatura $t_2 = 30$ °C. Să se calculeze căldura primită de motor de la sursa caldă și căldura cedată sursei reci în timp de o oră, știind că motorul dezvoltă 73,5 kW.

Rezolvare. Temperaturile absolute ale gazului sînt

$$T_1 = 800 + 273 = 1073 \text{ °K} \quad \text{și} \quad T_2 = 30 + 273 = 303 \text{ °K}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Randamentul termic al motorului este

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{303}{1073} = 0{,}717,$$

Pe de altă parte, avem

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{L}{Q_1}$$

de unde rezultă că într-o secundă motorul primește

$$Q_1 = \frac{L}{\eta} = \frac{73{,}5 \cdot 1000}{0{,}717} = 102\,500 \text{ J} = 102{,}5 \text{ kJ}.$$

Într-o oră motorul primește cantitatea de căldură

$$Q_1' = 102{,}5 \cdot 3600 = 369 \cdot 10^3 \text{ kJ}.$$

Căldura cedată sursei reci se deduce din relația

$$Q_1 - Q_2 = L,$$

$$Q_2 = Q_1 - L = 102{,}5 - 73{,}5 = 29 \text{ kJ}$$

iar într-o oră se cedează

$$Q_2' = 29 \cdot 3600 = 104{,}4 \cdot 10^3 \text{ kJ}.$$

3.122. O mașină termică consumă pe fiecare oră cantitatea $m = 0{,}75$ kg de combustibil cu puterea calorică $q = 25{,}08 \cdot 10^6$ J/kg. Care este randamentul mașinii dacă puterea mașinii este de 2 250 W ?

(R. M. F., nr. 8/1952)

R e z o l v a r e. Lucrul mecanic produs de mașină într-o oră este

$$L = Q_1 - Q_2 = 2250 \cdot 3600 = 81 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Cantitatea de căldură consumată într-o oră este

$$Q_1 = mq = 0{,}75 \cdot 25{,}08 \cdot 10^6 = 18{,}81 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Randamentul mașinii este

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{81 \cdot 10^5}{18{,}81 \cdot 10^6} = 0{,}43.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.123. O mașină de produs gheață prin detentă de aer funcționează reversibil între 15 °C și 45 °C. Să se calculeze lucrul mecanic minim necesar pentru fabricarea unui gram de gheață, știind că pentru a se solidifica, unui gram de apă îi trebuie 335 J. Dacă mașina are 736 W, cîtă gheață produce pe oră ? (Se presupune apa la 15 °C).

(G.M. F., n2. 12/1954)

Rezolvare. Energia mecanică necesară pentru fabricarea unui gram de gheață este

$$W = (Q - Q') \tag{1}$$

unde Q este cantitatea de căldură a sursei calde, iar Q' cantitatea de căldură cedată sursei reci.

Mașina funcționînd după ciclul Carnot, putem scrie

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'} \tag{2}$$

unde T este temperatura absolută a sursei calde, iar T' — temperatura absolută a sursei reci.

Scoțînd pe Q din (2) și înlocuindu-l în (1), obținem

$$W = Q' \frac{T - T'}{T'}. \tag{3}$$

Ținînd seamă că $Q' = 335 + 62{,}8 = 397{,}8$ J (căldură necesară unui gram de apă la temperatura de 15 °C pentru a se transforma în gheață), $T = 288$ °K, $T' = 228$ °K, și înlocuind în (3) obținem

$$W = 397{,}8 \frac{60}{228} = 105 \text{ J}.$$

Dacă puterea mașinii, $P = 736$ W, cantitatea de gheață produsă într-o oră este

$$m = 3600 \cdot \frac{P}{W} = 3600 \cdot \frac{736}{105} = 25\,200 \text{ g} = 25{,}2 \text{ kg}.$$

3.124. Într-un vas cilindric izolat termic, cu piston și supapă, se găsesc 10 moli de gaz cu presiunea inițială $p = 19{,}6 \cdot 10^4$ N/m² și cu volumul inițial $V_0 = 150$ *l*. Se cere:

a) Temperatura inițială a gazului. b) Ce temperatură T va avea gazul cînd, după comprimarea pînă la volumul $V = 15$ l, reușește să deschidă supapa, știind că forța rezistentă a supapei este $F = 2940$ N, iar suprafața supapei, $s = 10$ cm². Se dă constanta generală a gazelor, $R = 8{,}314$ J/mol °K.

(Adm. Inst. Politehnic, Cluj, 1964)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Din ecuația Mendeleev-Clapeyron

$$p\,V = n\,R\,T$$

unde n este numărul de moli, rezultă

$$T_0 = \frac{p_0\,V_0}{n\,R} = \frac{19{,}6 \cdot 10^4 \cdot 0{,}150}{10 \cdot 8{,}314} = 353{,}6\ ^\circ\text{K}.$$

b) Forța datorită presiunii exercitată de gazul comprimat pe suprafața supapei învingînd forța rezistentă, putem scrie

$$p \cdot s = F; \quad p = \frac{F}{s} = \frac{2940}{10^{-3}} = 29{,}4 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2.$$

Temperatura rezultă din ecuația Mendeleev-Clapeyron

$$T = \frac{p\,V}{p_0\,V_0}\,T_0 = \frac{29{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}015}{19{,}6 \cdot 10^4 \cdot 0{,}150} \cdot 353{,}6 = 530{,}4\ ^\circ\text{K}.$$

3.125. Într-un cilindru orizontal prevăzut cu piston, se găsesc 289,6 g aer la 27 °C și presiunea de $2{,}026 \cdot 10^5$ N/m². Se încălzește masa de aer în mod izobar pînă la 500 °K. Se cere:

a) Volumul inițial al aerului. b) Lucrul mecanic produs de gaz în dilatația izobară. c) Cantitatea de căldură pe care o absoarbe masa de aer prin încălzire. Se dă căldura specifică a aerului sub presiune constantă, $c_p = 1005$ J/kg·grd și masa moleculară medie a aerului, $M = 28{,}96$.

(Olimpiada de fizică, 1964)

Rezolvare. a) Din relația $p_0\,V_0 = \frac{m}{M}\,RT_0$ scoatem

$$V_0 = \frac{m\,R\,T_0}{p_0\,M} = \frac{289{,}6 \cdot 8{,}314 \cdot 300}{2{,}026 \cdot 10^5 \cdot 28{,}96} = 0{,}123\ \text{m}^3.$$

b) Forța de împingere a pistonului este egală cu $F = p_0\,S$, iar forța opusă de presiunea atmosferică este egală cu $F_1 = p_1 S$.

Lungimea cursei pistonului este egală cu $l = \frac{V - V_0}{S}$.

Lucrul mecanic produs de gaz este

$$L = (F - F_1)\,l = (p_0 - p_1)\,Sl = (p_0 - p_1)\,(V - V_0). \qquad (1)$$

Ținînd seamă de formula $V/V_0 = T/T_0$, relația (1) devine

$$L = \frac{p_0 - p_1}{T_0}(T - T_0)\,V_0 = \frac{2{,}026 \cdot 10^5 - 1{,}013 \cdot 10^5}{300}(500 -$$

$$- 300) \cdot 123 \cdot 10^{-3} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 200 \cdot 123 \cdot 10^{-3}}{300} = 8308{,}5 \text{ J}.$$

c) $Q = m\,c_p\,\Delta\,t = 0{,}2896 \cdot 1005 \cdot 200 = 58{,}105$ kJ.

3.126. Un volum $V_1 = 0{,}100$ m³ aer închis într-un corp de pompă la presiunea $p_1 = 1$ atm $= 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² și la temperatura $t_1 = 27$ °C, reprezentat prin punctul A (fig. 148) parcurge un ciclu cu suprafața dreptunghiulară $ABCDA$, ale cărei laturi AB și CD sînt paralele cu axa Op, iar laturile BC și DA sînt paralele cu axa Ov. În punctul B, presiunea se dublează, iar în punctul C, volumul aerului devine de 1,5 ori mai mare decît în A. Se cere:

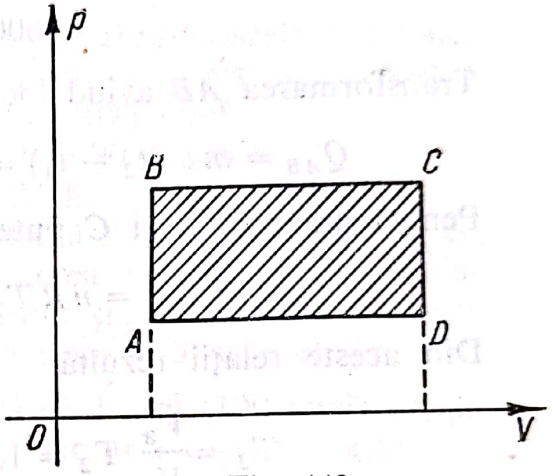


Fig. 148

a) Lucrul mecanic și căldura produsă în această transformare. b) În transformarea reprezentată de laturile AB și BC, gazul absoarbe căldură, iar în transformarea reprezentată de laturile CD și DA, gazul cedează căldură. Să se calculeze cantitatea de căldură în cele patru transformări și să se verifice cu rezultatele obținute în aliniatul precedent. Se dau: densitatea aerului în condiții normale de temperatură și presiune, $\rho_0 = 1{,}293$ kg/m³, căldura specifică a aerului sub presiune constantă, $c = 1\,004{,}6$ J/kg·grd și căldura specifică a aerului sub volum constant, $c' = 719$ J/kg·grd.

Rezolvare. a) În punctele A și B, volumele și presiunile sînt

$$V_1 = 0{,}1 \text{ m}^3\ ; \quad p_1 = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2\ ,$$

$$V_2 = 0{,}1 \text{ m}^3\ ; \quad p_2 = 2{,}026 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Lucrul mecanic și căldura produsă în transformare sînt egale cu aria dreptunghiului $ABCDA$, adică

$$L = Q = (V_2 - V_1)(p_2 - p_1) = (0{,}15 - 0{,}10) \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 = 5066 \text{ J}.$$

b) Densitatea aerului la presiunea de $1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² și temperatura de 27 °C este

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha\,t_1} = \frac{1{,}3 \cdot 273}{300} = 1{,}183 \text{ kg/m}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Masa aerului este

$$m = V_1 \rho = 0{,}100 \cdot 1{,}183 = 0{,}1183 \text{ kg}.$$

Pentru punctele A și B putem scrie

$$p_1 V_1 = n R T_1 \quad \text{și} \quad p_2 V_2 = n R T_2.$$

Din aceste ecuații rezultă

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 = 2 T_1 = 2(27 + 273) = 600°\text{K};$$

$$t_2 = 600 - 273 = 327 \text{ °C}.$$

Transformarea AB având loc sub volum constant, căldura produsă este

$$Q_{AB} = m c (t_2 - t_1) = 0{,}1183 \cdot 719 \cdot 300 = 25\,517 \text{ J}.$$

Pentru punctele B și C putem scrie

$$P_2 V_2 = n R T_2 \quad \text{si} \quad p_2 V_2 = n R T_3.$$

Din aceste relații rezultă

$$T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = 1{,}5 T_2 = 1{,}5 \cdot 600 = 900°\text{K};$$

$$t_3 = 900 - 273 = 627 \text{ °C}.$$

Transformarea BC având loc sub presiune constantă, căldura absorbită de gaz este

$$Q_{BC} = m c (t_3 - t_2) = 0{,}1183 \cdot 1004{,}6 \cdot 300 = 35\,652 \text{ J}.$$

Temperatura gazului în punctul D se obține din relațiile

$$p_3 V_3 = R T_3 \quad \text{și} \quad p_4 V_4 = R T_4.$$

Ținînd seamă că $V_4 = V_3$ obținem

$$T_4 = \frac{p_4}{p_3} T_3 = \frac{1}{2} \cdot 900 = 450°\text{K};$$

$$t_4 = 450 - 273 = 177 \text{ °C}.$$

Transformarea CD având loc sub volum constant cantitatea de căldură cedată este

$$Q_{CD} = m c' (t_4 - t_3) = -0{,}1183 \cdot 719 \cdot 450 = -38\,276 \text{ J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În transformarea DA, care are loc sub presiune constantă, căldura cedată de gaz este

$$Q_{DA} = m\,c\,(t_1 - t_4) = -\,0{,}1183 \cdot 1004{,}6 \cdot 150 = -\,17\,827\ \text{J}.$$

Căldura totală în transformarea $ABCDA$ este

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = 25\,517 + 35\,652 - 38\,276 - 17\,827 =$$

$$= 5066\ \text{J},$$

rezultat care se verifică cu cel găsit la prima întrebare.

3.127. O mașină cu abur cu dublu efect a dat următoarele rezultate:
– Ariile celor două diagrame trasate de indicatorul Watt pentru părțile dinainte și dinapoi ale cilindrului sînt $A_1 = A_2 = 4096\ \text{mm}^2$.
– Numărul de rotații al arborelui motor, $n = 90$ rot/min.
– Consumul de cărbune este de 10^4 kg în 24 h.
Știind că un centimetru de pe abscisă reprezintă 20 l, un centimetru de pe ordonată reprezintă $1{,}226 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$ și că puterea calorică a cărbunelui este de $3{,}35 \cdot 10^7$ J/kg, să se calculeze puterea mașinii și randamentul ei presupunînd că toată energia produsă de piston este transmisă arborelui motor.

Rezolvare. Din datele problemei rezultă că 1 cm^2 (100 mm^2) de pe diagramă reprezintă $0{,}020 \cdot 1{,}226 \cdot 10^5 = 2\,452$ J, iar aria digramei este

$$A = \frac{2\,452 \cdot 4\,096}{100} = 100\,434\ \text{J}.$$

Puterea mașinii este dată de relația

$$P_u = \frac{2\,p\,V\,n}{t} = \frac{2\,A\,n}{t} = \frac{2 \cdot 100\,434 \cdot 90}{60} = 301\,302\ \text{W} = 301{,}302\ \text{kW}.$$

Combustibilul consumat produce în fiecare oră o cantitate de căldură

$$Q = \frac{10^4}{24} \cdot 3{,}35 \cdot 10^7 = 1{,}395 \cdot 10^{10}\ \text{J/h}.$$

Rezultă că puterea consumată de mașină este

$$P_c = \frac{1{,}395 \cdot 10^{10}}{3\,600} = 3{,}87 \cdot 10^6\ \text{W},$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{301{,}302 \cdot 10^3}{38{,}7 \cdot 10^5} = \frac{301{,}302}{3\,870} = 0{,}078 = 7{,}8\,\%.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.128. În focarul unui cazan ard în fiecare oră 800 kg de cărbune cu puterea calorică de $2{,}512 \cdot 10^7$ J/kg. O fracțiune de 10% din căldura produsă de combustibil servește la încălzirea apei din cazan și la transformarea ei în abur la presiunea $p = 117{,}6 \cdot 10^4$ N/m² și temperatura $t = 187$ °C. Aburul produs merge la cei doi cilindri ai unei mașini cu abur cu dublu efect și cu emisiunea în atmosferă la presiunea $p_0 = 9{,}8 \cdot 10^4$ N/m². Diametrul pistonului $D = 0{,}40$ m, iar lungimea cursei $s = 0{,}50$ m. Știind că la presiunea de $117{,}6 \cdot 10^4$ N/m², căldura de vaporizare a apei $l = 1{,}989 \cdot 10^6$ J/kg, temperatura inițială a apei din cazan, $t_0 = 12$ °C și neglijînd pierderile de presiune și temperatură de la cazan la mașina de abur, se cere:

a) Consumul orar de apă. b) Puterea mașinii în kW. c) Numărul de rotații pe minut al mașinii.

Rezolvare. a) Căldura produsă de combustibil pe oră

$$Q = 800 \cdot 2{,}512 \cdot 10^7 = 2{,}0096 \cdot 10^{10} \text{ J/h.}$$

Din aceasta se transformă în abur

$$Q_1 = 0{,}10\, Q = 2{,}0096 \cdot 10^9 \text{ J/h.}$$

Dacă x este cantitatea de apă transformată în vapori, avem

$$x\,[c\,(t - t_0) + l] = Q_1,$$

$$x = \frac{Q_1}{c\,(t - t_0) + l} = \frac{2{,}0096 \cdot 10^9}{4\,187 \cdot 175 + 1{,}989 \cdot 10^6} = 738 \text{ kg/h.}$$

b) Puterea mașinii este

$$P = \frac{L}{t} = \frac{Q_1}{t} = \frac{2{,}0096 \cdot 10^9}{3\,600} = 557\,333 \text{ W} = 557{,}33 \text{ kW,}$$

c) Numărul de rotații pe minut se deduce din expresia puterii mașinii

$$P = \frac{2 \cdot 2\,(p - p_0)\, S\, l\, n}{60} = 557\,333 \text{ W;}$$

$$n = \frac{60\,P}{4\,(p - p_0)\, S\, l} = \frac{15 \cdot 557\,333}{4\,(p - p_0)\, \pi R^2 l} =$$

$$= \frac{836 \cdot 10^4}{10^4\,(117{,}6 - 9{,}8) \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}5} = \frac{836}{6{,}77} = 123 \text{ rot/min.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

Electricitatea

A. Electrostatica

21. Acțiunea reciprocă a sarcinilor electrice, cîmpul și potențialul electrostatic, capacitatea electrică, condensatori

a. Considerații teoretice

1. Sarcinile electrice se măsoară, în SI, în coulombi (C).

Întrucît $Q = It$, cantitatea de electricitate, se măsoară și în amperi-secunde sau în amperi-ore (Ah)

$$1\,\text{Ah} = 3\,600\,\text{C}.$$

Se mai folosesc și submultiplii coulombului: milicoulombul (mC), microcoulombul (μC), nanocoulombul (nC) etc.,

$$1\,\text{mC} = 10^{-3}\,\text{C}; \quad 1\,\mu\text{C} = 10^{-6}\,\text{C}; \quad 1\,\text{nC} = 10^{-9}\,\text{C}.$$

2. Permitivitatea relativă ε_r a unui mediu dielectric este un număr fără dimensiuni și se găsește în tabele, iar pentru aer este 1. Permitivitatea vidului are valoarea

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8{,}84 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}}.$$

3. Forța de interacțiune F între două sarcini electrice punctiforme Q_1 și Q_2, aflate la distanța r [m] una de alta, se măsoară în newtoni și are expresia

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon_r \cdot r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon_r \cdot r^2}.$$

4. Intensitatea cîmpului electrostatic creat în jurul unei sarcini punctiforme Q, la distanța r de sarcină, se măsoară în volți pe metru, (V/m) și are expresia

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_r \cdot r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q}{\varepsilon_r \cdot r^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forța care acționează asupra unei sarcini q aflată într-un cîmp electrostatic E este dată de relația

$$F = q\,E.$$

5. Potențialul electric într-un punct al cîmpului creat de sarcina Q la distanța r, se măsoară în volți, (V) și are expresia

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_r \cdot r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q}{\varepsilon_r \cdot r}\ [V].$$

6. Diferența de potențial dintre două puncte A și B aflate la distanțele r_A și r_B față de Q, se măsoară în volți (V), și are expresia

$$V_A - V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

7. Lucrul mecanic efectuat de o sarcină electrică q care se deplasează într-un cîmp electrostatic creat de sarcina Q, de la punctul A la punctul B, se măsoară în (J) și are expresia

$$W_L = q\,(V_A - V_B) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q \cdot q}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

8. Capacitatea electrică se măsoară în farad (F) și în submultiplii acestuia: microfaradul (μF), nanofaradul (nF) și picofaradul (pF)

$$1\,\mu\text{F} = 10^{-6}\,\text{F};\quad 1\,\text{nF} = 10^{-9}\,\text{F};\quad 1\,\text{pF} = 10^{-12}\,\text{F}.$$

Capacitatea electrică este dată de relația

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot r = \frac{\varepsilon_r \cdot r}{9 \cdot 10^9}$$

a) Pentru un condensator plan, avem

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d} = \frac{1}{36 \cdot 10^9\,\pi} \cdot \frac{\varepsilon_r \cdot S}{d} = 8{,}84 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\varepsilon_r \cdot S}{d}$$

unde S este suprafața unei armături, iar d — distanța dintre armături.

b) Pentru un condensator plan cu plăci multiple legate în paralel avem

$$C = \frac{n\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d} = \frac{1}{36 \cdot 10^9\,\pi} \cdot \frac{\varepsilon_r\, nS}{d} = 8{,}84 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\varepsilon_r\, nS}{d}$$

unde n este numărul plăcilor.

Scanned with OKEN Scanner

c) Capacitatea unui condensator sferic izolat, de rază R, este

$$C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R = \frac{\varepsilon_r R}{9 \cdot 10^9}$$

d) Capacitatea a două sfere concentrice cu razele $R_1 > R_2$ este

$$C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

9. Distribuția cantității de electricitate între doi condensatori puși în contact unul cu altul și apoi îndepărtați este:

a) Înainte de conttac

$$Q_1 = C_1 V_1 \; ; \quad Q_2 = C_2 V_2.$$

b) La contact

$$Q_1 + Q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 = V(C_1 + C_2); \quad V = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}.$$

c) După îndepărtare

$$Q_1 = C_1 V \; ; \quad Q_2 = C_2 V.$$

10. Energia degajată la descărcarea unui condensator este

$$W = \frac{Q V}{2} = \frac{C V^2}{2}.$$

11. Gruparea condensatorilor în serie

$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2 = \ldots = C_n V_n;$$

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right).$$

Capacitatea echivalentă a condensatorilor serie este dată de relația

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.$$

12. Gruparea condensatorilor în paralel

$$Q_1 = C_1 V; \; Q_2 = C_2 V; \quad Q_n = C_n V,$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = V(C_1 + C_2 + \ldots + C_n).$$

Capacitatea echivalentă a condensatorilor în paralel este

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

b. Probleme

4.1. Două sarcini electrice, una de $+\frac{1}{3}\cdot 10^{-8}$C, și alta de $+\frac{4}{3}10^{-8}$ C, se găsesc în aer, la o depărtare de 5 cm una de alta. La ce distanță trebuie să se afle aceste sarcini în petrol lampant, a cărui constantă dielectrică este egală cu 2, pentru ca forța electrică dintre ele să rămînă aceeași ?

Rezolvare. În aer forța de respingere dintre cele două sarcini este

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{\frac{4}{9}\cdot 10^{-16}}{25\cdot 10^{-4}} = \frac{4}{25}10^{-3} = 1{,}6\cdot 10^{-4}\ \text{N}.$$

În petrolul lampant forța de respingere va fi

$$F' = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r x^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{\frac{4}{9}\cdot 10^{-16}}{2x^2} = \frac{2\cdot 10^{-7}}{x^2}\ \text{N},$$

unde x este distanța dintre cele două sarcini electrice introduse în petrol lampant.

Din egalarea lui F cu F' rezultă $x = 3{,}54$ cm.

4.2. O bobiță de soc A (fig. 149) are o sarcină electrică de $+\frac{4}{3}\cdot 10^{-8}$ C. Ea atrage cu o forță de 10^{-4} N o altă bobiță B mobilă, aflată la depărtarea de 6 cm. Ca să împiedicăm această atracție ne apropiem de B cu un baston electrizat C avînd sarcina de $+\frac{16}{3}\cdot 10^{-8}$ C. La ce distanță de B trebuie să ținem bastonul pentru ca bobița B să rămînă pe loc.

Rezolvare. Forța de atracție dintre bobițele A și B este egală cu

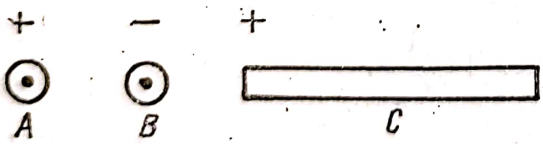


Fig. 149

$$F = 9\cdot 10^9\,\frac{\frac{4}{3}10^{-8}\cdot Q_B}{36\cdot 10^{-2}} = 10^{-4}\ \text{N}$$

de unde rezultă că sarcina bobiței B este egală cu $Q_B = 3\cdot 10^{-9}$ C.

Forța de atracție dintre bobița B și capătul bastonului este

$$F' = \frac{\frac{16}{3}\cdot 10^{-8}Q_B}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r x^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{\frac{16}{3}\cdot 10^{-8}\cdot 3\cdot 10^{-9}}{x^2}\cdot$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca B să rămînă în echilibru, trebuie ca $F = F'$.
Făcînd această egalare, obţinem $x = 12$ cm.

4.3. Trei sfere mici încărcate cu sarcinile electrice $Q_1 = 10^{-8}$ C, $Q_2 = 3 \cdot 10^{-8}$ C şi $Q_3 = 5 \cdot 10^{-8}$ C se află aşezate echidistant pe un cerc cu raza $R = \sqrt{3}/5$ m, în aer. Se cer:

a) Forţele exercitate între cele trei sarcini. b) Potenţialul electric în centrul cercului.

Rezolvare. a) Distanţa dintre sarcini, $r = R\sqrt{3} = 6 \cdot 10^{-1}$ m;

$$F_{12} = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon_r r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 36 \cdot 10^{-2}} = 7{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ N};$$

$$F_{13} = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_1 Q_3}{\varepsilon_r r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 36 \cdot 10^{-2}} = 12{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ N};$$

$$F_{23} = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_2 Q_3}{\varepsilon_r r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 36 \cdot 10^{-2}} = 37{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ N}.$$

b) Potenţialul total în centrul cercului este suma algebrică a potenţialelor fiecărei sfere

$$V_0 = \frac{9 \cdot 10^9}{\varepsilon_r \cdot R}(Q_1 + Q_2 + Q_3) = \frac{45 \cdot 10^9}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-6}(7{,}5 + 12{,}5 + 37{,}5) =$$

$$= \frac{45 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot 57{,}5}{1{,}73} \approx 1{,}496 \cdot 10^6 \, V.$$

4.4. Două sarcini electrice egale $q_1 = q_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ C se găsesc într-un mediu cu constanta dielectrică $\varepsilon_r = 2{,}5$. Una din sarcini este fixă, iar cealaltă, suspendată de un resort elastic. Datorită forţei coulombiene $F = 0{,}25$ N, resortul capătă o deformaţie $x = 2{,}5$ mm în momentul stabilirii echilibrului. Se cere:

a) Distanţa d a celor două sarcini în momentul echilibrului. b) Constanta de elasticitate a resortului.

(Adm. Inst. Politehnic, Cluj, 1964)

Rezolvare. a) Ambele sarcini fiind pozitive, se resping. Pentru poziţia de echilibru, forţa de respingere este egală şi de sens contrar cu forţa opusă de resort

$$9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_r d^2} = F = k x.$$

Din prima egalitate obținem

$$d = \sqrt{9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_r F}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-12}}{2{,}5 \cdot 0{,}25}} = 0{,}25 \text{ m}.$$

b) Din egalitatea a doua rezultă

$$k = \frac{F}{x} = \frac{0{,}25}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = \frac{250}{2{,}5} = 100 \text{ N/m}.$$

4.5. Două sfere metalice identice avînd fiecare razele $r = 0{,}5$ cm și masele $m = 10$ g, sînt legate la același punct de suspensie prin cîte un fir cu lungimea $l = 20$ cm. Una din sfere se atinge de polul pozitiv al unei mașini electrostatice, după care sferele se îndepărtează de verticală cu unghiurile $\alpha = 45°$ (fig. 150). Se cere:

a) Cantitatea de electricitate care a trecut pe fiecare sferă. b) Intensitatea cîmpului electric în punctul de suspensie. c) Capacitatea fiecărei sfere și potențialul polului. Se va lucra în SI.

(G. M. F., nr. 6/1961)

Rezolvare. a) În poziția de echilibru, rezultanta forței de respingere și a greutății sferei, este în prelungirea firului, adică

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q^2}{\varepsilon_r d^2} = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Ținînd seamă că $\varepsilon_r = 1$ și $d = 2l \sin \alpha = 2 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}2\sqrt{2}$; $d^2 = 0{,}04 \cdot 2 = 0{,}08$ obținem

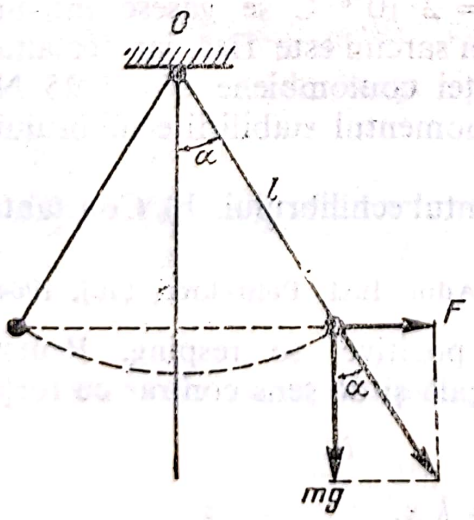


Fig. 150

$$Q = \sqrt{\frac{d^2 mg \operatorname{tg} \alpha}{9 \cdot 10^9}} = \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}01 \cdot 9{,}8}{9 \cdot 10^9}} = 9{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

b) Fiecare dintre aceste sarcini produce în punctul O cîte un cîmp electric după direcția firelor, avînd intensitatea

$$E = E_1 = E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q}{\varepsilon_r l^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 20{,}9 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cîmpul rezultant va avea valoarea

$$E_r = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 2\alpha} = E\sqrt{2} = 29{,}5 \cdot 10^4 \ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

c) Capacitatea unei sfere este

$$C = \frac{\varepsilon_r \cdot r}{9 \cdot 10^9} = \frac{1 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9} = 55 \cdot 10^{-14} \text{ F}.$$

Potențialul polului este

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{9{,}3 \cdot 10^{-7}}{55 \cdot 10^{-14}} = 1{,}69 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

4.6. Pe o sferă de dimensiuni neglijabile se acumulează o sarcină electrică transportată de un curent $I = 0{,}2$ mA în timp de 5 minute. O sferă identică încărcată în aceleași condiții, așezată în aer, lîngă prima sferă, este interacționată de o forță electrică de 10^7 N. Se cere:

a) Distanța dintre sfere. b) Forța exercitată de cele două sfere asupra unei sarcini electrice $Q' = 1/3 \cdot 10^9$ C situate în punctul A (fig. 151) la distanța de 1,27 m de fiecare dintre sferele B și C.

(Adm. Inst. Politehnic, Brașov, 1963)

Rezolvare

a) $Q = It = 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 0{,}06 = 6 \cdot 10^{-2}$ C.

Distanța dintre sfere se scoate din formula forței coulombiene

$$d = \sqrt{9 \cdot 10^9 \frac{Q^2}{\varepsilon_r F}} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 10^9 \frac{36 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^7}} = 1{,}80 \text{ m}.$$

b) Triunghiul ABC fiind isoscel

$$F_1 = F_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{QQ'}{\varepsilon_r l^2} =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9}{1 \cdot 1{,}27^2} \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^9} =$$

$$= \frac{18 \cdot 10^{-2}}{1{,}61} = 0{,}11 \text{ N}.$$

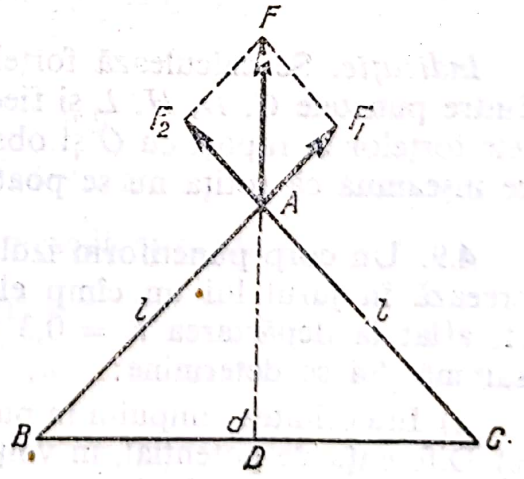


Fig. 151

Observăm că triunghiul ABC este și dreptunghic, cu vîrful drept în A deoarece

$$BD = AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{1{,}27^2 - 0{,}9^2} = 0{,}9 \text{ m}.$$

Rezultă că forța F (rezultanta lui F_1 și F_2) este

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = F_1\sqrt{2} = 0{,}11 \cdot 1{,}41 = 0{,}155 \text{ N}.$$

4.7. Două corpuri punctiforme A și B cu sarcinile electrice pozitive $q_1 = 32 \cdot 10^{-6}$ C și $q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ C, se găsesc în aer la distanța $d_1 = 4$ cm unul de altul. Lăsînd liber corpul B, acesta se deplasează la o distanță $d_2 = 40$ cm față de A, unde are viteza $v = 2 \cdot 10^6$ m/s. Să se calculeze masa corpului B.

(R. F. Ch., nr. 6/1967)

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat de corpul B se transformă în energie cinetică, adică

$$9 \cdot 10^9 \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = \frac{1}{2} mv^2;$$

$$m = \frac{18 \cdot 10^9 \cdot q_1 q_2 (d_2 - d_1)}{v^2 d_1 d_2 \varepsilon_r} = 12{,}96 \cdot 10^{-12} \text{kg}.$$

4.8. În punctele A și B, cu distanța dintre ele $AB = 2a$, se află două sarcini electrice punctiforme $+Q$ și $-Q$. La distanța $d = a$ de mijlocul AB se află axul O al unei rotițe cu patru brațe perpendiculare, $OC = OD = OH = OL = a$. În vîrfurile C, D, H, L ale brațelor se află cîte o sarcină pozitivă punctiformă q. Vîrful C se află la mijlocul distanței AB. Se cere să se afle dacă rotița se poate învîrti sub acțiunea forțelor electrostatice care se creează.

(R. F. Ch., nr. 2/1967)

Indicație. Se calculează forțele electrostatice de atracție și de respingere dintre punctele C, D, H, L și fiecare dintre punctele A și B. Luăm momentele forțelor în raport cu O și observăm că suma momentelor este zero, ceea ce înseamnă că rotița nu se poate învîrti.

4.9. Un corp punctiform izolat, fiind încărcat cu sarcina $Q = 3 \cdot 10^{-3}$ C, creează în jurul lui un cîmp electric. În acest cîmp se dau două puncte: A, aflat la depărtarea $r_1 = 0{,}3$ m și B, aflat la depărtarea $r_2 = 90$ cm de sarcină. Să se determine:

a) Intensitatea cîmpului în punctul A. b) Potențialul electric în punctul A. c) Diferența de potențial, în volți, dintre punctele A și B. d) Lucrul mecanic care se execută la deplasarea unei sarcini $q = 10^{-7}$ C de la punctul A la punctul B.

(Olimpiada de fizică, Timișoara, 1955)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

a) $E = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q}{\varepsilon_r r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 9 \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

b) $V_A = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q}{\varepsilon_r r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 3 \cdot 10^{-1}} = 9 \cdot 10^7$ V.

c) $V_A - V_B = 9 \cdot 10^9 \frac{Q}{\varepsilon_r} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{20}{9} = 6 \cdot 10^7$ V.

d) $W_L = q (V_A - V_B) = 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^7 = 6$ J.

4.10. Un conductor sferic cu raza $R_1 = 0{,}9$ cm are un potențial $V_1 = 3 \cdot 10^3$ V; un alt conductor sferic are raza $R_2 = 1{,}8$ cm și un potențial $V_2 = 4{,}5 \cdot 10^3$ V. Se unesc acești doi conductori printr-un fir lung și fin, apoi se separă și se așază centrele lor la distanța de 10 cm. Se cere:

a) Care este potențialul comun. b) Care este forța de respingere dintre cei doi conductori ?

Rezolvare. a) Capacitățile celor doi condensatori sînt

$$C_1 = \frac{\varepsilon_r R_1}{9 \cdot 10^9} = \frac{1 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9} = 10^{-12} \text{ F},$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_r R_2}{9 \cdot 10^9} = \frac{1 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ F}.$$

Dacă V este potențialul comun, avem

$$V (C_1 + C_2) = Q_1 + Q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 .$$

Din această relație rezultă

$$V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} = \frac{10^{-9} (3 + 9)}{10^{-12} (1 + 2)} = 4 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

b) După separare, fiecare conductor posedă sarcinile

$$Q_1 = C_1 V = 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

$$Q_2 = C_2 V = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

Forța de respingere este

$$F = \frac{9 \cdot 10^9}{\varepsilon_r} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9}{1} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9} \cdot 8 \cdot 10^{-9}}{10^{-2}} = 288 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.11. Două sfere cu razele de 1 cm și 3 cm sînt încărcate cu electricitate pozitivă. Centrele lor fiind așezate la 12 cm unul de altul, se constată o repulsie de $4 \cdot 10^{-5}$ N. După ce sferele au fost puse în contact una cu alta și apoi separate la aceeași distanță de 12 cm, se constată o repulsie de $6 \cdot 10^{-5}$ N. Care au fost cantitățile de electricitate inițiale ?

Rezolvare. Dacă Q_1 și Q_2 sînt sarcinile sferelor înainte de a fi puse în contact, avem

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_1 Q_2}{1 \cdot 1{,}2^2 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-5}. \tag{1}$$

După ce au fost puse în contact, sarcinile celor două sfere vor fi egale cu Q'_1 și Q'_2, iar potențialul comun va fi egal cu V.

Vom putea scrie deci relațiile

$$9 \cdot 10^9 \frac{Q'_1 Q'_2}{1 \cdot 1{,}2^2 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^{-5} \tag{2}$$

$$Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) V. \tag{3}$$

Din relația (3) deducem

$$V = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \cdot 10^{-2}} \cdot 9 \cdot 10^9. \tag{4}$$

După punerea în contact, noile sarcini vor fi

$$Q'_1 = C_1 V = 1 \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{4} \text{ și } Q'_2 = C_2 V = 3 \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{4}.$$

Înlocuind în relația (2) obținem

$$Q_1 + Q_2 = 2{,}27 \cdot 10^{-8} \text{ C}. \tag{5}$$

Din (1) și (5) obținem

$$Q_1 = 8(\sqrt{2} - 1) \cdot 10^{-9} \text{ C și } Q_2 = 8(\sqrt{2} + 1) \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

4.12. Două suprafețe sferice metalice sînt concentrice. Sfera din afară este legată cu pămîntul și are raza de 50 cm. Sfera din interior, izolată, are raza de 40 cm. Diferența de potențial dintre cele două suprafețe este de $1{,}8 \cdot 10^5$ V. Se înlocuiește sfera exterioară cu alta cu raza de 45 cm și se cere să se calculeze noua diferență de potențial dintre cele două suprafețe.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Potențialul în centrul sferelor este

$$V = \frac{9 \cdot 10^9}{\varepsilon_r} \cdot Q\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = \frac{9 \cdot 10^9}{\varepsilon_r} \cdot Q \cdot \frac{R' - R}{R'R} = \frac{Q}{C},$$

de unde rezultă sarcina electrică a celor doi condensatori

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_r RR'}{9 \cdot 10^9 (R' - R)} \cdot V = \frac{1 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-1}} \cdot 1{,}8 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ C}.$$

În experiența a doua, sarcina rămîne aceeași dar capacitatea condensatorului variază devenind

$$C' = \frac{\varepsilon_r RR''}{9 \cdot 10^9 (R'' - R)} = \frac{1 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-10} \text{ F};$$

$$Q = C'V' = 4 \cdot 10^{-10} V'$$

de unde rezultă

$$V' = \frac{Q}{4 \cdot 10^{-10}} = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-10}} = 10^5 = 100\,000 \text{ V}.$$

4.13. Doi condensatori AB și $A'B'$ de capacități C_1 și C_2 sînt legați în serie (fig. 152). Se aduce armătura A la potențialul V, iar armătura B' se aduce la potențialul zero (se pune în legătură cu pămîntul). Se cere să se calculeze:

a) Tensiunile V_1 și V_2 ale celor doi condensatori AB și $A'B'$. b) Cantitățile de electricitate cu care se încarcă cele patru armături ale condensatorilor A, B, A', B'. c) Capacitatea echivalentă C a celor doi condensatori AB și $A'B'$. d) Energia înmagazinată de cei doi condensatori.

Aplicație: $C_1 = 2\,\mu\text{F}$; $C_2 = 3\,\mu\text{F}$ și $V = 5\,000$ V.

Rezolvare. a) Condensatorii legați în serie se încarcă cu aceeași sarcină Q. Dacă V_1 și V_2 sînt tensiunile de la bornele celor doi condensatori vom avea

$$Q = C_1V_1 = C_2V_2.$$

Din această relație deducem

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{C_2}{C_1};$$

$$\frac{V_1 + V_2}{V_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1}.$$

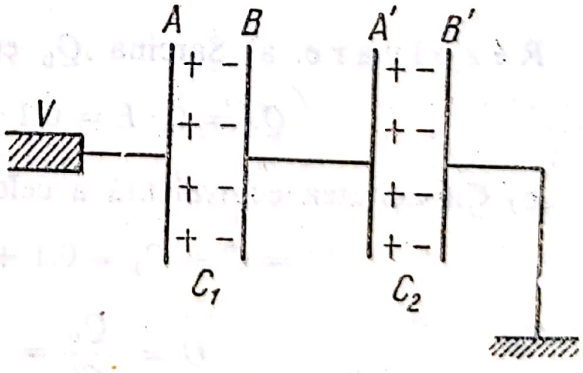


Fig. 152

Ținînd seamă că $V_1 + V_2 = V = 5000$ rezultă

$$V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V = \frac{2}{5} \cdot 5000 = 2000 \text{ V},$$

$$V_1 = V - V_2 = 5000 - 2000 = 3000 \text{ V}.$$

b) Cantitatea de electricitate a celor doi condensatori este

$$Q = C_1 V_1 = \frac{2}{10^6} \cdot 3\,000 = \frac{6}{10^3} \text{ C}.$$

Armăturile A și A' se încarcă cu $Q = +0{,}006$ C iar armăturile B și B' se încarcă cu $-0{,}006$ C.

c) Capacitatea echivalentă a condensatorului unic va fi

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = \frac{6}{5} = 1{,}2\,\mu\text{F}.$$

d) Energia înmagazinată de sistem este

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}2}{10^6} \cdot 5000^2 = 15 \text{ J}.$$

4.14. Armăturile A și B ale unui condensator C cu capacitatea de 0,1 μF sînt legate la o baterie de elemente galvanice, perfect izolate față de pămînt, avînd o tensiune electromotoare de 20 V. Se înlătură bateria și se leagă armăturile A și B la armăturile A_1 și B_1 ale unui alt condensator C_1 cu o capacitate de nouă ori mai mare decît a primului. Condensatorul C_1 este și el izolat față de pămînt. Se cere:

a) Sarcina inițială Q_0 a condensatorului C. b) Diferența de potențial U care există între armăturile condensatorului după ce s-a stabilit legătura între C și C_1. c) Sarcina fiecăruia dintre cei doi condensatori.

(R. M. F., nr. 10/1952)

Rezolvare. a) Sarcina Q_0 este egală cu

$$Q_0 = C \cdot E = 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

b) Capacitatea echivalentă a celor doi condensatori este

$$C' = C + C_1 = 0{,}1 + 0{,}9 = 1\,\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F},$$

$$U = \frac{Q_0}{C'} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^{-6}} = 2\text{V}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Sarcinile celor doi condensatori sînt

$$Q = CU = 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 0{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ C},$$

$$Q_1 = C_1 U = 0{,}9 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 1{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

4.15. Un condensator plan are suprafața comună a armăturilor $S = 12{,}56 \cdot 10^{-4}$ m² și distanța dintre armături $d = 15 \cdot 10^{-5}$ m. Să se determine razele R_1 și R_2 ($R_1 > R_2$) ale unui condensator format din două armături sferice concentrice, care să aibă aceeași capacitate, aceeași distanță între armături și același dielectric ca și condensatorul plan.

(R. F. Ch., nr. 5/1967

Rezolvare. Din enunțul problemei rezultă

$$R_1 - R_2 = d; \quad \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

Din aceste relații se obține ecuația

$$4\pi R_1^2 - 4\pi R_1 - S = 0.$$

Rezolvînd ecuația rezultă $R_1 = 1{,}150$ cm și $R_2 = 1{,}135$ cm.

4.16. Doi condensatori sferici $C_1 - D_1$ și $C_2 - D_2$ au respectiv capacitățile de 0,3 și 0,8 μF. Armăturile exterioare D_1 și D_2 sînt puse în legătură cu pămîntul (fig. 153), iar armăturile interioare C_1 și C_2 au potențialele de 15 și respectiv 26 V. Se unește C_1 cu C_2 printr-un conductor de capacitate neglijabilă și se cere:

a) Suma W a energiilor celor doi condensatori înainte de unirea armăturilor. b) Energia W' a celor doi condensatori cînd se unesc armăturile C_1 și C_2. c) Să se arate că $W - W'$ reprezintă diferența dintre energia pierdută de $C_1 - D_1$ și cea cîștigată de $C_2 - D_2$ cînd trec de la potențialele V_1 și V_2 la potențialul comun V.

Rezolvare. a) Energiile celor doi condensatori sînt

$$W_1 = \frac{C_1 V_1^2}{2} = \frac{0{,}3 \cdot 15^2}{2 \cdot 10^6} = \frac{33{,}75}{10^6} \text{ J},$$

$$W_2 = \frac{C_2 V_2^2}{2} = \frac{0{,}8 \cdot 26^2}{2 \cdot 10^6} = \frac{270{,}4}{10^6} \text{ J},$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{33{,}75 + 270{,}4}{10^6} = \frac{304{,}15}{10^6} \text{ J}.$$

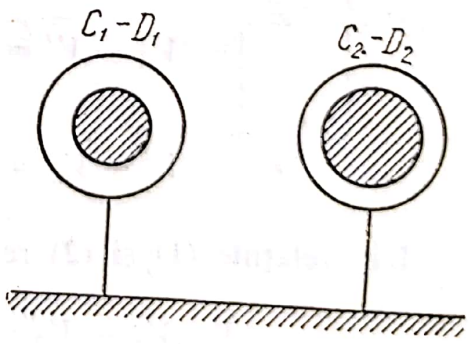


Fig. 153

b) Potențialul comun celor doi condensatori, după unirea armăturilor, este

$$V = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} = \frac{(0{,}3 \cdot 15 + 0{,}8 \cdot 26)}{(0{,}3 + 0{,}8)} = 23\ V.$$

Condensatorii fiind uniți în paralel, capacitatea totală a lor este

$$C = C_1 + C_2 = 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1\ \mu F,$$

iar energia lor este

$$W' = \frac{CV^2}{2} = \frac{1{,}1 \cdot 23^2}{2 \cdot 10^6} = \frac{290{,}95}{10^6}\ J.$$

Diferența dintre W și W' este

$$D = W - W' = \frac{304{,}15 - 290{,}95}{10^6} = \frac{13{,}20}{10^6}\ J.$$

c) Această diferență se poate pune sub forma

$$D = \frac{Q_1 V_1}{2} + \frac{Q_2 V_2}{2} - \frac{(Q_1 + Q_2) V}{2} = \frac{Q_1 (V_1 - V)}{2} - \frac{Q_2 (V - V_2)}{2}$$

4.17. Spațiul dintre armăturile unui condensator plan este umplut cu două straturi de dielectric. Grosimea primului strat este $d_1 = 0{,}5$ cm, iar permitivitatea lui relativă $\varepsilon_1 = 6$. Al doilea strat are permitivitatea relativă $\varepsilon_2 = 5$. Cunoscînd capacitatea condensatorului, $C = 100$ pF, suprafața unei armături, $S = 180$ cm² și sarcina unei armături $Q = 10^{-7}/\pi^2$ C, se cere:

a) Grosimea stratului al doilea. b) Diferența de potențial dintre armături. c) Diferența de potențial dintre fiecare armătură și stratul separator. d) Capacitatea fiecărui strat.

Rezolvare. a) Dacă V_1 și V_2 sînt potențialele celor două armături, iar V' este potențialul suprafeței separatoare, putem scrie

$$V_1 - V' = \frac{Q}{C_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4\pi Q d_1}{\varepsilon_1 S}, \qquad (1)$$

$$V' - V_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4\pi Q d_2}{\varepsilon_2 S}. \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$V_1 - V_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{4\pi Q}{S} \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right). \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă că $Q = C\,(V_1 - V_2)$ și scoțînd valoarea lui d_2, obținem

$$d_2 = \varepsilon_2 \left(\frac{S}{9 \cdot 10^9 \cdot 4\pi C} - \frac{d_1}{\varepsilon_1} \right) =$$

$$= 5 \left(\frac{180 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-10}} - \frac{5 \cdot 10^{-3}}{6} \right) = 3{,}72 \text{ mm}.$$

b) Din relația (3) rezultă

$$V_1 - V_2 = 100 \text{ V}.$$

c) Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$V_1 - V' = \frac{2 \cdot 10^5}{\pi} \cdot \frac{d_1}{\varepsilon_1} = \frac{166}{3{,}14} \approx 53 \text{ V},$$

$$V' - V_2 = \frac{2 \cdot 10^5}{\pi} \cdot \frac{d_2}{\varepsilon_2} = \frac{148}{3{,}14} \approx 47 \text{ V}.$$

d) $$C_1 = \frac{\varepsilon_1}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{S}{4\pi d_1} = \frac{6}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{180 \cdot 10^{-4}}{12{,}56 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}9 \cdot 10^{-10} \text{F},$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_2}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{S}{4\pi d_2} = \frac{5}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{180 \cdot 10^{-4}}{12{,}56 \cdot 3{,}72 \cdot 10^{-3}} = 2{,}1 \cdot 10^{-10} \text{F}.$$

4.18. Între armăturile unui condensator plan cu aer, se introduc succesiv: a) O lamă dielectrică L de grosime $d' = 0{,}46$ cm și $\varepsilon' = 2{,}3$. b) O placă metalică de grosime $d'' = 0{,}46$ cm. Să se calculeze capacitatea condensatorului în starea inițială și capacitatea sa în cele două cazuri (a) și (b). Armăturile A și B au aria $S = 2\,512$ cm², iar grosimea stratului de aer dintre ele este egală cu $d = 0{,}8$ cm (fig. 154).

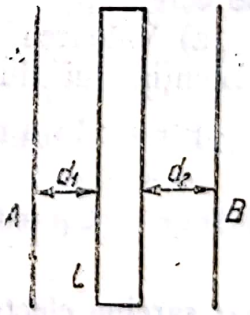


Fig. 154

Rezolvare. Capacitatea condensatorului plan este dată de relația

$$C = \frac{\varepsilon_r}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{S}{4\pi d} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{2\,512 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 8 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{2\,512}{288\pi \cdot 10^{10}} = 277 \cdot 10^{-12} \text{ F}.$$

a) Expresia lui C se poate pune sub forma

$$C = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{S}{\frac{d}{\varepsilon_r}} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d'}{\varepsilon'} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}},$$

În cazul acesta, d_1 și d_2 referindu-se la grosimi de straturi de aer, putem scrie

$$C = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{2\,512 \cdot 10^{-4}}{34 \cdot 10^{-4} + \frac{46 \cdot 10^{-4}}{2{,}3}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{2\,512}{54} = 411 \cdot 10^{-12}\ \text{F}.$$

b) Placa de metal ne mai fiind un corp dielectric, se formează doi condensatori în serie AL și BL avînd capacitatea

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Întrucît

$$C_1 = \frac{S}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 d_1} \quad \text{și} \quad C_2 = \frac{S}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 d_2}$$

rezultă că

$$C' = \frac{S}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 (d_1 + d_2)} = \frac{2\,512 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 34 \cdot 10^{-4}} = 653 \cdot 10^{-12}\ \text{F}.$$

Totul se petrece ca și cum am apropia armăturile condensatorului cu o distanță egală cu grosimea plăcii de metal.

4.19. Două picături de apă avînd fiecare raza $r = 0{,}05$ cm se unesc datorită unei cauze mecanice. Ambele picături au același potențial $V' = 1\,000$ V. Se cere:

a) Valoarea potențialului după unirea picăturilor în aer, b) Valoarea potențialului după unirea picăturilor în apă.

Rezolvare. a) Capacitatea fiecărei picături de apă este egală cu

$$C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r r = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 0{,}555 \cdot 10^{-13}\ \text{F},$$

iar sarcina electrică a fiecărei picături va fi

$$Q_1 = Q_2 = V_1 C_1 = V_1 C_2 = 1\,000 \cdot 0{,}555 \cdot 10^{-13} = 0{,}555 \cdot 10^{-10}\ \text{C},$$

După unirea picăturilor, cantitatea de electricitate conținută în ele va fi

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{2 \cdot 50}{9 \cdot 10^{11}} = \frac{1}{9 \cdot 10^9}\ \text{C} = 1{,}111 \cdot 10^{-10}\ \text{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Volumul picăturii mari de rază R fiind egal cu suma volumelor celor două picături mici, putem scrie

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2 \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

de unde rezultă $R = \sqrt[3]{2r^3} = r\sqrt[3]{2} = 0{,}063$ cm.

Capacitatea picăturii comune este

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r R = \frac{0{,}063}{9 \cdot 10^{11}}.$$

Dacă notăm cu V potențialul picăturii comune, avem

$$Q = CV = \varepsilon_0 \varepsilon_r RV$$

de unde rezultă

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r R} = \frac{9 \cdot 10^{11}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r R} Q = \frac{9 \cdot 10^{11}}{1 \cdot 0{,}063} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9} = \frac{100}{0{,}063} = 1\,587 \text{ V}.$$

b) În acest caz avem

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r R}{9 \cdot 10^{11}} = \frac{80 R}{9 \cdot 10^{11}} = \frac{8 R}{9 \cdot 10^{10}},$$

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{9 \cdot 10^{10}}{8 R} = \frac{10}{8 \cdot 6{,}3 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^5}{50{,}4} = 1\,984 \text{ V}.$$

4.20. Un condensator plan este construit din două discuri de metal cu diametrul $D = 10$ cm și dielectric de sticlă cu $\varepsilon_r = 6$ și cu grosimea $d = 0{,}3$ mm. Între cele două armături se creează un cîmp electric $E = 30\,000$ V/m. Se cere:

a) Numărul de electroni de pe fiecare placă a condensatorului. b) Forța de atracție dintre armături. c) Energia electrică debitată la descărcare.

(R. M. F., nr. 4/1961)

Rezolvare. a) Capacitatea condensatorului este

$$C = \frac{\varepsilon_r}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{S}{4\pi d} = \frac{6}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{\pi \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 4\pi \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1{,}39 \cdot 10^{-9} \text{ F}.$$

Cantitatea de electricitate de pe fiecare placă este

$$Q = CV = CEd = 1{,}39 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 12{,}51 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Sarcina electronului fiind egală cu $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C numărul de electroni va fi

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{12{,}51 \cdot 10^{-9}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 7{,}8 \cdot 10^{10} \text{ electroni.}$$

b) Forța de atracție dintre plăci este

$$F = \frac{CV^2}{2d} = \frac{C}{2d} \cdot (Ed)^2 = \frac{C \cdot E^2 \cdot d}{2} = \frac{1{,}39 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{2} =$$

$$= 18{,}765 \cdot 10^{-5} \text{ N.}$$

c) $$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}39 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^8 \cdot 9 \cdot 10^{-8} =$$

$$= 56{,}2 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

4.21. Un condensator variabil este alcătuit din 15 semidiscuri mobile și 16 semidiscuri fixe. Diametrul unui disc este de 8 cm, iar distanța dintre discuri este de 1 mm. Să se calculeze capacitatea condensatorului atunci cînd:

a) Semidiscurile mobile sînt introduse complet. b) Semidiscurile mobile sînt scoase afară cu un unghi de 60°.

Indicații: a) Numărul straturilor de dielectric este $n = 16 + 15 - 1 = 30$, aria discurilor față în față este 8π, iar capacitatea $C = 600$ cm. b) Discurile mobile rămîn introduse în cele fixe pe un sector circular cu un unghi la centru de 120° și cu aria $S = 16\ \pi/3$, iar $C = 400$ C.

B. Electrocinetica

22. Legile curentului continuu, puterea și energia electrică

1. Intensitatea curentului I, în amperi și cantitatea de electricitate Q, în coulombi, care trec printr-un circuit în timp de t secunde, sînt date de relațiile

$$I = \frac{Q}{t} \quad \text{și} \quad Q = It.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. *Legea lui Ohm.* Dacă la capetele unei porțiuni de circuit cu rezistența R ohmi (Ω) se aplică o tensiune U volți, curentul care trece prin circuit este dat de relația

$$I = \frac{U}{R}.$$

3. Căderea de tensiune dintre capetele unui conductor de rezistență R parcurs de curentul cu intensitatea I, este

$$U = RI.$$

4. Rezistența unui conductor cu lungimea l metri, secțiunea s metri pătrați și rezistivitatea ρ ohm-metri ($\Omega \cdot m$) este dată de relația

$$R = \rho \frac{l}{s}.$$

5. Rezistivitatea unui conductor variază cu temperatura după legea

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta t)$$

unde ρ_0 este rezistivitatea la 0 °C, α – coeficientul de temperatură și Δt – diferența de temperatură.

6. Legea lui Ohm pentru un circuit întreg este

$$I = \frac{E}{R + r}$$

unde I este intensitatea curentului, E – tensiunea electromotoare a sursei, R – rezistența exterioară a circuitului și r – rezistența interioară a sursei.

7. *Legile lui Kirchhoff:* I) Suma curenților care intră într-un nod este egală cu suma curenților care pleacă din acel nod

$$\sum I_i = \sum I_p.$$

II) De-a lungul unui circuit închis, suma algebrică a tensiunilor electromotoare este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune

$$\sum E = \sum RI.$$

8. *Legarea rezistențelor.* a) Rezistența echivalentă a rezistențelor legate în serie este dată de relația

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum R_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Rezistența echivalentă a rezistențelor legate în paralel (derivație) este dată de relația

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum \frac{1}{R_i}.$$

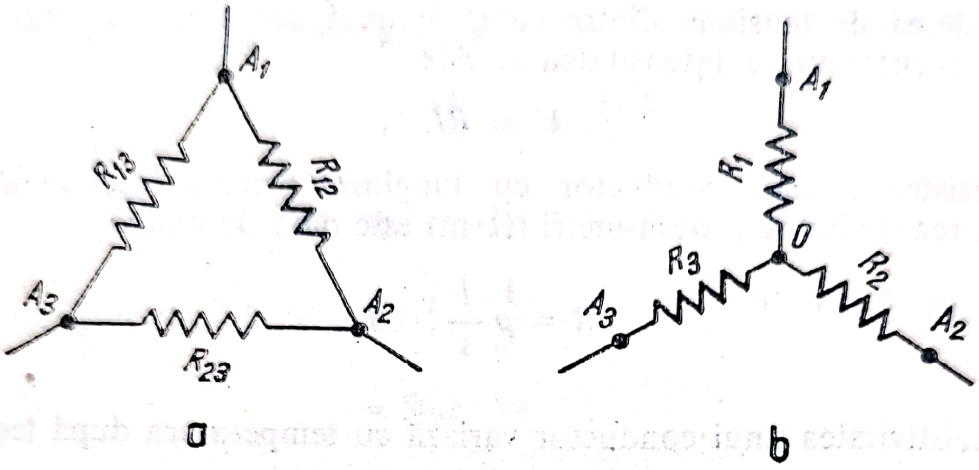


Fig. 155

Pentru două rezistențe în paralel avem

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

c) Transformarea rezistențelor legate în triunghi, în rezistențe legate în stea echivalentă și invers (fig. 155).

Dacă R_{12}, R_{23}, R_{13} sînt rezistențele triunghiului (fig. 155, *a*) iar R_1, R_2, R_3 sînt rezistențele echivalente ale stelei (fig. 155, *b*) avem

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}},$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}.$$

Pentru transformarea stelei în triunghi, avem

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1};$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$

9. Gruparea surselor de curent:

a) la gruparea surselor de tensiune electromotoare e_1, e_2, ..., e_n în serie, avem

$$E = e_1 + e_2 + \ldots + e_n = \sum e_i.$$

Dacă $e_1 = e_2 = \ldots = e_n$,

$$E = ne; \quad I = \frac{ne}{R + nr},$$

unde R este rezistența exterioară, iar r — rezistența interioară a unui element.

b) La gruparea t.e.m. în paralel avem

$$E = e; \quad I = \frac{E}{R + \frac{r}{n}} = \frac{e}{R + \frac{r}{n}}.$$

c) *Gruparea serie-paralel.* Dacă n elemente de t.e.m. egale sînt legate în serie formînd m derivații, tensiunea totală este

$$E = ne; \quad I = \frac{ne}{R + \frac{nr}{m}}.$$

10. Puterea unui circuit de rezistență R, prin care trece un curent I, sub tensiunea U, exprimată în watt (W), este

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2.$$

11. Energia electrică produsă de un circuit cu rezistența R aflat sub tensiunea U și prin care trece un curent I timp de t secunde, exprimată în joule (J), este dată de legea lui Joule

$$W = Pt = UIt = \frac{U^2}{R}t = RI^2t \quad [\text{J}].$$

În practică, puterea și energia electrică se exprimă în (kW) și în (kWh)

$$1\ \text{kW} = 10^3\ \text{W}; \quad 1\ \text{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{J}.$$

12. Randamentul unui circuit alimentat de t.e.m. E este

$$\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{UI}{EI} = \frac{U}{E} = \frac{E - rI}{E} = \frac{U}{U + rI}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde U este tensiunea la bornele sursei, r — rezistența interioară, iar I — curentul produs de sursă.

b. Probleme

4.22. Cînd se intercalează într-un circuit traversat de un curent electric o rezistență suplimentară de 1 Ω, indicația unui ampermetru, așezat în acest circuit, scade de la 2 A la 1 A. Dacă se înlocuiește această rezistență de 1 Ω cu o rezistență necunoscută x, ampermetrul arată 0,5 A. Să se calculeze rezistența x și t.e.m. E din circuit.

(Adm. Școala Politehnică Buc., 1944)

Rezolvare.

$$E = RI = (R + 1) I_1 = (R + x) I_2,$$

$$E = 2R = (R + 1) \cdot 1 = (R + x) 0{,}5.$$

Din aceste relații rezultă $R = 1\Omega$, $x = 3\Omega$, $E = 2$ V.

4.23. Un voltmetru are scala împărțită în 150 diviziuni. El are patru borne pentru măsurarea tensiunilor: de la 0 la 3 V, de la 0 la 15 V și de la 0 la 150 V. La trecerea prin instrument a unui curent de 1 mA, acul deviază cu 50 diviziuni. Care este rezistența instrumentului pentru fiecare sensibilitate ?

Rezolvare. Dacă la 50 diviziuni corespunde un curent de 1 mA = = 0,001 A, atunci la 150 diviziuni corespunde un curent maxim $I = 3 = 3 \cdot 0{,}001 = 0{,}003$ A.

Rezistențele maxime ale celor trei sensibilități sînt

$$R_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{3}{0{,}003} = \frac{3000}{3} = 1000\ \Omega,$$

$$R_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{15}{0{,}003} = \frac{15\,000}{3} = 5000\ \Omega,$$

$$R_3 = \frac{U_3}{I} = \frac{150}{0{,}003} = \frac{150\,000}{3} = 50\,000\ \Omega.$$

4.24. Se leagă cei doi poli ai unei pile electrice printr-un fir metalic de 60 m lungime; curentul care trece prin fir are intensitatea de 0,9 A. Dacă firul metalic ar avea numai 15 m lungime, intensitatea curentului ar fi de 2,1 A. Să se calculeze rezistența interioară r_i și tensiunea electromotoare E a pilei, știind că rezistivitatea firului metalic întrebuințat este de 31 ori mai

Scanned with OKEN Scanner

mare decît aceea a cuprului, iar un fir de cupru de aceeași secțiune și de 100 m lungime, are o rezistență de 2 Ω.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Rezistența firului metalic este $r = 31 \cdot 2/100 = 0{,}62$ Ω/m și putem scrie relațiile

$$E = (60\,r + r_i)\,0{,}9 = (15\,r + r_i)\,2{,}1.$$

Rezultă $r_i = 11{,}6$ Ω și $E = 43{,}9$ V.

4.25. O pilă electrică cu t.e.m. de 10 V și rezistența de 18 Ω este închisă pe o rezistență exterioară de 20 Ω. Armăturile unui condensator de 1 μF comunică cu polii pilei. Să se calculeze intensitatea curentului, sarcina Q a condensatorului și energia înmagazinată de condensator.

(R. M. F., nr. 11/1952)

Rezolvare. Intensitatea curentului este

$$I \quad \frac{E}{R+r} = \frac{10}{20+18} = \frac{5}{19}.$$

Tensiunea la bornele pilei

$$U = RI = 20 \cdot \frac{5}{19} \quad \frac{100}{19}\ \text{V}.$$

Sarcina condensatorului este

$$Q = CU = \frac{1}{10^6} \cdot \frac{100}{19} = \frac{1}{19 \cdot 10^4}\ \text{C}.$$

Energia înmagazinată de condensator

$$W = \frac{1}{2} \cdot QU = \frac{1}{72\,200}\ \text{J}.$$

4.26. O pilă electrică E cu tensiunea electromotoare $e = 1{,}80$ V și rezistența interioară $r = 0{,}10$ Ω este montată în opoziție (fig. 156) cu altă pilă E' de tensiune electromotoare $e' = 1{,}12$ V și rezistență interioară $r' = 1{,}4$ Ω. Rezistența circuitului exterior este $R = 7{,}4$ Ω. Se cere să se calculeze:

a) Intensitatea curentului în circuit. b) Intensitatea curentului cînd se scoate din circuit fie pila E, fie pila E'.

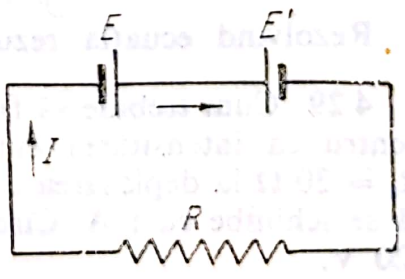


Fig. 156

Rezolvare. a) Aplicînd circuitului legea lui Kirchhoff, obținem

$$I = \frac{e - e'}{R + r + r'} = \frac{1{,}80 - 1{,}12}{7{,}4 + 0{,}10 + 1{,}40} = 0{,}0765 \text{ A}.$$

b) $$I_1 = \frac{e}{R + r} = \frac{1{,}80}{7{,}50} = 0{,}24 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{e'}{R + r'} = \frac{1{,}12}{8{,}80} = 0{,}127 \text{ A}.$$

4.27. Un acumulator cu o tensiune electromotoare de 2 V și o pilă cu o tensiune electromotoare de x volți sînt legate cu o rezistență și un ampermetru. Cînd se leagă polii astfel încît t.e.m. să fie de același sens, ampermetrul arată 350 mA, iar cînd se leagă polii ca t.e.m. să fie în opoziție, ampermetrul arată 50 mA. Să se calculeze x.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1949)

Rezolvare. Aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff în ambele cazuri, obținem

$$2 + x = RI = 0{,}350\, R, \tag{1}$$

$$2 - x = RI' = 0{,}050\, R \tag{2}$$

Din aceste ecuații se obține $x = 1{,}5$ V.

4.28. Polii unei baterii de pile electrice sînt legați succesiv prin două fire de rezistență 4 Ω și 9 Ω. Se constată că, în ambele cazuri, cantitatea de căldură degajată de cele două fire este aceeași. Să se calculeze rezistența interioară a bateriei.

Rezolvare. Din enunțul problemei se poate scrie

$$4I^2 = 9I_1^2\,; \quad \frac{I}{I_1} = \frac{3}{2} = \frac{9 + r}{4 + r}.$$

Rezolvînd ecuația rezultă $r = 6\ \Omega$.

4.29. Cum trebuie să fie rezistențele R_1, R_2, R_3 ale unui reostat (fig. 157) pentru ca intensitatea curentului care trece printr-un aparat cu rezistența $R_0 = 30\ \Omega$ la deplasarea comutatorului reostatului de pe un contact pe altul să se schimbe cu 1 A. Circuitul este alimentat de la o sursă cu tensiunea de 120 V.

(R. M. F., nr. 3/1956)

Scanned with OKEN Scanner

R e z o l v a r e. Cînd comutatorul face contactul A, intensitatea curentului este

$$I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{120}{30} = 4 \text{ A}.$$

Mutînd comutatorul pe contactul B, intensitatea curentului scade cu 1 A și va fi

$$I_1 = I_0 - 1 = 3 \text{ A}.$$

Pe de altă parte avem

$$I_1 = 3 = \frac{120}{30 + R_1}$$

de unde rezultă $R_1 = 10\ \Omega$.

Mutînd comutatorul pe contactul C, vom avea

$$I_2 = I_1 - 1 = 2 = \frac{120}{30 + R_1 + R_2} = \frac{120}{40 + R_2}$$

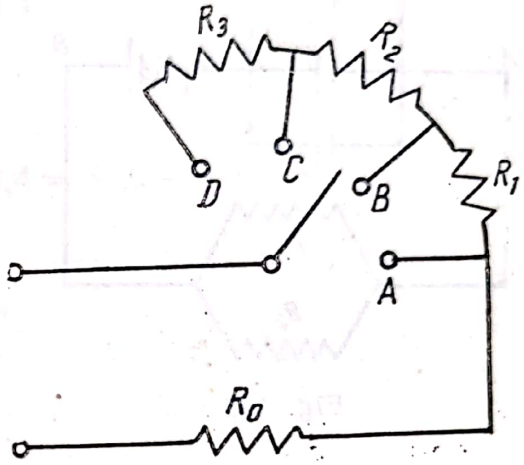


Fig. 157

de unde rezultă $R_2 = 20\ \Omega$.

După mutarea comutatorului în D avem

$$I_3 = I_2 - 1 = 1 = \frac{120}{30 + 10 + 20 + R_3} = \frac{120}{60 + R_3}$$

de unde rezultă $R_3 = 60\ \Omega$.

4.30. Cum putem încălzi mai mult o cantitate 720 g de apă cu temperatura de 16 °C, amestecînd-o cu 810 g apă la 84 °C sau trecînd un curent de 6 A printr-o rezistență de 10 Ω, cufundată în apă timp de 5 min ?

(R. M. F., nr. 9/1955)

R e z o l v a r e. Temperatura celor 720 g apă, după prima operație este

$$t = \frac{720 \cdot 16 + 810 \cdot 84}{720 + 810} = 52 \text{ °C}.$$

În cazul al doilea, avem

$$4187 \cdot 0{,}720\ (t - 16) = 10 \cdot 36 \cdot 300\ ;$$

$$t = \frac{10 \cdot 36 \cdot 300}{4187 \cdot 0{,}720} + 16 \approx 52\ ^\circ\text{C}.$$

Apa se încălzește la fel în ambele cazuri.

Scanned with OKEN Scanner

4.31. Un grup de trei elemente galvanice în derivație este legat în serie cu un alt grup de trei elemente identice în serie și debitează curent pe două rezistențe exterioare $R_1 = 2\ \Omega$ și $R_2 = 3\ \Omega$ în paralel (fig. 158). Dacă fiecare element are t.e.m. $e = 1{,}8$ V, iar curentul în R_1 este de 1,35 A, se cere:

a) Curentul produs în circuit. b) Rezistența interioară a unui element. c) Curentul în rezistența R_2. d) Tensiunea la bornele AB ale bateriei.

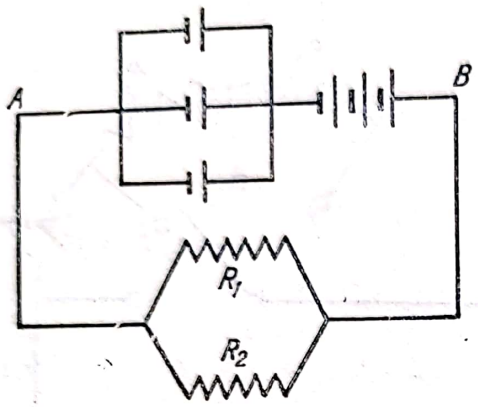


Fig. 158

Rezolvare.

a) $E = e + 3e = 4e = 4 \cdot 1{,}8 = 7{,}2$ V,

$$R_i = \frac{r}{3} + 3r = \frac{10}{3} r,$$

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = \frac{6}{5} = 1{,}2\ \Omega,$$

$$I = \frac{E}{R_i + R_e} = \frac{7{,}2}{\frac{10}{3} r + 1{,}2}, \qquad (1)$$

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{3}{5} I; \quad I = \frac{5 I_1}{3} = \frac{5 \cdot 1{,}35}{3} = 2{,}25 \text{ A}.$$

b) Înlocuind valoarea lui I în (1) rezultă $r = 0{,}6\ \Omega$.

c) $I_2 = I - I_1 = 2{,}25 - 1{,}35 = 0{,}90$ A.

Verificare:

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad I = \frac{2}{5} \cdot 2{,}25 = 0{,}90 \text{ A}$$

d) $U = E - R_i I = 7{,}2 - 2 \cdot 2{,}25 = 7{,}2 - 4{,}5 = 2{,}7$ V.

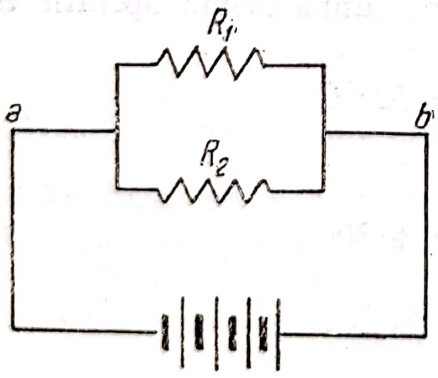


Fig. 159

4.32. Patru elemente galvanice care au fiecare o t.e.m. de 1 V, și o rezistență interioară de 0,5 Ω sînt legate în serie și debitează un curent într-o pereche de rezistențe R_1 și R_2 conectate în paralel (fig. 159). Știind că $R_1 = 40\ \Omega$ și $R_2 = 10\ \Omega$, se cere:

a) Curentul total în circuit. b) Tensiunea între punctele a și b. c) Curenții I_1 și I_2 în rezistențele R_1 și R_2 precum și energia degajată în rezistența R_2, timp de 3 ore.

(Adm. Inst. Căi Ferate, Buc., 1956)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Rezistența totală a circuitului este egală cu

$$R = 4r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4 \cdot 0{,}5 + \frac{40 \cdot 10}{40 + 10} = 10\ \Omega.$$

Intensitatea curentului în circuit este

$$I = \frac{4e}{R} = \frac{4 \cdot 1}{10} = 0{,}4\ \text{A}.$$

b) Tensiunea între punctele a și b este

$$U_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{40 \cdot 10}{40 + 10} \cdot 0{,}4 = 8 \cdot 0{,}4 = 3{,}2\ \text{V}.$$

c) $$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{10}{50} \cdot 0{,}4 = 0{,}08\ \text{A},$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{40}{50} \cdot 0{,}4 = 0{,}32\ \text{A}.$$

Energia degajată în rezistența R_2 este

$$W = R_2 I_2^2 t = 10 \cdot 0{,}1024 \cdot 10\,800 = 11\,059{,}2\ \text{J}.$$

4.33. Un tub de sticlă cilindric conține 1359,6 g de mercur la temperatura de 0 °C. Rezistența electrică a sa, la 0 °C, este egală cu 1 Ω. Să se afle lungimea și secțiunea acestui tub știind că: densitatea mercurului la 0 °C este 13 596 kg/m³, că 1 Ω corespunde unei coloane de mercur la 0 °C, lungă de 106,3 cm și conținînd 14,4521 g de mercur. Acest tub se poate așeza în derivație la capetele unei rezistențe de 9 Ω. Înainte de a lega tubul, prin rezistență trece timp de o secundă un curent care dezvoltă o energie de 1 J.

Să se găsească cu cît se schimbă intensitatea curentului care trece prin această rezistență, cînd se leagă tubul în derivație.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1946)

Rezolvare. Rezistența tubului și a coloanei fiind egale, rezultă că raportul dintre lungimea tubului și lungimea coloanei este egal cu raportul secțiunilor acestora, adică

$$\frac{l}{l'} = \frac{S}{S'}. \qquad (1)$$

Raportul dintre masa mercurului din tub și masa coloanei de mercur este

$$\frac{M}{M'} = \frac{1359{,}6}{14{,}4521} = \frac{\rho l S}{\rho l' S'} = \frac{l^2}{l'^2} \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$l = l' \sqrt{\frac{1359,6}{14,4521}} = 106,3 \cdot 9,7 = 1031,11 \text{ cm.}$$

Întrucît $S' = 1$ mm², din (1) rezultă $S = 9,7$ mm².
Valoarea curentului înainte de legarea tubului este

$$I = \sqrt{\frac{W}{Rt}} = \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 1}} = \frac{1}{3} \text{ A.}$$

Dacă R este rezistența tubului, R' rezistența conductorului cu care se leagă tubul în derivație, iar I este curentul total înainte de ramificație, curentul care trece prin tub este

$$I_1 = \frac{R'}{R + R'} I = \frac{9}{1+9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10} \text{ A.}$$

Intensitatea curentului care trece prin R' scade cu

$$I_2 = I - I_1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30} \text{ A.}$$

4.34. Un conductor omogen avînd forma unui cerc, are rezistența $R = 8\ \Omega$. Fie A și B două puncte ale conductorului, care îl împart în două arce AC_1B și AC_2B (fig. 160) ale căror lungimi stau în raportul 1/3. Un curent $I = 4$ A vine în A și pleacă prin B. Se cer:

a) Intensitățile i_1 și i_2 ale curenților în cele două arce. b) Căldura dezvoltată pe secundă de aceste două ramuri. c) Diferența de potențial U între punctele A și B.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1943)

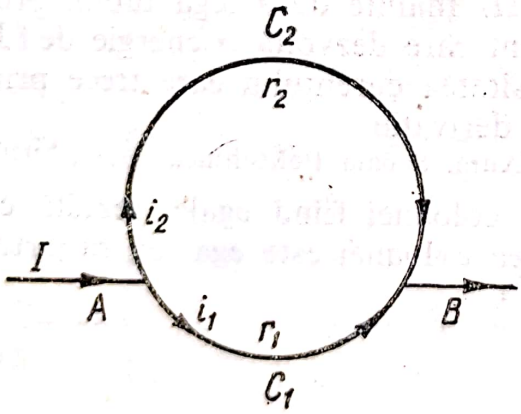


Fig. 160

Rezolvare

a) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{3}$; $\frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{1}{4}$;

$\frac{r_1}{8} = \frac{1}{4}$; $r_1 = 2\ \Omega$ și $r_2 = 6\Omega$;

$$i_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} I =$$

$$= \frac{6}{8} \cdot 4 = 3 \text{ A}; \quad i_2 = 4 - 3 = 1 \text{ A.}$$

b) $W_1 = r_1 i_1^2 t = 2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$ J; $W_2 = r_2 i_2^2 t = 6$ J.

c) $U_{AB} = r_1 i_1 = 2 \cdot 3 = 6$ V.

Scanned with OKEN Scanner

4.35. Șase fierbătoare electrice cu rezistențele $R_1 = 40\ \Omega$, $R_2 = 25\ \Omega$, $R_3 = 72\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$, $R_5 = 60\ \Omega$, $R_6 = 15\ \Omega$, avînd fiecare randamentul de 94%, sînt legate ca în fig. 161, formînd circuitul exterior al unui generator cu t.e.m. de 175 V și rezistența interioară de 0,32 Ω. Care este fierbătorul ce poate transforma cel mai repede în vapori 1 kg gheață la 0 °C și care este timpul necesar ?

(G. M. F., nr. 7/1956)

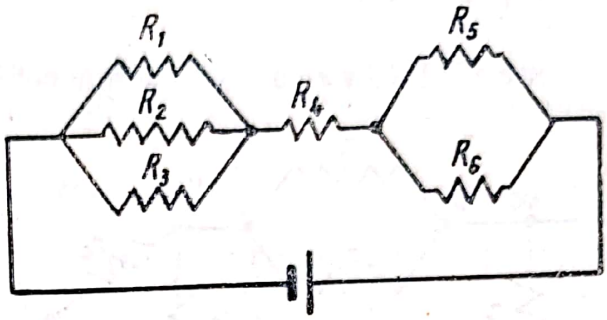


Fig. 161

R e z o l v a r e. Rezistența echivalentă a derivației din stînga este dată de relația

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} =$$

$$= \frac{1}{40} + \frac{1}{25} + \frac{1}{72} = \frac{142}{1800}$$

de unde rezultă $R_s = 12{,}68\ \Omega$.

Rezistența echivalentă a derivației din dreapta este

$$R_d = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = \frac{60 \cdot 15}{75} = 12\ \Omega.$$

Curentul din circuit este

$$I = \frac{E}{R_s + R_4 + R_d + r} = \frac{175}{12{,}68 + 10 + 12 + 0{,}32} = 5\ \text{A}.$$

Fierbătoarele din derivația din stînga au tensiunea la borne $U_1 = R_s I = 12{,}68 \cdot 5 = 63{,}40$ V, fierbătoarele derivației din dreapta au tensiunea $U_2 = R_d I = 12 \cdot 5 = 60$ V, iar fierbătorul de la mijloc are tensiunea $U_4 = R_4 I = 10 \cdot 5 = 50$ V.

Cantitatea de căldură produsă de fierbătoare fiind egală cu $W = U^2\, t/R$, rezultă că fierbătorul care va avea raportul U^2/R cel mai mare va transforma gheața mai repede în vapori. Calculînd aceste rapoarte, găsim că cel mai mare raport este al fierbătorului din mijloc.

Căldura furnizată de acest fierbător este

$$W = \frac{U_4^2}{R_4}\, t = \frac{2500}{10}\, t = 250\ t.$$

Egalînd aceasta cu căldura absorbită de gheață pentru topire și vaporizare, avem

$$250\, t = 334 \cdot 10^3 + 4187 \cdot 100 + 2{,}25 \cdot 10^6 = 3\,002\,700;$$

$$t = \frac{3\,002\,700}{250} = 12\,011\ s = 3\ h\ 20\ \text{min}\ 11\ \text{s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.36. Tensiunea la bornele circuitului din fig. 162 este de 10 V. Rezistențele din circuit au valorile: $r_1 = 0{,}4\ \Omega$, $r_2 = 0{,}8\ \Omega$, $r_3 = 0{,}7\ \Omega$, $r_4 = 0{,}1\ \Omega$, $r_5 = 0{,}5\ \Omega$, $r_6 = 0{,}7\ \Omega$ și $r_7 = 0{,}3\ \Omega$. Se cere:

a) Rezistența echivalentă a circuitului. b) Curentul total în circuit. c) Valoarea curenților care străbat rezistențele. d) Căderea de tensiune între punctele *ab* și *cd*.

(G.M.F., nr. 6/1956)

Rezolvare. a) Rezistența echivalentă a rezistențelor r_5, r_6 și r_7 este

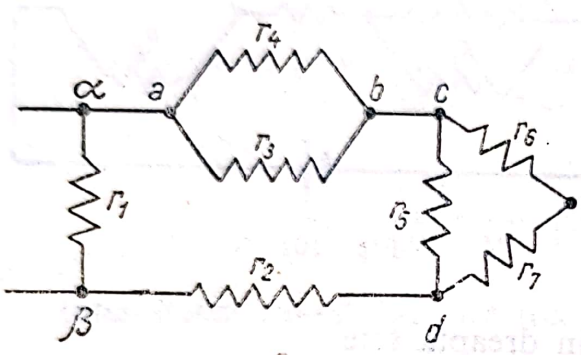


Fig. 162

$$R_1 = \frac{r_5(r_6 + r_7)}{r_5 + r_6 + r_7} = \frac{0{,}5 \cdot 1}{1{,}5} = 0{,}33\ \Omega.$$

Rezistența echivalentă a lui r_3 și r_4 este

$$R_2 = \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} = \frac{0{,}07}{0{,}8} = 0{,}0875\ \Omega.$$

Rezistențele în serie R_1, R_2 și r_2 au rezistența echivalentă

$$R_3 = R_1 + R_2 + r_2 = 1{,}2175\ \Omega.$$

Rezistența totală a circuitului este

$$R = \frac{r_1 R_3}{r_1 + R_3} = \frac{0{,}4 \cdot 1{,}2175}{1{,}6175} = 0{,}3\ \Omega.$$

b) $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{10}{0{,}3} = 33{,}33$ A.

c) $i_1 = \dfrac{U}{r_1} = \dfrac{10}{0{,}4} = 25$ A; $\quad i_2 = I - i_1 = 33{,}33 - 25 = 8{,}33$ A,

$$i_3 = \frac{r_4}{r_3 + r_4} \cdot i_2 = \frac{0{,}1}{0{,}8} \cdot 8{,}33 = 1{,}04\ \text{A}; \quad i_4 = i_2 - i_3 = 7{,}29\ \text{A},$$

$$i_5 = \frac{r_6 + r_7}{r_5 + r_6 + r_7} \cdot i_2 = \frac{1}{1{,}5} \cdot 8{,}33 = 5{,}57\ \text{A},$$

$$i_6 = i_7 = i_2 - i_5 = 8{,}33 - 5{,}57 = 2{,}76\ \text{A}.$$

d) $U_{ab} = r_3 i_3 = 0{,}7 \cdot 7{,}28 = 5{,}096$ V; $\quad U_{cd} = r_5 i_5 = 5{,}57 \cdot 0{,}5 = 2{,}785$ V.

4.37. Un cablu electric cu lungimea $AB = 100$ km, are o rezistență electrică de 15,2 Ω/km. Într-un anumit loc C al cablului se produce o defecțiune, care este echivalentă cu o scurgere la pământ și care introduce o rezistență

Scanned with OKEN Scanner

suplimentară R. Dacă măsurăm rezistența cablului cînd capătul său îndepărtat B este izolat, se găsește valoarea $R_1 = 1152\ \Omega$. Dacă acest capăt este legat la pămînt, se găsește valoarea $R_2 = 918\ \Omega$. Se cere:

a) Distanța la care s-a produs defecțiunea. b) Valoarea rezistenței suplimentare R.

(Adm. Inst. Politehnic, Cluj, 1959)

Rezolvare. a) Fie $x = CB$ și $100 - x = AC$ lungimile cablului după locul defecțiunii și înainte de acesta. Punctul B fiind izolat, pe porțiunea CB nu circulă curent. În acest caz rămîne rezistențele AC și R montate în serie și putem scrie

$$15{,}2\,(100 - x) + R = 1152. \tag{1}$$

Dacă B se leagă la pămînt, rezistențele R și CB sînt montate în derivație, iar AC este în serie cu această derivație.

În acest caz se poate scrie

$$\frac{15{,}2\,xR}{15{,}2\,x + R} + 15{,}2\,(100 - x) = 918. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) se obține ecuația

$$x^2 - 79{,}2\,x + 958{,}6 = 0$$

$$x = 64 \text{ km}.$$

Defecțiunea se produce la 36 km de A.

b) Din (1) rezultă $R = 605\ \Omega$.

4.38. O rezistență R a fost măsurată printr-un montaj industrial folosind un ampermetru cu rezistența interioară $R_A = 0{,}5\ \Omega$ și un voltmetru cu rezistența interioară $R_V = 500\ \Omega$, conectat la bornele sursei, care are rezistența interioară neglijabilă. Tensiunea indicată de voltmetru a fost egală cu $U = 20$ V, iar intensitatea indicată de ampermetru a fost $I = 4$ A. Se cere:

a) Valoarea exactă a rezistenței R. b) Cînd este mai precisă măsurarea rezistenței R; cînd voltmetrul este conectat la bornele sursei sau cînd el este montat la bornele rezistenței ?

(Olimpiada de fizică, 1964)

Rezolvare. a) Valoarea aproximativă a rezistenței în ambele montaje este

$$R_1 = \frac{U}{I} = \frac{20}{4} = 5\ \Omega.$$

Valoarea exactă a rezistenței în cazul montajului din fig. 163, *a* este

$$R = \frac{U - R_A I}{I} = \frac{20 - 0{,}5 \cdot 4}{4} = \frac{18}{4} = 4{,}5\ \Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Eroarea $\Delta R = R_1 - R = 5 - 4{,}5 = 0{,}5\ \Omega$.

b) În cazul montajului din fig. 163, *b*, valoarea exactă a rezistenței este dată de relația

$$U = RI_R = R \cdot \frac{R_V}{R + R_V} I.$$

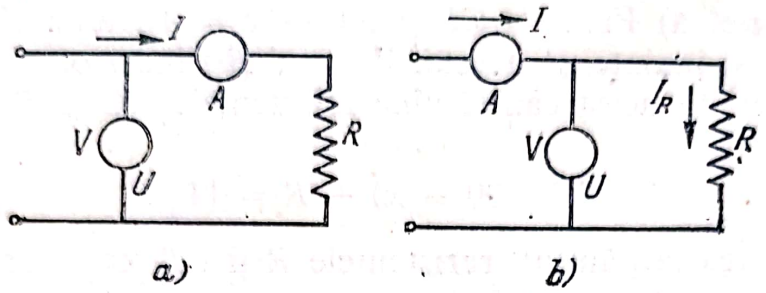


Fig. 163

Din această relație rezultă

$$R = \frac{UR_V}{R_V I - U} = \frac{20 \cdot 500}{500 \cdot 4 - 20} = \frac{10\,000}{1980} = 5{,}05\ \Omega.$$

Eroarea $\Delta R = 5{,}05 - 5 = 0{,}05$.

Măsurarea este mai exactă în cazul (b).

4.39. Se dă circuitul din fig. 164, în care $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 700\ \Omega$; $R_3 = 140\ \Omega$. Tensiunea electromotoare a sursei de curent este $E = 150$ V, iar rezistența sa interioară este $r = 195\ \Omega$. Curentul în ramura BD fiind egal cu zero, se cere:

a) Valoarea rezistenței R_4. b) Curenții I_3 și I_4 în ramurile BC și CD.

(Adm. Inst. Politehnic, Cluj, 1964)

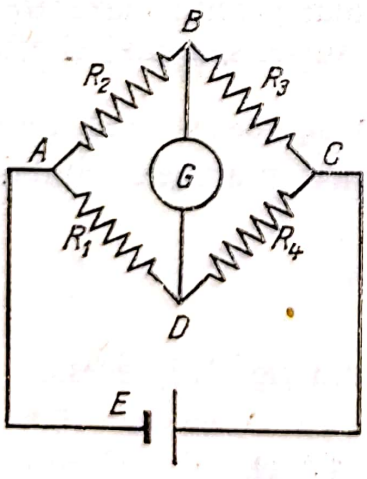


Fig. 164

Rezolvare. a) Aplicînd legea lui Kirchhoff circuitelor ABD și BCD avem

$$R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0;\ R_2 I_2 = R_1 I_1, \qquad (1)$$

$$R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0;\ R_3 I_3 = R_4 I_4. \qquad (2)$$

Împărțind relațiile (1) și (2) una prin alta și ținînd seamă că $I_2 = I_3$ și $I_1 = I_4$ obținem

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{R_1}{R_4};\quad R_4 = \frac{R_3}{R_2} \cdot R_1 =$$

$$= \frac{140}{700} \cdot 100 = \frac{14\,000}{700} = 20\ \Omega$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Rezistența echivalentă a punții este

$$R = \frac{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{840 \cdot 120}{960} = 105\ \Omega.$$

Curentul total produs de sursă este

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{150}{105 + 195} = \frac{150}{300} = 0{,}5\ \text{A},$$

$$U_{AC} = RI = 0{,}5 \cdot 105 = 52{,}5\ \text{V}; \quad I_4 = \frac{U_{AC}}{R_1 + R_4} = \frac{52{,}5}{120} = 0{,}4375\ \text{A};$$

$$I_3 = 0{,}5 - 0{,}4375 = 0{,}0625\ \text{A}.$$

4.40. O baterie electrică este formată din două grupe legate în paralel, fiecare grupă fiind formată din cîte cinci elemente identice legate în serie; fiecare element are t.e.m. de 25 V și rezistența interioară de 1 Ω. Circuitul exterior este format din trei becuri de automobil legate în paralel, unul dintre ele avînd 2 Ω, iar celelalte două cîte 4 Ω, un motor cu rezistența de 3 Ω și două reșouri legate în paralel avînd unul 10 Ω, iar celălalt 15 Ω. Cele trei grupe consumatoare fiind legate în serie (fig. 165), se cere:

a) Rezistența totală a circuitului exterior. b) Tensiunea la bornele bateriei. c) Intensitatea curentului fiecărui grup consumator. d) Căldura dezvoltată de reșouri într-o oră.

(Olimpiada de fizică, 1962)

Rezolvare. a) Rezistența echivalentă a grupului de baterii este

$$R_1 = \frac{5r}{2} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2{,}5\ \Omega.$$

Rezistența echivalentă a becurilor este dată de relația

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad R_2 = 1\ \Omega.$$

Rezistența motorului $R_3 = 3\ \Omega$.

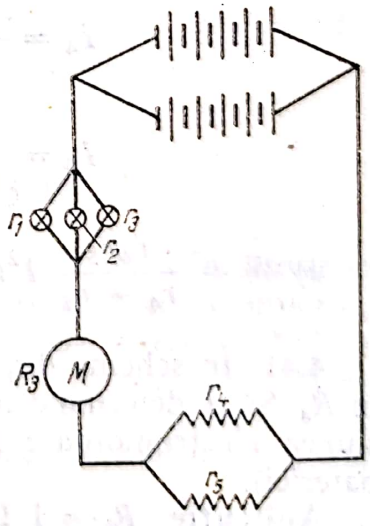


Fig. 165

Rezistența echivalentă a reșourilor este dată de relația

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{15+10}{150} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}; \quad R_4 = 6\ \Omega.$$

Rezistența circuitului exterior este

$$R_e = R_2 + R_3 + R_4 = 1 + 3 + 6 = 10\ \Omega$$

iar rezistența totală

$$R_t = 10 + 2{,}5 = 12{,}5\ \Omega.$$

Curentul total care trece prin circuit este

$$I = \frac{E}{R_t} = \frac{5e}{R_t} = \frac{5 \cdot 25}{12{,}5} = \frac{125}{12{,}5} = 10\ \text{A}.$$

b) Tensiunea la bornele bateriei este

$$U = R_e I = 10 \cdot 10 = 100\ \text{V}.$$

c) Prin fiecare grup de baterii trece cîte un curent de 5 A.
Pentru grupul de lămpi putem scrie

$$U_2 = I \cdot R_2 = 10 \cdot 1 = 10\,\text{V}$$

$$I_1 = \frac{U_2}{r_1} = \frac{10}{2} = 5\,\text{A}, \quad I_2 = \frac{U_2}{r_2} = \frac{10}{4} = 2{,}5\,\text{A}, \quad I_3 = \frac{U_2}{r_3} = \frac{10}{4} = 2{,}5\,\text{A}.$$

Prin motor trece un curent de 10 A, iar prin fiecare reșou trec curenții

$$I_4 = \frac{r_5}{r_4 + r_5} I = \frac{15}{25} \cdot 10 = \frac{150}{25} = 6\,\text{A},$$

$$I_5 = \frac{r_4}{r_4 + r_5} I = \frac{10}{24} \cdot 10 = \frac{100}{25} = 4\,\text{A}.$$

d) $W = \dfrac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} I^2 t = \dfrac{10 \cdot 15}{25} \cdot 100 \cdot 3600 = 216 \cdot 10^4\ \text{J}.$

4.41. În schema din fig. 166 se dau rezistențele R_1, R_2, R_3 și curentul I_3 în R_3. Să se determine curenții I_1 și I_2 prin rezistențele R_1 și R_2 precum și tensiunea electromotoare E a bateriei (se va neglija rezistența interioară a bateriei).

Aplicație. $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $I_3 = 10$ A.

(R. M. F., nr. 1/1951)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Rezistența echivalentă a rezistențelor R_2 și R_3 este

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{6}{5} = 1{,}2\ \Omega.$$

Rezistența totală a circuitului este

$$R = R_1 + R_{23} = 1 + 1{,}2 = 2{,}2\ \Omega.$$

Curentul furnizat de baterie este

$$I_1 = \frac{E}{R} = \frac{E}{2{,}2}. \qquad (1)$$

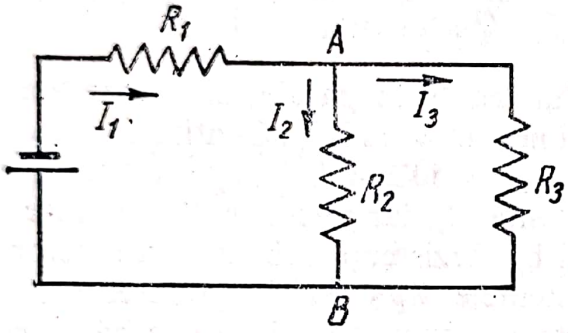


Fig. 166

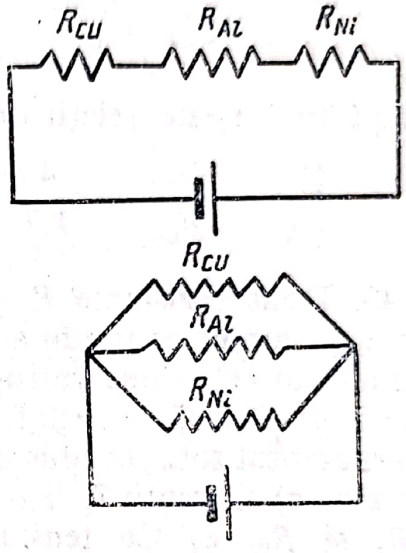


Fig. 167

Aplicînd nodului A legea întîi a lui Kirchhoff și exprimînd tensiunea la bornele conductorilor R_2 și R_3, obținem ecuațiile

$$I_1 = I_2 + I_3 = I_2 + 10, \qquad (2)$$

$$I_2 R_2 = I_3 R_3. \qquad (3)$$

Rezolvînd aceste trei ecuații, obținem

$$I_1 = 25\ \text{A}\ ;\quad I_2 = 15\ \text{A}\ ,\quad E = 55\ \text{V}.$$

4.42. În circuitul unei pile se leagă, mai întîi, în serie, apoi în derivație trei fire: de cupru, de aluminiu și de nichel. Firele avînd aceeași lungime, aceeași secțiune, iar rezistențele specifice respective fiind $\rho_{Cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}$ pentru cupru, $\rho_{Al} = 4 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}$ pentru aluminiu și $\rho_{Ni} = 9 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}$ pentru nichel, se cere să se afle raportul cantităților de căldură primite de firul de cupru și cel de aluminiu, respectiv de firul de cupru și cel de nichel în ambele feluri de legături arătate în fig. 167.

(R. M. F., nr. 11/1952)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Firele avînd aceeași lungime și aceeași secțiune, cantitățile de căldură, pentru conexiunea în serie, sînt proporționale cu rezistențele specifice

$$\frac{Q_{Cu}}{Q_{Al}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}} = \frac{1,7}{4} = 0,425, \quad \frac{Q_{Cu}}{Q_{Ni}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Ni}} = \frac{1,7}{9} = 0,189.$$

La legarea firelor în derivație avem

$$Q_{Cu} = \frac{U^2}{R_{Cu}} t, \quad Q_{Al} = \frac{U^2}{R_{Al}} t, \quad Q_{Ni} = \frac{U^2}{R_{Ni}} t.$$

Împărțind aceste relații una prin alta, obținem

$$\frac{Q_{Cu}}{Q_{Al}} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} = \frac{4}{1,7} = 2,352; \quad \frac{Q_{Cu}}{Q_{Ni}} = \frac{\rho_{Ni}}{\rho_{Cu}} = \frac{9}{1,7} = 5,294.$$

4.43. Două rezistențe R_1 și R_2 sînt legate în paralel și alimentate de la o sursă de curent continuu sub tensiunea $U = 110$ V. Cantitatea de căldură dezvoltată în cele două rezistențe este $Q = 50\,244$ J în 100 s. Știind că 1/5 din această căldură se degajă în rezistența R_1, iar restul în R_2, se cere:

a) Curentul total produs de sursă. b) Rezistența echivalentă a celor două rezistențe. c) Curenții I_1 și I_2 în rezistențele R_1 și R_2. d) Valoarea rezistențelor R_1 și R_2. e) Ce tensiune electromotoare trebuie să aibă sursa de curent care produce tensiunea U, dacă rezistența interioară este de 2 Ω.

(Adm. Inst. Politehnic, Buc., 1961)

Rezolvare

a) $I = \frac{Q}{Ut} = \frac{50\,244}{110 \cdot 100} = 4,57$ A.

b) $R = \frac{U}{I} = \frac{110}{4,57} = 24,05\ \Omega.$

c) $Q_1 = \frac{Q}{5} = 10\,048,8 = R_1 I_1^2 t = U I_1 t,$

$$I_1 = \frac{Q_1}{Ut} = \frac{10\,048,8}{110 \cdot 100} = 0,9135\ \text{A},$$

$$I_2 = I - I_1 = 4,57 - 0,9135 = 3,6565\ \text{A}.$$

d) $U = R_1 I_1 = R_2 I_2,$

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{110}{0,9135} = 120,4\ \Omega, \quad R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{110}{3,6565} = 30,15\ \Omega.$$

e) $E = U + rI = 110 + 2 \cdot 4,57 = 119,14$ V.

Scanned with OKEN Scanner

4.44. Două rezistențe R_1 și R_2 sînt montate în paralel și alimentate de la o baterie de acumulatori cu t.e.m. $E = 24$ V și rezistența interioară $r = 1{,}2\ \Omega$. Cunoscînd rezistența $R_1 = 2\ \Omega$ și știind că fiecare dintre cele două rezistențe absoarbe o putere maximă, se cere:

a) Puterea maximă absorbită de circuitul exterior. b) Valoarea rezistenței R_2. c) Puterile maxime absorbite de R_1 și R_2.

Rezolvare. a) Dacă notăm cu R rezistența echivalentă exterioară, variabilă a circuitului, puterea absorbită de circuitul exterior este

$$P = I^2R = \left(\frac{E}{R+r}\right)^2 R.$$

Luînd derivata lui P în raport cu R, avem

$$\frac{\Delta P}{\Delta R} = \frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3}.$$

Puterea maximă are loc pentru $E^2(r-R) = 0$; $r = R$, adică atunci cînd rezistența exterioară este egală cu cea interioară

$$P_{max} = \frac{1}{4}\cdot\frac{E^2}{r} = \frac{1}{4}\cdot\frac{576}{1{,}2} = 120\ \text{W}.$$

b) Din relația $R = r$ se obține

$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = r; \quad \frac{2\cdot R_2}{2+R_2} = 1{,}2; \quad R_2 = 3\ \Omega.$$

c) Curenții în circuitul principal și în cele două derivații sînt

$$I = \frac{E}{R+r} = \frac{E}{2r} = \frac{24}{2\cdot 1{,}2} = 10\ \text{A},$$

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot I = \frac{3}{5}\cdot 10 = 6\,\text{A}, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot I = \frac{2}{5}\cdot 10 = 4\,\text{A},$$

$$P_{1\,max} = R_1I_1^2 = 2\cdot 36 = 72\,\text{W}, \quad P_{2\,max} = R_2I_2^2 = 3\cdot 16 = 48\,\text{W}.$$

4.45. O baterie are t.e.m. de 32 V, iar bornele ei se unesc printr-un fir lung de 3 m. Între capetele firului se produce o cădere de tensiune de 30 V, iar cantitatea de căldură degajată de fir într-o secundă este de 6 W. Se cere:

a) Rezistența interioară a bateriei. b) Rezistența firului. c) Timpul necesar pentru trecerea prin circuit a 720 coulombi. d) Lungimea pe care ar trebui s-o aibă firul ca diferența de potențial la capetele lui să fie de 12 V. e) Raportul dintre energia dezvoltată în acest caz și cel precedent, în circuitul întreg și circuitul exterior.

(Olimpiada de fizică, 1964)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Curentul care trece prin circuit este

$$I_1 = \frac{P}{U_1} = \frac{6}{30} = 0{,}2\,\text{A}, \quad U_1 = E - r I_1 ;$$

$$r = \frac{E - U_1}{I_1} = \frac{32 - 30}{0{,}2} = 10\,\Omega.$$

b) $U_1 = R_1 I_1$; $R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{30}{0{,}2} = 150\ \Omega.$

c) $t_1 = \frac{Q}{I_1} = \frac{720}{0{,}2} = 3600\,\text{s} = 1\,\text{h}.$

d) Curentul care trece prin circuit este

$$I_2 = \frac{E - U_2}{r} = \frac{32 - 12}{10} = \frac{20}{10} = 2\,\text{A}.$$

Din relaţiile

$$U_1 = R_1 I_1 = \rho \frac{l_1}{s} I_1 \text{ si } U_2 = R_2 I_2 = \rho \frac{l_2}{s} I_2 ,$$

scoatem prin împărţire

$$\frac{l_2 I_2}{l_1 I_1} = \frac{U_2}{U_1}, \quad l_2 = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{I_1}{I_2} l_1 = \frac{12}{30} \cdot \frac{0{,}2}{2} \cdot 3 = 0{,}12\ \text{m}.$$

e) Timpul necesar pentru trecerea a 720 C este

$$t_2 = \frac{Q}{I_2} = \frac{720}{2} = 360\ \text{s}.$$

Energia totală dezvoltată în circuit în cele două cazuri este

$$W_1 = EI_1t_1 \quad \text{şi} \quad W_2 = EI_2t_2.$$

Prin împărţirea relaţiilor obţinem

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{EI_2t_2}{EI_1t_1} = \frac{I_2t_2}{I_1t_1} = \frac{2 \cdot 360}{0{,}2 \cdot 3600} = 1.$$

Pentru energiile dezvoltate în circuitul exterior, putem scrie

$$\frac{W_2'}{W_1'} = \frac{U_2I_2t_2}{U_1I_1t_1} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 360}{32 \cdot 0{,}2 \cdot 3600} = \frac{12}{32} = 0{,}375.$$

Scanned with OKEN Scanner

În primul caz randamentul circuitului este mai bun decît în cel de al doilea.

4.46. Cu ajutorul unui reșou electric de 600 W/120 V se încălzesc 2 l de apă timp de 20 min. Cînd apa atinge temperatura $t_1 = 85$ °C se scoate reșoul de la priză și se introduce în apă o bucată de gheață de 1,5 kg cu temperatura $t' = -20$ °C. După topirea gheții, amestecul de apă atinge temperatura de echilibru $t = 10$ °C. Randamentul reșoului fiind de 85%, căldura specifică a gheții $c' = 2090$ J/kg·grd, iar căldura specifică a apei, $c = 4180$ J/kg·grd, se cere:

a) Curentul absorbit de la rețea. b) Rezistența reșoului. c) Temperatura inițială a apei. d) Căldura de topire a gheții. e) Costul energiei electrice consumate, dacă 1 kWh costă 0,35 lei.

Rezolvare.

a) $I = \frac{P}{U} = \frac{600}{120} = 5\,\text{A}.$

b) $R = \frac{U}{I} = \frac{120}{5} = 24\,\Omega.$

c) $\eta\, RI^2t = mc\,(t_1 - t_0),$

$$t_0 = t_1 - \frac{\eta R I^2 t}{mc} = 85 - \frac{0{,}85 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 1200}{2 \cdot 4180} = 11{,}8\,^{\circ}\text{C}.$$

d) $m'c't' + m'l + m'ct = mc(t_1 - t),$

$$l = \frac{mc\,(t_1 - t) - m'\,(c't' + ct)}{m'} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4180\,(85 - 10) - 1{,}5\,(2090 \cdot 20 + 4180 \cdot 10)}{1{,}5} = 334 \cdot 10^{\backprime}\ \text{J/kg}.$$

e) $W = Pt = 0{,}600 \cdot \frac{20}{60} = 0{,}200$ kWh,

$$C = 0{,}200 \cdot 0{,}35 = 0{,}07 \text{ lei}.$$

4.47. Pentru evaporarea apei din soluția de lianți cu care se impregnează pînza de canafas pentru întărirea și fixarea fibrelor, se utilizează radianți electrici de 650 W și 380 V montați în paralel și legați direct la rețea. Materialul textil, cu lățimea de 1,10 m, impregnat cu soluția de liant la temperatura de 15 °C, cîntărind 0,180 kg/m², trece prin fața radianților cu

Scanned with OKEN Scanner

viteza de 4 m/min; în acest timp, apa din soluție se vaporizează și se obține un material cu 0,080 kg/m². Din căldura furnizată de radianți se utilizează numai 35%, iar căldura de vaporizare a apei este $l = 22{,}572 \cdot 10^5$ J/kg; uscarea materialului se face la presiunea atmosferică. Se cere:

a) Numărul de radianți necesari. b) Puterea și curentul absorbit de la rețea. c) Rezistența totală a circuitului. d) Consumul specific de energie electrică la suta de metri pătrați de producție, dacă motoarele care antrenează mașina au o putere de 5,4 kW și randamentul 90%. e) Care este norma de consum de energie electrică dacă s-a făcut o economie de 8% față de normă.

Rezolvare. a) Cantitatea de apă care trebuie vaporizată pe fiecare minut este egală cu

$$m = 1{,}10 \cdot 4\,(0{,}180 - 0{,}080) = 0{,}440 \text{ kg}.$$

Căldura necesară pentru vaporizarea apei este

$$Q = m\,[c(t - t_0) + l] = 0{,}440(4187 \cdot 85 + 22{,}572 \cdot 10^5) = 1\,149\,752 \text{ J}.$$

Dacă n este numărul radianților, iar P' este puterea unui radiant, putem scrie

$$\eta \cdot nP't = Q$$

$$n = \frac{Q}{\eta P' t} = \frac{1\,149\,752}{0{,}35 \cdot 650 \cdot 60} = 84 \text{ radianți}.$$

b) $P_1 = 84 \cdot 650 = 54\,600 \text{ W} = 54{,}6 \text{ kW}$

$$I = \frac{P_1}{U} = \frac{54\,600}{380} = 143{,}7 \text{ A}.$$

c) Rezistența unui radiant este

$$r = \frac{U^2}{P'} = \frac{380^2}{650} = \frac{144\,400}{650} = 222\ \Omega.$$

Rezistența totală este

$$R_t = \frac{r}{n} = \frac{222}{84} = 2{,}65\ \Omega.$$

d) Puterea absorbită de motoare

$$P_2 = \frac{5{,}4}{0{,}9} = 6 \text{ kW}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Puterea totală absorbită de la rețea este

$$P = P_1 + P_2 = 54{,}6 + 6 = 60{,}6 \text{ kW}.$$

Energia consumată în timp de un minut este

$$W = Pt = 60{,}6 \cdot \frac{1}{60} = 1{,}01 \text{ kWh} = 3{,}636 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Producția pe minut fiind egală cu 4,4 m², consumul specific de energie electrică este

$$C = \frac{1{,}01}{4{,}4} \cdot 100 = 23 \text{ kWh/100 m}^2 = 8{,}264 \cdot 10^5 \text{ J/m}^2 \cdot$$

e) Dacă x este norma de consum, avem

$$x - 0{,}08\,x = 23; \quad x = \frac{23}{0{,}92} = 25 \text{ kWh/100 m}^2 = 9 \cdot 10^5 \text{ J/m}^2.$$

4.48. Șase becuri de cîte 12 V și 6 W sînt legate în serie și trebuie să fie alimentate de la o rețea de curent continuu de 220 V. Se cere:

a) Curentul pentru care a fost construit becul. b) Valoarea rezistenței adiționale care trebuie montată în serie cu cele șase becuri pentru ca acestea să lumineze normal. c) Dacă cele șase becuri sînt montate în paralel, care este valoarea rezistenței adiționale legată în serie cu grupul de becuri pentru a putea fi alimentate de la tensiunea de 220 V. d) Care este puterea consumată în rezistențele adiționale în cazurile (b) și (c) ?

(Adm. Inst. Politehnic, Buc., 1959)

Rezolvare

a) $I = \frac{P'}{U'} = \frac{6}{12} = 0{,}5 \text{ A}.$

b) Rezistența unui bec este

$$r = \frac{U'}{I} = \frac{12}{0{,}5} = 24\,\Omega.$$

Rezistența adițională este dată de relația

$$U = I(6\,r + x),$$

$$x = \frac{U}{I} - 6\,r = \frac{220}{0{,}5} - 6 \cdot 24 = 440 - 144 = 296\Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Prin circuit poate să treacă un curent

$$I' = 6I = 6 \cdot 0{,}5 = 3 \text{ A}.$$

Rezistența echivalentă a becurilor este

$$r' = \frac{r}{6} = \frac{24}{6} = 4\,\Omega.$$

În acest caz se poate scrie relația

$$U = I'(r' + x),\ x = \frac{U}{I'} - r' = \frac{220}{3} - 4 = 69{,}3\,\Omega$$

d) $P_1 = U_1 I = (220 - 6 \cdot 12)\ 0{,}5 = 74$ W,

$$P_2 = U_2 I' = (220 - 12)\ 3 = 624 \text{ W}.$$

4.49. Pe firele liniilor de transport de energie electrică se formează uneori gheață. Se cere:

a) Greutatea gheții pe metrul liniar de fir dacă diametrul firului este de 1 cm și diametrul gheții de 3 cm. Densitatea gheții se ia egală cu $\rho = 900$ kg/m³. b) Căldura necesară pentru topirea gheții formată pe 1 m de fir, dacă temperatura gheții este de minus 10 °C, căldura specifică a gheții, $c = 2090$ J/kg·grd, iar căldura de topire a acesteia, $l = 334{,}4 \cdot 10^3$ J/kg. c) Dacă această căldură este furnizată de un curent electric, se cere intensitatea acestui curent pentru ca topirea gheții de pe 1 m să se facă în timp de un minut, rezistența firului fiind de 0,3 Ω/m. d) Tensiunea necesară pe metrul liniar de fir.

(Adm. Inst. Politehnic, Buc., 1959)

Răspuns: 5,54 N; 200 kJ; 105,6 A; 31,6 V.

4.50. Un lichid cu densitatea $\rho = 1\,500$ kg/m³ se pompează printr-o conductă verticală de lungime $h = 3$ m. Conducta are secțiunea circulară, cu diametrul $D = 0{,}40$ m. Pompa este acționată de un electromotor de la rețeaua de 220 V. Randamentul întregii instalații este $\eta = 0{,}70$, iar debitul masic al pompei este $Q_m = 120$ kg/s. Se cere:

a) Debitul volumic al pompei în m³/s. b) Puterea absorbită de instalație, de la rețea. c) Intensitatea curentului care trece prin electromotor. d) Costul pompării unei tone de lichid dacă prețul energiei electrice este de 0,30 lei/kWh. e) Viteza cu care curge lichidul în conductă.

(Adm. Inst. Politehnic, Buc., 1962)

Rezolvare.

a) $V = \frac{m}{\rho} = \frac{120}{1500} = 0{,}08\ \text{m}^3$; $Q_v = 0{,}08\ \text{m}^3/\text{s}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Puterea utilă și puterea absorbită sînt

$$P_u = \frac{mgh}{t} = \frac{120 \cdot 9{,}8 \cdot 3}{1} = 3528 \text{ W} = 3{,}528 \text{ kW},$$

$$P_a = \frac{P_u}{\eta} = \frac{3{,}528}{0{,}70} = 5{,}04 \text{ kW}.$$

c) $I = \frac{P_a}{U} = \frac{5040}{220} = 22{,}9 \text{ A}.$

d) Pentru pomparea unei tone de lichid este necesar timpul

$$t' = \frac{M}{Q_m} = \frac{1000}{120} = 8{,}33 \text{ s} = \frac{8{,}33}{3600} \approx \frac{1}{432} \text{ h}.$$

Energia electrică consumată pentru pomparea unei tone de lichid este $W = P_a t' = 5040 \cdot 8{,}33 = 42\,000 \text{ J} = 0{,}01165 \text{ kWh}.$

Costul energiei consumate este

$$C = 0{,}01165 \cdot 0{,}30 = 0{,}0035 \text{ lei}.$$

e) Viteza de curgere a lichidului prin conductă este

$$v = \frac{Q_v}{S} = \frac{4Q_v}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}08}{3{,}14 \cdot 0{,}16} = 0{,}63 \text{ m/s}.$$

4.51. După întreruperea curentului pentru oprirea în stație, un troleibuz cu masa de 7 tone a mai parcurs 18 m în timp de 3 s. Dacă troleibuzul este alimentat de la rețeaua electrică, cu tensiunea de 500 V, iar coeficientul de frecare din timpul mersului este de cinci ori mai mic decît cel din timpul opririi, se cere:

a) Viteza constantă din timpul mersului. b) Puterea și curentul absorbite de la rețeaua electrică în timpul mersului uniform. c) Economia de energie electrică realizată în timpul opririi. Se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rezolvare.

a) $S = \frac{vt}{2}$; $v = \frac{2S}{t} = \frac{2 \cdot 18}{3} = 12 \text{ m/s}.$

b) În timpul opririi, avem

$$a = \frac{v}{t} = \frac{12}{3} = 4 \text{ m/s}^2;$$

$$\mu mg = ma; \quad \mu = \frac{a}{g} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul de frecare din timpul mersului, $\mu' = 0{,}08$.
Forța de tracțiune din timpul mersului este

$$F = \mu' mg = 0{,}08 \cdot 7000 \cdot 10 = 5600 \text{ N},$$

$$P = UI = Fv = 5600 \cdot 12 = 67\,200 \text{ W} = 67{,}2 \text{ kW},$$

$$I = \frac{Fv}{U} = \frac{67\,200}{500} = 134{,}4 \text{ A}.$$

c) $W = Pt = 67{,}2 \cdot \frac{3}{3600} = 0{,}056 \text{ kWh} = 2{,}02 \cdot 10^5 \text{ J}.$

4.52. Două rezistențe electrice $R_1 = 100\ \Omega$ și R_2 sînt așezate în două vase, care conțin fiecare cîte un lichid cu masele și căldurile specifice $m_1 = 200$ g, $c_1 = 2512$ J/kg·grd și respectiv $m_2 = 400$ g, $c_2 = 1256$ J/kg·grd. Cunoscînd randamentele instalațiilor $\eta_1 = 80\%$ și $\eta_2 = 64\%$, să se calculeze rezistența R_2 astfel ca ambele lichide să se încălzească cu un același număr de grade și în același timp, în următoarele cazuri: a) Rezistențele sînt montate în serie. b) Rezistențele sînt montate în paralel.

(Adm. Inst. Politehnic, Cluj, 1964)

Rezolvare

$$Q_1 = \eta_1 R_1 I_1^2 t = m_1 c_1 \Delta\theta,$$

$$Q_2 = \eta_2 R_2 I_2^2 t = m_2 c_2 \Delta\theta.$$

Prin împărțirea acestor relații obținem

$$\frac{\eta_1 R_1 I_1^2}{n_2 R_2 I_2^2} = \frac{m_1 c_1}{m_2 c_2} = \frac{0{,}200 \cdot 2512}{0{,}400 \cdot 1256} = 1. \qquad (1)$$

a) La legarea în serie, $I_1 = I_2$ și din relația (1) rezultă

$$R_2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} R_1 = \frac{0{,}80}{0{,}64} \cdot 100 = 125\ \Omega.$$

b) La legarea în paralel avem

$$R_1 I_1 = R_2 I_2, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Înlocuind în (1) obținem

$$R_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1} R_1 = \frac{0{,}64}{0{,}80} \cdot 100 = 80\ \Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.53. O baterie de acumulatori cu tensiunea electromotoare $E = 40$ V, rezistența interioară $r = 0{,}06\ \Omega$ și tensiunea la borne $U = 37$ V, debitează curent pe un circuit exterior pe care trebuie montat un ampermetru cu rezistența $R_A = 0{,}2\ \Omega$ și care poate măsura curenți pînă la 10 A. Se cere:

a) Rezistența șuntului care trebuie legat la bornele ampermetrului pentru ca acesta să poată fi montat în circuit. b) Lungimea firelor care leagă bateria cu ampermetrul dacă acestea sînt de cupru cu rezistivitatea $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ și secțiunea $s = 2\ \text{mm}^2$.

Rezolvare. a) Curentul produs de baterie este

$$I = \frac{E - U}{r} = \frac{40 - 37}{0{,}06} = \frac{3}{0{,}06} = 50\,\text{A}.$$

Curenții suportați de ampermetru și șunt sînt egali cu $I_A = 10$ A și $I_s = 40$ A.

Tensiunea la bornele ampermetrului și șuntului este

$$U' = R_A I_A = R_s I_s = 0{,}2 \cdot 10 = 2\ \text{V}.$$

Din această relație rezultă

$$R_s = \frac{U'}{I_s} = \frac{2}{40} = 0{,}55\,\Omega.$$

b) Rezistența și lungimea firelor sînt date de relațiile

$$R_e = \frac{U - U'}{I} = \frac{37 - 2}{50} = \frac{35}{50} = 0{,}7\,\Omega,$$

$$l = \frac{R_e \cdot s}{\rho} = \frac{0{,}7 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{1{,}75 \cdot 10^{-8}} = 80\,\text{m}.$$

4.54. Un generator de curent continuu cu t.e.m. $E = 110$ V și cu rezistența $r = 1{,}5\ \Omega$, este montat în serie cu o baterie de acumulatori cu t.e.m. $E' = 10$ V și cu rezistența interioară $r' = 0{,}5\ \Omega$. La bornele AB ale acestui circuit sînt legate în paralel două fire AMB cu rezistența $R_1 = 10\ \Omega$ și ANB cu rezistența $R_2 = 40\ \Omega$ (fig. 168). Punctele M și N sînt astfel alese încît porțiunea de fir BM are rezistența de 5 Ω, iar porțiunea BN are rezistența de 30 Ω. În punctele M și N se leagă armăturile a doi condensatori cu capacitățile $C_1 = 2\ \mu\text{F}$ și $C_2 = 3\ \mu\text{F}$. Rezistențele firelor de legătură cu armăturile condensatorilor

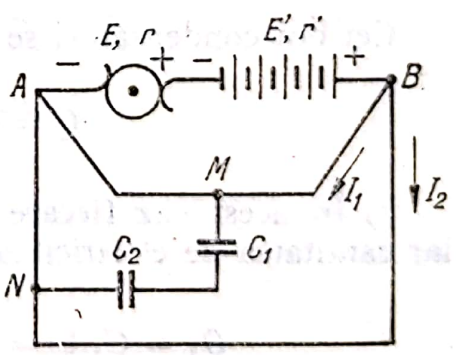


Fig. 168

fiind neglijabile, se cere să se calculeze cantitățile de electricitate cu care se încarcă condensatorii în următoarele ipoteze:

1) Generatorul este împiedicat să se rotească, iar condensatorii sînt montați; a) în serie; b) în paralel. 2) Generatorul se rotește, iar condensatorii sînt montați: a) în serie; b) în paralel.

Rezolvare. 1) Curentul care trece prin generator și baterie este

$$I = \frac{E'}{r + r' + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{10}{1{,}5 + 0{,}5 + \dfrac{10 \cdot 40}{10 + 40}} = \frac{10}{10} = 1\,\text{A}.$$

Tensiunea la bornele AB este

$$U_{AB} = E' - I(r + r') = 10 - 1\,(1{,}5 + 0{,}5) = 8\,\text{V}.$$

Curenții în ramificațiile AMB și ANB sînt

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{8}{10} = 0{,}8\,\text{A};\quad I_2 = I - I_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2\,\text{A}.$$

Diferențele de potențial dintre punctele B și M și B și N sînt

$$U_{BM} = R_{BM} \cdot I_1 = 5 \cdot 0{,}8 = 4\,\text{V};\quad U_{BN} = R_{BN} \cdot I_2 = 30 \cdot 0{,}2 = 6\,\text{V}.$$

Diferența de potențial dintre M și N este

$$U = U_{MN} = U_{BN} - U_{BM} = 6 - 4 = 2\,\text{V}.$$

a) Dacă U_1 și U_2 sînt tensiunile la bornele celor doi condensatori în serie, avem

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{U_2}{U_1};\quad \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{U_2}{U_1 + U_2},$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = \frac{2}{5} \cdot 2 = 0{,}8\,\text{V};\quad U_1 = 1{,}2\,\text{V}.$$

Cei doi condensatori se încarcă cu aceeași cantitate de electricitate

$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = \frac{2{,}4}{10^6}\,\text{C}.$$

b) În acest caz fiecare condensator are tensiunea la borne $U = 2$ V, iar cantitatea de electricitate cu care se încarcă fiecare este

$$Q_1 = C_1 U = \frac{4}{10^6}\,\text{C si}\ Q_2 = C_2 U = \frac{6}{10^6}\,\text{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Curentul care trece prin generator și baterie este

$$I = \frac{E + E'}{r + r' + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{110 + 10}{10} = 12 \text{ A}.$$

Tensiunea la bornele AB este

$$U_{AB} = E + E' - I(r + r') = 120 - 12 \cdot 2 = 96 \text{ V}.$$

Curenții în cele două ramificații sînt

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{96}{10} = 9{,}6\,\text{A}; \quad I_2 = 12 - 9{,}6 = 2{,}4 \text{ A}.$$

Procedînd ca mai înainte, găsim că diferența de potențial dintre M și N este $U' = U'_{MN} = 24$ V și vom obține deci

a) $Q = C_1 U'_1 = C_2 U'_2 = \dfrac{28{,}8}{10^6}$ C.

b) $Q_1 = C_1 U' = \dfrac{2}{10^6} \cdot 24 = \dfrac{48}{10^6}$ C,

$$Q_2 = C_2 U' = \frac{3}{10^6} \cdot 24 = \frac{72}{10^6} \text{ C}.$$

4.55. Un circuit electric conține o baterie cu tensiunea electromotoare $E = 10$ V, rezistența interioară $r = 0{,}75\ \Omega$ și o rezistență exterioară $R = 1{,}25\ \Omega$. Curentul trece 10 min. prin circuit. Se cere:

a) Energia electrică absorbită de circuitul exterior. b) Energia electrică produsă de baterie. c) Ce cantitate de apă s-ar încălzi cu 10 °C dacă i s-ar furniza întreaga energie electrică consumată în interiorul bateriei ?

(Adm. Inst. Politehnic, Brașov, 1963)

Rezolvare. a) Curentul produs de baterie este

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{10}{1{,}25 + 0{,}75} = \frac{10}{2} = 5\,\text{A}.$$

Energia absorbită de circuitul exterior este

$$W_e = R I^2 t = 1{,}25 \cdot 25 \cdot 600 = 18\,750\,\text{J}.$$

b) Energia produsă de baterie este

$$W_p = EIt = 10 \cdot 5 \cdot 600 = 30\,000 \text{ J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Energia consumată în interiorul bateriei este

$$W_c = W_p - W_e = 30\,000 - 18\,750 = 11\,250 \text{ J}.$$

Putem scrie relația

$$W_c = mc\,\Delta t;\ m = \frac{W_c}{c\,\Delta t} = \frac{11\,250}{4\,187 \cdot 10} = 0{,}270 \text{ kg}.$$

4.56. Un circuit electric este format dintr-o baterie de acumulatori, o rezistență $R = 5\ \Omega$ și un întrerupător, în serie. La bornele bateriei este montat un voltmetru. Cînd întrerupătorul este deschis, voltmetrul indică 12 V, iar cînd întrerupătorul este închis, voltmetrul indică 11 V. Se cere:

a) Tensiunea electromotoare a bateriei. b) Rezistența interioară a bateriei. c) Curentul care trece prin circuit. d) Randamentul bateriei. e) Energia consumată în timp de o oră în circuitul exterior.

Rezolvare. a) Cînd circuitul este deschis, curentul prin baterie este egal cu zero și avem

$$U_1 = E - r I_0 = 12;\ E = 12 \text{ V}.$$

b) $U_2 = E - rI = 11,\quad 12 - rI = 11,\quad I = \frac{1}{r}.$

Pe de altă parte avem

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{1}{r};\quad \frac{12}{5 + r} = \frac{1}{r}.$$

Din această relație rezultă

$$12\,r = 5 + r,\quad r = \frac{5}{11} = 0{,}455\ \Omega.$$

c) $I = \frac{1}{r} = \frac{11}{5} = 2{,}2 \text{ A}.$

d) $\eta = \frac{U}{E} = \frac{11}{12} \approx 0{,}917 = 91{,}7\%.$

e) $W = U_2 It = 11 \cdot 2{,}2 \cdot 3\,600 = 87\,000 \text{ J} = 0{,}0242 \text{ kWh}.$

4.57. Pentru determinarea randamentului unui motor cu ardere internă se folosește un dinam cuplat cu el, care dă un curent de 5 A sub o tensiune de 110 V. Știind că motorul consumă în plină sarcină 0,2088 kg benzină pe oră cu puterea calorică $q = 45{,}98 \cdot 10^6$ J/kg, că randamentul dinamului este 80%, se cere să se calculeze randamentul motorului.

(G. M. F., nr. 2/1962)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Dinamul fiind antrenat de motor, puterea absorbită de dinam reprezintă puterea produsă de motor, adică

$$\frac{UI}{\eta'} = P_m = \eta P_c = \eta mq$$

unde η' este randamentul dinamului, η este randamentul motorului, iar $m = 58 \cdot 10^{-6}$ kg este cantitatea de benzină consumată de motor pe secundă.

Din relația precedentă rezultă

$$\eta = \frac{UI}{\eta' mq} = \frac{110 \cdot 5}{0{,}8 \cdot 58 \cdot 10^{-6} \cdot 45{,}98 \cdot 10^{6}} = \frac{550}{2\,133{,}47} \approx 0{,}26 = 26\%.$$

4.58. O baterie de acumulatori alimentează un circuit de 120 becuri cu incandescență montate în derivație (fig. 169). Fiecare bec are puterea $P = 60$ W și rezistența $R = 240\ \Omega$. Conductorii de legătură dintre bornele bateriei și bornele de alimentare a becurilor au rezistența $r = 0{,}1\ \Omega$. La începutul descărcării, fiecare element al bateriei are tensiunea de 2,1 V, iar la sfîrșitul descărcării fiecare element are 1,8 V. Descărcarea bateriei durează 5 ore. Se cere:

a) Tensiunea nominală a becurilor. b) Numărul de elemente care trebuie introduse în circuit la începutul și sfîrșitul descărcării, astfel încît becurile să funcționeze normal. c) Capacitatea bateriei de acumulatori.

Rezolvare

a) $P = \frac{U_1^2}{R}$; $U_1 = \sqrt{PR} = \sqrt{60 \cdot 240} = \sqrt{14\,400} = 120$ V.

Curentul de funcționare a unui bec este

$$i = \frac{P}{U_1} = \frac{60}{120} = 0{,}5\ \text{A}.$$

Curentul total absorbit de becuri

$$I = ni = 120 \cdot 0{,}5 = 60\ \text{A}.$$

Pierderea de tensiune în conductorii de alimentare între bornele AB și CD este

$$\Delta U = rI = 0{,}1 \cdot 60 = 6\ \text{V}.$$

Tensiunea la bornele AB ale bateriei va trebui să fie

$$U_2 = U_1 + \Delta U = 120 + 6 = 126\ \text{V}.$$

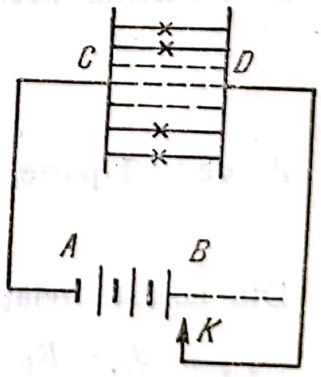


Fig. 169

Scanned with OKEN Scanner

Numărul de elemente necesare la începutul descărcării

$$n_1 = \frac{U_2}{2{,}1} = \frac{126}{2{,}1} = 60.$$

Numărul de elemente necesare la finele descărcării este

$$n_2 = \frac{U_2}{1{,}8} = \frac{126}{1{,}8} = 70.$$

Cu ajutorul unui comutator K se pot introduce treptat în circuit 70 elemente, pe măsură ce tensiunea scade.

c) $C = It = 60 \cdot 5 = 300\,\text{Ah}$.

4.59. Un bec electric și un reostat sînt legate în serie într-un circuit electric. Tensiunea la bornele becului este $U_1 = 60$ V, iar rezistența reostatului $R = 20\,\Omega$. Becul și reostatul consumă împreună o putere $P = 200$ W. Se cere: a) Intensitatea curentului în circuit. b) Cantitatea de căldură dezvoltată de bec în timp de o oră. c) Temperatura filamentului din becul electric, dacă rezistența lui la temperatura de 0 °C este de 2,5 Ω, iar coeficientul termic al rezistivității, $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ grd^{-1}.

(Olimpiada de fizică, 1960)

Rezolvare.

a) $P_1 = U_1 I = 60\,I$; $P_2 = RI^2 = 20\,I^2$.

$$P = P_1 + P_2; \quad 200 = 60\,I + 20\,I^2.$$

$$I^2 + 3I - 10 = 0.$$

Rezolvînd ecuația obținem $I = 2$ A.

b) $Q = R_1 I^2 t = U_1 It = 60 \cdot 2 \cdot 3\,600 = 432 \cdot 10^3$ J.

c) Rezistența becului în timpul funcționării este

$$R_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{60}{2} = 30\,\Omega.$$

Pe de altă parte, putem scrie

$$R_1 = R_0 (1 + \alpha \Delta t).$$

Din această relație rezultă

$$\Delta t = \frac{R_1 - R_0}{R_0 \alpha} = \frac{30 - 2{,}5}{2{,}5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = \frac{27{,}5 \cdot 10^3}{2{,}5 \cdot 5} = \frac{27\,500}{12{,}5} = 2\,200\,°\text{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.60. Rezistența R_1 conectată la rețeaua orașului degajă o cantitate de căldură Q în 15 min. Rezistența R_2, în aceleași condiții, degajă aceeași cantitate de căldură în 30 min. Se cere:

a) Timpul în care cele două rezistențe, legate în serie și conectate la rețea, vor degaja împreună cantitatea de căldură Q pe care o degajă separat fiecare dintre ele. b) Timpul în care cele două rezistențe, legate în paralel și conectate la rețea,vor degaja împreună aceeași cantitate Q de căldură. c) Rezistența R_1 este confecționată dintr-un fir cu lungimea $l = 1$ m, secțiunea $s = 1$ mm^2. densitatea $d = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3, căldura specifică $c = 921$ J/kg·grd. rezistivitatea $\rho = 3 \cdot 10^{-8}$ Ω·m, coeficientul termic al rezistivității $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ grd^{-1} și temperatura de topire 658 °C. Cunoscînd temperatura mediului la care se lucrează, $t = 20$ °C și pierderile de căldură de 10%, să se afle dacă firul poate suporta un curent $I = 10$ A timp de 3 min fără să se topească.

(Olimpiada de fizică, 1964.)

Rezolvare. Conform enunțului problemei se poate scrie

$$Q = \frac{U^2}{R_1} t_1 = \frac{U^2}{R_2} t_2.$$

Din această relație obținem

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{30}{15} = 2, \qquad R_2 = 2R_1.$$

a) Rezistențele fiind în serie, avem

$$Q = \frac{U^2 t}{R_1 + R_2} = \frac{U^2 t_1}{R_1}.$$

Din această relație obținem

$$\frac{t}{R_1 + R_2} = \frac{t_1}{R_1}, \quad t = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot t_1 = 3 \cdot 15 = 45 \text{ min}.$$

b) Rezistențele fiind legate în paralel, putem scrie

$$Q = \frac{U^2 t'}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{U^2 t_1}{R_1}.$$

Din această relație rezultă

$$\frac{(R_1 + R_2) t'}{R_1 R_2} = \frac{t_1}{R_1}, \quad t' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} t_1 = \frac{2}{5} \cdot 15 = 10 \text{ min}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Relația care ne dă creșterea de temperatură $\Delta t = t - t_0$, este

$$0{,}9\, R_1 (1 + \alpha \Delta t) I^2 t = mc \Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{0{,}9\, R_1 I^2 t}{mc - 0{,}9\, R_1 \alpha I^2 t} = \frac{0{,}9\, \rho l I^2 t}{s^2 d c - 0{,}9\, l \alpha I^2 t}.$$

Făcînd înlocuirile și simplificările necesare, obținem

$$\Delta t = \frac{0{,}9 \cdot 3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^3}{2{,}7 \cdot 9{,}21 - 0{,}9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1{,}8} = \frac{4\,760}{5{,}43} = 508°\text{C},$$

$$t = \Delta t + t_0 = 508 + 20 = 528°\text{C}.$$

Această temperatură fiind mai mică decît cea de topire, firul o poate suporta.

4.61. Două baterii electrice P și P' formate din cinci și patru elemente identice sînt montate în circuitul $ABCDEF$ (fig. 170), în care G reprezintă un galvanometru și R un reostat. Se manevrează R așa fel încît galvanometrul să arate zero. Se găsește în acest caz pentru R valoarea de 1 Ω. Să se calculeze rezistența interioară a unui element, rezistența firelor de legătură fiind neglijabilă.

Rezolvare. Aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff circuitelor $ACDF$ și $BCDE$, obținem ecuațiile

$$5e = RI + 5ri_1, \tag{1}$$

$$4e = RI + 4ri_2. \tag{2}$$

Legea întîi a lui Kirchhoff ne dă

$$I = i_1 + i_2. \tag{3}$$

Deoarece pentru $R = 1\ \Omega$, $i_2 = 0$, din relațiile de mai înainte rezultă

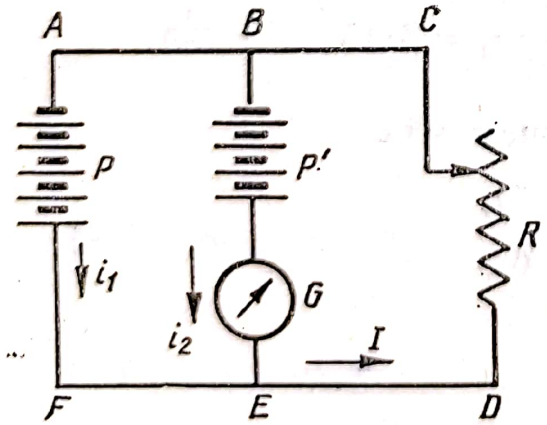


Fig. 170

$$I = i_1, \quad 4e = i_1, \quad 5e = i_1 (1 + 5r).$$

Împărțind ultimele două relații, una prin alta, se obține

$$\frac{5}{4} = \frac{1 + 5r}{1}$$

unde rezultă $r = 1/20\ \Omega$.

4.62. Două baterii electrice P_1 și P_2 au tensiunile electromotoare egale cu $e = 1{,}1$ V. Rezistența interioară a ba-

Scanned with OKEN Scanner

teriei P_1 este egală cu $r_1 = 11\ \Omega$, iar a bateriei P_2 este egală cu $r_2 = 6\ \Omega$. Se unesc cele două baterii în serie și se închide circuitul prin rezistența exterioară x. Să se calculeze x astfel ca tensiunea la bornele AC ale bateriei P_1 să fie zero și să se calculeze în acest caz tensiunea la bornele bateriei P_2.

Rezolvare. Tensiunea la bornele bateriei P_1 este egală cu

$$U_{AC} = e - r_1 I = 2 - r_1 \frac{2e}{r_1 + r_2 + x}.$$

Făcînd înlocuirile și egalînd cu zero, obținem $x = 5\ \Omega$. Curentul în circuit va fi $I = 0{,}1$ A, iar tensiunea la bornele bateriei P_2 este egală cu

$$U_{BC} = e - r_2 I = 1{,}1 - 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}5 \text{ V}.$$

4.63. O baterie de acumulatori E (fig. 171) de 400 V produce un curent într-un circuit $EACB$ de rezistență R, în care este cuprinsă și rezistența bateriei. O parte ACB din circuit, de rezistență x, fiind închisă într-un calorimetru, degajă într-o secundă 335 J. Se pune după aceea în derivație între A și B, o rezistență ADB egală cu x și se constată că, într-o secundă, cele două rezistențe ACB și ADB degajă o cantitate de căldură de 377 J. Să se calculeze rezistențele R și x.

Indicație. Ținînd seamă că porțiunea AEB are rezistența egală cu $R - x$, se obțin ecuațiile

$$R^2 = 480\,x$$

$$3\,(2R - x)^2 = 2\,560\,x$$

de unde rezultă două soluții

$$R' = 321\ \Omega, \quad x' = 214{,}7\ \Omega, \quad R'' = 1\,599\ \Omega \quad \text{si} \quad x'' = 5\,327\ \Omega.$$

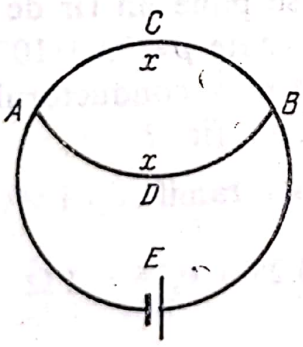


Fig. 171

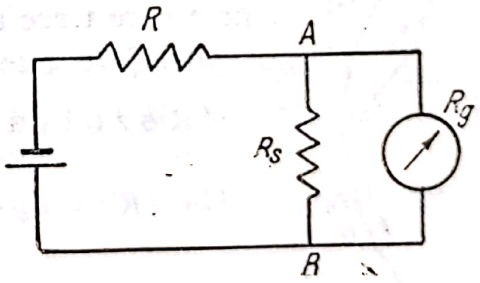


Fig. 172

4.64. Circuitul unui element Daniell a cărui t.e.m. este $e = 1$ V, cuprinde o rezistență $R = 99\ \Omega$, iar între două puncte A și B (fig. 172) cuprinde o

derivație compusă dintr-un galvanometru de rezistență R_g și un fir de rezistență R_s. Rezistența echivalentă între A și B este egală cu 1 Ω.

Știind că galvanometrul este parcurs de un curent cu intensitatea de $1/2 \cdot 10^4$ A, să se determine R_g și R_s.

Rezolvare. Curentul total în circuit este

$$I = \frac{e}{R + \dfrac{R_g R_s}{R_g + R_s}} = \frac{1}{99 + 1} = \frac{1}{100}\ \text{A}.$$

Din relația

$$\frac{R_g R_s}{R_g + R_s} = 1, \quad \text{rezultă} \quad R_g R_s = R_g + R_s.$$

Curentul în galvanometru este

$$i_g = \frac{R_s}{R_g + R_s} I = \frac{1}{R_g} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$$

de unde rezultă $R_g = 200\,\Omega$ și $R_s = \dfrac{200}{199}\,\Omega$.

4.65. Un conductor ramificat ca în fig. 173 unește două puncte A și B între care se menține o diferență de potențial de 5 V. Rezistențele diferitelor porțiuni ale circuitului sînt: $r_1 = 1\ \Omega$; $r_2 = 3\ \Omega$; $r_3 = 4\ \Omega$ și $r_4 = 0{,}25\ \Omega$. Se cer:

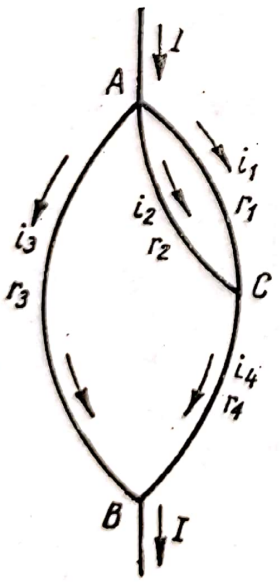


Fig. 173

a) Intensitățile i_1, i_2, i_3 și i_4 din ramificații. b) În locul conductorului ramificat se pune un fir de aluminiu de 1 mm² secțiune și rezistivitate $\rho = 0{,}03 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}$ prin care trece același curent ca prin conductorul ramificat. Care este lungimea acestui fir ?

Rezolvare. a) Rezistența ramificației ACB este

$$R_1 = r_4 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}25 + 0{,}75 = 1\,\Omega.$$

Intensitatea întregului circuit este

$$I = \frac{U}{R} = \frac{1}{R} \cdot U = \frac{r_3 + R_1}{r_3 R_1} \cdot U = 6{,}25\,\text{A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația $i_3 r_3 = U$, rezultă $i_3 = 1{,}25$ A. În nodul B avem $i_3 + i_4 = I$, de unde rezultă $i_4 = 5$ A. Pentru ramificațiile r_1 și r_2 putem scrie

$$r_1 i_1 = r_2 i_2 \quad \text{și} \quad i_4 = i_1 + i_2$$

de unde rezultă $i_1 = 3{,}75$ A și $i_2 = 1{,}25$ A.

b) Rezistența firului fiind egală cu a conductorului ramificat, vom avea

$$l = \frac{1}{\rho} Rs = \frac{1}{0{,}03 \cdot 10^{-6}} \cdot$$

$$\cdot 0{,}8 \cdot 10^{-6} = 26{,}7 \text{ m}.$$

4.66. O instalație telegrafică cuprinde o baterie a cărei tensiune electromotoare este egală cu 50 V și rezistență interioară 15 Ω, un fir de linie de 80 Ω și un receptor de 5 Ω (fig. 174). Polul pozitiv al bateriei este pus în legătură cu pământul, a cărui rezistență o considerăm zero. La un moment dat intervine un accident pe linie stabilindu-se, între linie și pământ, între punctele M și T o rezistență necunoscută de x ohmi; se observă atunci că intensitatea curentului la postul transmițător este de 0,84 A, iar la postul receptor este de 0,084 A. Să se găsească poziția accidentului și rezistența x.

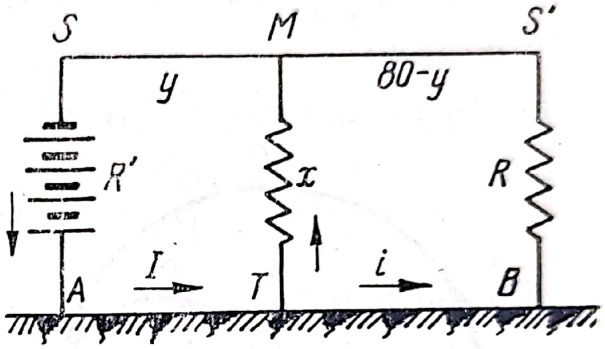


Fig. 174

(Adm. Școala Politehnică, Buc. 1942)

Rezolvare. Aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff circuitelor $ASS'B$ și $ASMT$, avem

$$E = I(R' + y) + i(80 - y + R), \tag{1}$$

$$E = I(R' + y) + (I - i)x, \tag{2}$$

unde I este curentul produs de baterie, iar R și R' sînt rezistențele receptorului și bateriei, y este rezistența liniei pe porțiunea cuprinsă între baterie și locul accidentului, iar i este curentul în receptor.

Din (1) scoatem $y = 40$ Ω, adică accidentul se află la jumătatea liniei. Din (2) rezultă $x = 5$ Ω.

4.67. Fie AB o porțiune dreaptă dintr-un conductor, construit dintr-un fir cilindric omogen (fig. 175). Un alt conductor ACB, în formă de semicerc cu diametrul AB, este construit din același material și, în sfîrșit, un al treilea conductor ODB, în formă de semicerc, cu diametrul OB, este construit la fel

ca și cele două dintîi. Un curent I vine prin A, străbate circuitul și iese prin B. Să se găsească raportul între intensitățile curentului care circulă în semicercul mic și cel mare.

Indicație. Se notează AB cu $2a$ și rezistența conductorilor pe metru liniar cu r. Făcînd compunerea rezistențelor și exprimînd curenții i_1 și i_3 în funcție de datele problemei găsim

$$i_1 = \frac{2(1+\pi)}{2+4\pi+\pi^2} I;\quad i_2 = \frac{\pi(\pi+2)}{2+4\pi+\pi^2} I;\quad \frac{i_3}{i_1} = \frac{\pi}{\pi+2}.$$

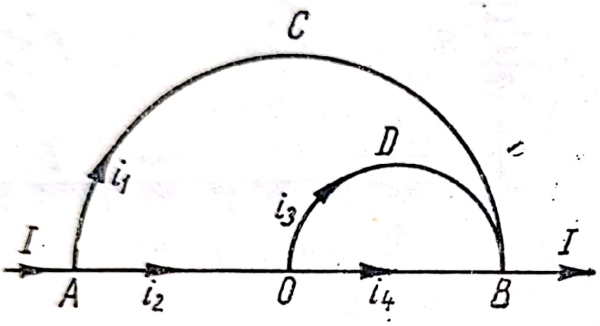


Fig. 175

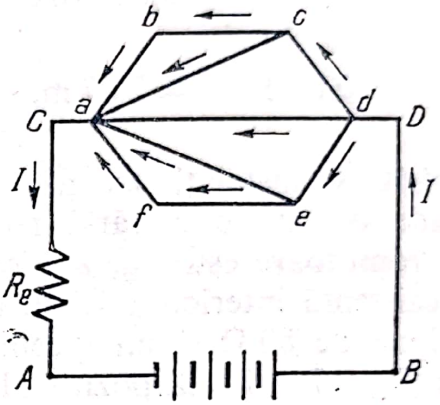


Fig. 176

4.68. Un circuit este alcătuit din nouă rezistențe egale, care formează laturile unui hexagon și diagonalele care pleacă din același vîrf (fig. 176). Circuitul este alimentat de o baterie de acumulatori cu t.e.m. $E = 110$ V și cu rezistența interioară $r_i = 2\,\Omega$, printr-o rezistență exterioară $R_e = 7\,\Omega$. Întregul circuit exterior al bateriei absoarbe o putere de 968 W. Se cere:

a) Curentul debitat de baterie. b) Puterea consumată în circuitul hexagonului. c) Tensiunea la bornele CD, care alimentează hexagonul. d) Mărimea rezistențelor care formează hexagonul. e) Curenții de alimentare a rezistențelor hexagonului.

R e z o l v a r e. a) Puterea circuitului exterior este

$$P = U_{AB} I = (E - r_i I) I.$$

Făcînd înlocuirile obținem ecuația

$$I^2 - 55 I + 484 = 0.$$

Rezolvînd ecuația se obțin soluțiile

$$I_1 = 11\,\text{A} \quad \text{și} \quad I_2 = 44\,\text{A}.$$

b) Puterea consumată de rezistența R_e este

$$P_e = R_e I_1^2 = 7 \cdot 11^2 = 7 \cdot 121 = 847 \text{ W}.$$

Valoarea lui $I_2 = 44$ A nu corespunde, dîndu-ne o putere mai mare decît 968.

Puterea consumată de circuitul hexagonului este

$$P = 968 - 847 = 121 \text{ W}.$$

c) $U_{CD} = E - I(R_e + r_i) = 110 - 11 \cdot 9 = 11 \text{ V}.$

d) Rezistența echivalentă a hexagonului rezultă din formula puterii

$$P = U_{CD} I = RI^2; \quad R = \frac{P}{I^2} = \frac{121}{121} = 1\,\Omega.$$

Dacă r este valoarea uneia dintre cele nouă rezistențe se poate scrie

$$R = \frac{5r}{11}, \quad r = \frac{11R}{5} = \frac{11 \cdot 1}{5} = 2{,}2\,\Omega.$$

e) Curentul care trece prin rezistența *ad* se obține din relația

$$U_{ad} = U_{CD} = r i_{ad}, \quad i_{ad} = \frac{11}{2{,}2} = 5 \text{ A}.$$

Pentru nodul *d* putem scrie

$$i_{ad} + 2i_{cd} = I, \quad i_{cd} = i_{de} = \frac{I - i_{ad}}{2} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \text{ A}.$$

Aplicînd legile lui Kirchhoff pentru bucla *abca* și nodul *c*, avem

$$i_{bc} + i_{ac} = i_{cd} = 3, \quad 2r \cdot i_{bc} = r \cdot i_{ac}.$$

Din aceste relații rezultă

$$i_{bc} = i_{ab} = i_{ef} = i_{af} = 1 \text{ A}, \quad i_{ac} = i_{ae} = 2 \text{ A}.$$

4.69. O cădere de apă cu înălțimea $H = 15$ m acționează un turbogenerator cu randamentul $\eta = 80\%$, care produce un curent $I = 200$ A sub tensiunea $U = 550$ V. Curentul este trimis în oraș la distanța $l = 50$ km pentru alimentarea tramvaielor. Știind că motorul tramvaiului are o putere de 50 kW, iar rezistența specifică a liniei de transport este $r = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \Omega/\text{km}$, se cere:

a) Debitul de volum și debitul de masă al căderii de apă. b) Tensiunea de alimentare a tramvaielor. c) Cîte tramvaie se pot pune simultan în circulație de la căderea de apă.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Puterea utilă a turbogeneratorului este egală cu $P_u = UI$, iar puterea consumată de la căderea de apă este

$$P_c = \frac{P_u}{\eta} = \frac{550 \cdot 1200}{0{,}80} = 825\,000 \text{ W} = 825 \text{ kW}.$$

Pe de altă parte, $P_c = Q_v \rho g H$, de unde rezultă

$$Q_v = \frac{P_c}{\rho g H} = \frac{825\,000}{1000 \cdot 10 \cdot 15} = 5{,}5 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_m = \rho Q_v = 5500 \text{ kg/s}.$$

b) Tensiunea de alimentare a tramvaielor este

$$U' = U - \Delta U = U - 2lrI = 550 - 2 \cdot 50 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^2 = 500 \text{ V}.$$

c) Numărul tramvaielor care pot fi puse simultan în mișcare este

$$n = \frac{U'I}{P'} = \frac{500 \cdot 200}{50\,000} = 2 \text{ tramvaie}.$$

23. Curentul electric prin lichide și gaze

a. Considerații teoretice

1. Legile lui Faraday pentru electroliză

$$m = kIt$$

$$k = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot A/n \text{ [kg/C]}$$

unde m este cantitatea de substanță depusă la catod în kg, k — echivalentul electrochimic al substanței, I — intensitatea curentului în amperi; t — timpul de trecere al curentului prin electrolit în secunde, A — greutatea atomică a substanței, n — valența substanței.

Ambele legi se pot pune și sub forma

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot I \cdot t = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \frac{A}{n} It \quad \text{[kg]}$$

unde $F = 96{,}521 \cdot 10^6$ C/echiv. kg este constanta lui Faraday.

2. Sarcina electrică a unui ion monovalent este

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

iar sarcina unui ion cu valența n este

$$q = ne = 1{,}602 \cdot 10^{-19} n \text{ [C]}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Sarcina oricărui ion este un multiplu întreg al sarcinii elementare e, care reprezintă cea mai mică sarcină electrică cunoscută.

3. La descărcarea electrică prin gaze, ionii pozitivi se deplasează spre catod, iar electronii liberi și ionii negativi spre anod.

4. Energia electronilor se măsoară în electronvolți (eV)

$$1\ \text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

5. Viteza electronilor în tuburile catodice se deduce din relația

$$\frac{m v^2}{2} = e U,$$

unde m este masa, v – viteza, e – sarcina electronului, iar U – diferența de potențial aplicată electronilor

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} U}.$$

Masa unui electron $m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-28}\ \text{g} = 9{,}108 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$.

b. Probleme

4.70. Într-un circuit se află cinci elemente Daniell în serie având t.e.m. 1,08 V și rezistența interioară 0,1 Ω fiecare și două voltametre în serie: unul cu soluție de H_2SO_4 și electrozi de cupru, altul cu soluție de sodă și electrozi de fier. Rezistența voltametrelor este de 1,4 Ω, iar celelalte părți ale circuitului au rezistențe neglijabile. La catodul voltametrului fier-sodă se adună în 20 minute 278 cm^3 de hidrogen. Știind că masa atomică a hidrogenului este 1 și a cuprului 64, iar un gram de hidrogen ocupă, în condiții normale de presiune și temperatură, un volum de 11 200 cm^3, se cere:

a) Intensitatea curentului în circuit. b) Tensiunea contraelectromotoare a voltametrelor. c) Cantitatea de cupru care se depune la catod.

Rezolvare. a) Hidrogenul adunat la catod va avea masa

$$m = 278 : 11\,200 = 0{,}0248\ \text{g} = 24{,}8\ \text{mg}.$$

Înlocuind pe m, A și t în formula lui Faraday, obținem

$$24{,}8 \cdot 10^{-6} = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{1} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{3} I$$

de unde rezultă $I = 2$ A.

Scanned with OKEN Scanner

b) Tensiunea contraelectromotoare (t.c.e.m.) se deduce din relația

$$I = \frac{5e - e'}{R + 5r}, \quad 2 = \frac{5 \cdot 1{,}08 - e'}{1{,}4 + 0{,}5}$$

de unde rezultă $e' = 1{,}6$ V.

c) Cantitatea de cupru depusă la catod este

$$m' = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{64}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{3} = 795 \cdot 10^{-6} \text{ kg.}$$

4.71. a) Un voltametru cu azotat de argint și electrozi de platină, avînd rezistența de 1,9 Ω și tensiunea contraelectromotoare de 1,2 V, este alimentat de la un acumulator avînd t.e.m. de 2,2 V și rezistența interioară de 0,1 Ω. a) Să se afle cantitatea de argint depusă în 30 min. b) Să se rezolve aceeași problemă dacă electrozii de platină se înlocuiesc prin plăci de argint, știind că prin această înlocuire rezistența voltametrului nu se schimbă.

(G. M. F., nr. 9/1956)

Rezolvare. a) Curentul care străbate circuitul, în acest caz, este

$$I = \frac{e - e'}{R + r} = \frac{2{,}2 - 1{,}2}{1{,}9 + 0{,}1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ A.}$$

Pentru argint avem $A = 107{,}88$, $n = 1$, deci

$$m = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{107{,}88}{1} \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{3} = 10^{-3} \text{ kg.}$$

b) Electrozii și metalul care se depune avînd aceeași natură, anodul se dizolvă în cantitate egală cu metalul depus la catod și nu avem tensiune contraelectromotoare.

Curentul care ia naștere este

$$I' = \frac{e}{R + r} = \frac{2{,}2}{2} = 1{,}1 \text{ A.}$$

Cantitatea de argint depusă este

$$m' = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{107{,}88}{1} \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{3} = 2{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ kg.}$$

4.72. Cît va costa energia electrică cheltuită pentru descompunerea unui kilogram de apă dacă $3{,}6 \cdot 10^{6}$ J costă 0,60 lei, iar curentul se ia de la rețeaua cu tensiunea de 120 V ? Rezistența aparatului fiind egală cu 2 Ω, care sînt curentul și timpul necesar descompunerii?

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Din descompunerea a 18 g apă rezultă 2 g hidrogen și 16 g oxigen, deci din descompunerea a 1 000 g de apă vor rezulta $m = 1\,000 \cdot 2/18 = 111{,}1$ g de hidrogen și din relația

$$m = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \frac{A}{n} It = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \frac{A}{n} Q$$

rezultă

$$Q = \frac{m \cdot n}{1{,}036 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A}} = \frac{111{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot 1} = 107{,}24 \cdot 10^{5}\ \mathrm{C}.$$

Pe de altă parte, energia consumată este

$$W = UIt = U \cdot Q = 120 \cdot 107{,}24 \cdot 10^{5} \approx 1{,}29 \cdot 10^{9}\ \mathrm{J},$$

iar costul energiei consumate este de 21,46 lei.

Intensitatea curentului și timpul de descompunere sînt

$$I = \frac{U}{R} = \frac{120}{2} = 60\,\mathrm{A},$$

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{10\,793\,938}{60} = 177\,566\,\mathrm{s} \approx 49\,\mathrm{h}.$$

4.73. La o fabrică electrometalurgică de cupru sînt instalate în serie 400 băi. În fiecare baie sînt instalați cîte 20 de catozi în paralel, fiecare catod avînd dimensiunile de 1 000 × 800 mm. Densitatea curentului fiind egală cu 200 A/m², să se găsească producția de cupru zilnică.

Rezolvare. Curentul care circulă prin băi este egal cu $I = 0{,}8 \cdot 200 = 160$ A, iar cantitatea de cupru depusă în 12 ore, adică în $12 \cdot 3600 = 43\,200$ s, va fi

$$m = 400 \cdot 20 \cdot 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{63{,}57}{1} \cdot 160 \cdot 43\,200 = 36{,}400\ \mathrm{kg}.$$

4.74. Doi acumulatori electrici au fiecare o t.e.m. egală cu 2 V și o capacitate de $2{,}88 \cdot 10^{5}$C. Se cere să se calculeze timpul necesar și cantitatea de nichel depusă într-o baie electrolitică cu rezistența $R = 0{,}5\ \Omega$ (inclusiv rezistența interioară a acumulatorilor) folosind toată energia acumulatorilor atunci cînd:

a) Acumulatorii se leagă în serie. b) Acumulatorii se leagă în paralel. c) Să se calculeze cantitatea de nichel depusă în cinci ore de descărcare, masa atomică a nichelului fiind $A = 27$, iar valența $n = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) În acest caz, curentul care trece prin circuit este

$$I = \frac{2e}{R} = \frac{4}{0{,}5} = 8\,\text{A}.$$

Capacitatea fiecărui acumulator fiind egală cu 288 000 C, avem

$$Q = 288\,000 = It = 8\,t$$

de unde rezultă $t = 36\,000$ s, iar

$$m = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{27}{3} \cdot 288\,000 = 0{,}0268 \text{ kg}.$$

b) Curentul prin circuit este

$$I' = \frac{e}{R} = \frac{2}{0{,}5} = 4\,\text{A},$$

iar cantitatea de electricitate scursă prin baie

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2 \cdot 288\,000 = 576\,000 = I't'$$

de unde rezultă $t' = 40$ ore.

Cantitatea de nichel depusă este

$$m' = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{27}{3} \cdot 576\,000 = 0{,}0536 \text{ kg}.$$

c) Cantitatea de nichel depusă în 5 ore, adică în $5 \cdot 3\,600 = 18\,000$ s, în cele două cazuri de legare a acumulatorilor, va fi

$$m_1 = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{27}{3} \cdot 8 \cdot 18\,000 = 0{,}0134\,\text{kg} = 13{,}4\,\text{g},$$

$$m_1' = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{27}{3} \cdot 4 \cdot 18\,000 = 0{,}0067\,\text{kg} = 6{,}7\,\text{g}.$$

4.75. Circuitul din fig. 177 are rezistența totală $R_t = 5{,}5\ \Omega$ și este conectat la o rețea de curent continuu cu tensiunea $U = 220$ V. Rezistența R este introdusă într-un vas în care se află 1 kg de gheață la temperatura $t_0 = -10$ °C. Se cere:

a) Valoarea rezistenței R. b) Timpul necesar trecerii curentului pentru topirea completă a gheții. Se dau: căldura specifică a gheții: $c = 2090$ J/kg·grd, căldura ei de topire, $l = 334{,}4 \cdot 10^3$ J/kg, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $R_4 = 3\ \Omega$ și $R_5 = 10\ \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

R e z o l v a r e. a) Înlocuind triunghiul *ABD* (fig. 177, *a*) prin stea, obținem circuitul echivalent din fig. 177, *b* în care avem

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6 + 10} = 1{,}2\ \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{4 \cdot 10}{4 + 6 + 10} = 2\ \Omega,$$

$$R_D = \frac{R_3 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{6 \cdot 10}{4 + 6 + 10} = 3\ \Omega.$$

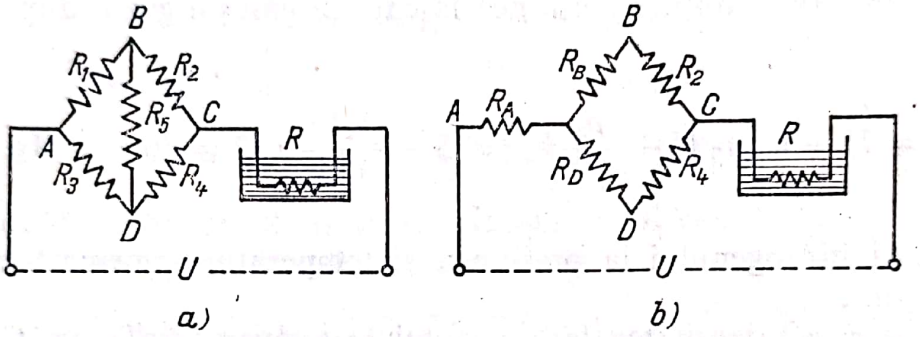


Fig. 177

Rezistența echivalentă a circuitului *ABCD* este egală cu

$$R_e = R_A + \frac{(R_B + R_2)(R_D + R_4)}{(R_B + R_2) + (R_D + R_4)} = 1{,}2 + \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 1{,}2 + 2{,}4 = 3{,}6\ \Omega,$$

$$R = R_t - R_e = 5{,}5 - 3{,}6 = 1{,}9\ \Omega.$$

b) Curentul care trece prin circuit este

$$I = \frac{U}{R_t} = \frac{220}{5{,}5} = 40\ \text{A}.$$

Căldura produsă de rezistența R și consumată pentru topirea gheții este

$$Q = RI^2 t = mct_0 + ml = m\,(ct_0 + l).$$

Din această ecuație rezultă

$$t = \frac{m(ct_0 + l)}{RI^2} = \frac{2090 \cdot 10 + 334{,}4 \cdot 10^3}{1{,}9 \cdot 1600} = 117\ \text{s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.76. Un curent electric trecînd prin apă acidulată cu densitatea $\rho = 1130$ kg/m³ produce 150 cm³ de gaz detonant ($2H_2 + O$) în timp de 3 min. La sfîrșitul experienței, nivelul apei din voltametru a coborît cu 12 cm față de nivelul din exterior. În timpul experienței, presiunea atmosferică a fost de 10^5 N/m², iar temperatura de 20 °C. Știind că densitatea mercurului este de $13{,}56 \cdot 10^3$ kg/m³, se cere să se afle intensitatea curentului electric care a trecut prin voltametru.

R e z o l v a r e. Gazul detonant fiind compus din două volume de hidrogen și unul de oxigen, după descompunere vor rezulta 100 cm³ de hidrogen și 50 cm³ de oxigen.

Exprimînd presiunea atmosferică și presiunea hidrostatică a coloanei de lichid de 12 cm Hg se obține presiunea la care se găsește gazul după descompunere

$$p = H + h_m = H + \frac{\rho_a}{\rho_m} h_a = 75 + \frac{1{,}13}{13{,}6} \cdot 12 = 76 \text{ cm Hg.}$$

Densitatea hidrogenului la presiunea și temperatura normală este $\rho_0 = 0{,}089$ kg/m³.

Întrucît $p = p_0$, densitatea hidrogenului la temperatura t, va fi

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t} = 89 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{273}{293} = 8{,}29 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3 \cdot$$

Masa hidrogenului este $m = V\rho = 10^{-4} \cdot 8{,}29 \cdot 10^{-2} = 8{,}29 \cdot 10^{-6}$ kg = = 8,29 mg.

Intensitatea curentului, care trece prin voltametru este

$$I = \frac{m}{kt} = \frac{8{,}29 \cdot 10^{-6}}{1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}8 \cdot 10^2} = \frac{8{,}29}{1{,}865} = 4{,}44 \text{ A.}$$

4.77. Se consideră un circuit format din două rezistențe $R_1 = 30$ și $R_2 = 20$ Ω, montate în paralel, alimentate de o baterie cu t.e.m. $E = 90$ V și rezistența interioară $r = 6$ Ω. Să se afle:

a) Rezistența R a grupării constituită de R_1 și R_2. b) Rezistența totală a circuitului. c) Intensitatea curentului în circuitul principal. d) Cantitatea de căldură dezvoltată de R_1 într-o oră. e) Presupunînd că R_2 reprezintă un voltametru cu azotat de argint, să se afle cantitatea de argint depusă la catod în același interval de timp, echivalentul electrochimic al argintului fiind $k = 1{,}118$ mg/C.

(Olimpiada de fizică, Iași, 1955)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

a) $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{30 \cdot 20}{30 + 20} = \dfrac{600}{50} = 12\,\Omega.$

b) $R_t = r + R = 6 + 12 = 18\,\Omega.$

c) $I = \dfrac{E}{R_t} = \dfrac{90}{18} = 5\,\text{A}.$

d) Curentul care trece prin R_1 este

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{20}{50} \cdot 5 = 2\,\text{A}$$

iar cantitatea de căldură

$$Q = R_1 I_1^2 t = 30 \cdot 4 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 = 432\,000\,\text{J}.$$

e) Curentul care circulă prin R_2 este egal cu $I_2 = I - I_2 = 5 - 2 = 3$ A, iar cantitatea de argint depusă la catod, va fi

$$m = kI_2 t = 1{,}118 \cdot 3 \cdot 3600 = 12\ \text{g} = 12 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}.$$

4.78. Un element galvanic cu t.e.m. de 1,8 V se leagă în serie cu o altă sursă de curent cu t.e.m. de 1,2 V și rezistență interioară de 0,5 Ω. Rezistența circuitului exterior este de 1,5 Ω, iar intensitatea curentului este de 1 A. Să se afle la ce adîncime sînt cufundați electrozii elementului galvanic în soluție de H_2SO_4, știind că distanța dintre electrozi este 5 cm, lățimea unui electrod 2,5 cm și rezistivitatea soluției $\rho = 0{,}026\ \Omega \cdot \text{m}$.

(R. M. F., nr. 12/1952)

Rezolvare. Calculăm rezistența elementului galvanic din formula

$$I = \frac{e_1 + e_2}{R + r + x} = \frac{1{,}8 + 1{,}2}{1{,}5 + 0{,}5 + x} = 1$$

de unde rezultă $x = 1\ \Omega$.

Pe de altă parte

$$x = \rho \frac{l}{S}, \quad S = \frac{\rho l}{x} = \frac{0{,}026 \cdot 0{,}05}{1} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 = 13\ \text{cm}^2.$$

Dacă e este lățimea unui electrod, iar h adîncimea, avem

$$h = \frac{S}{e} = \frac{13}{2{,}5} = 5{,}2\ \text{cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.79. Descărcarea unei baterii de acumulatori electrici a durat 12 ore și cu ajutorul curentului debitat s-a depus într-un voltametru cu azotat de argint o cantitate de 241,488 g argint, rezistența aparatului și a firelor de legătură cu bateria fiind egală cu 3,6 Ω, iar echivalentul electrochimic al argintului $K = 1{,}118 \cdot 10^{-6}$ kg/C. Încărcarea bateriei a durat 15 ore sub tensiunea de 20 V, necesitînd o putere de 200 W. Să se calculeze: randamentul bateriei, intensitatea curenților la încărcare și descărcare și capacitatea acumulatorilor.

Rezolvare. Intensitatea curentului la descărcare este dată de relația

$$241\,488 \cdot 10^{-3} = 1{,}118 \cdot 10^{-6} \cdot I_2 \cdot 12 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3$$

de unde rezultă $I_2 = 5$ A.

Intensitatea curentului la încărcare se deduce din relația

$$P = U_1 I_1; \quad 200 = 20 I_1$$

de unde rezultă $I_1 = 10$ A.

Capacitatea acumulatorilor este

$$Q = I_2 t_2 = 5 \cdot 12 \cdot 3600 = 216\,000 \text{ C.}$$

Tensiunea bateriei la descărcare este

$$U_2 = RI_2 = 3{,}6 \cdot 5 = 18 \text{ V}$$

iar randamentul bateriei

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{U_2 I_2 t_2}{U_1 I_1 t_1} = \frac{18 \cdot 5 \cdot 12}{20 \cdot 10 \cdot 15} = 0{,}36 \text{ sau } 36\%.$$

4.80. Într-o instalație avem două derivații. Pe prima derivație se află o baie electrolitică și pe a doua un motor electric. Baia electrolitică are rezistența de 300 Ω, în ea aflîndu-se o soluție de $CuSO_4$ cu rezistivitatea $\rho = 31{,}3$ Ω·m. Motorul are un randament de 90%. În circuitul principal avem o tensiune $U = 100$ V și o intensitate $I = 2$ A. Se cere:

a) Cantitatea de cupru care se depune într-o oră la catod. b) Distanța dintre electrozi, dacă secțiunea acestora este de 1 000 mm². c) Ce putere furnizează motorul ?

(R.M.F., nr. 7/1952)

Rezolvare. a) Curentul care trece prin baie este

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \text{ A.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cantitatea de cupru depusă este

$$m = kIt = 3{,}294 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3600 = 3{,}95 \cdot 10^{-4} \text{ kg} = 0{,}395 \text{ g}.$$

b) Distanța dintre electrozi este

$$d = \frac{R \cdot S}{\rho} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{31{,}3} = 9{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 9{,}6 \text{ mm}.$$

c) Curentul care trece prin motorul electric este

$$I_2 = I - I_1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \text{A}.$$

Puterea absorbită de motor este

$$P_a = UI_2 = 100 \cdot \frac{5}{3} = 166{,}66 \text{ W} = 0{,}167 \text{ kW}.$$

Puterea furnizată de motor este

$$P_u = \eta P_a = 0{,}90 \cdot 0{,}167 = 0{,}15 \text{ kW}.$$

4.81. Într-o instalație se găsesc, în serie, un dinam cu puterea de 4416 W și cu rezistența de 3 Ω și o baie electrolitică cu rezistența de 1,5 Ω, în care se găsește o soluție de $CuSO_4$. Dinamul avînd randamentul de 94%, să se afle: a) Tensiunile la bornele dinamului, la bornele băii electrolitice cum și tensiunea întregului circuit. b) Cantitatea de cupru depusă la catod în timp de o oră.

Rezolvare. a) Puterea utilă furnizată de dinam este

$$P_u = 4416 \text{ W}.$$

Puterea absorbită de dinam de la rețea este

$$P_a = \frac{P_u}{\eta} = \frac{4416}{0{,}94} = 4700 \text{ W}.$$

Dacă tensiunea la bornele dinamului este U_1, tensiunea la bornele băii U_2, tensiunea circuitului U și curentul I, avem

$$P_a = U_1 I = \frac{U_1^2}{R_1}$$

de unde rezultă $U_1 = \sqrt{4700 \cdot 3} = 118{,}5$ V.

Curentul în circuit este

$$I = \frac{P_a}{U_1} = \frac{4700}{118,5} = 39,5\,\text{A}.$$

Tensiunea la bornele băii electrolitice este

$$U_2 = R_2 I = 2,5 \cdot 39,5 = 98,75\ \text{V}.$$

Tensiunea întregului circuit este

$$U = U_1 + U_2 = 118,5 + 98,75 = 217,25\ \text{V}.$$

b) Cantitatea de cupru depusă se deduce din relaţia

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot It = 1,036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{63,57}{2} 39,5 \cdot 3600 = 0,04642\,\text{kg} = 47,42\,\text{g}.$$

4.82. Se dă circuitul din fig. 178 care cuprinde: o baterie electrică P, compusă din 12 elemente dispuse în trei serii a cîte patru elemente, fiecare element avînd o t.e.m. de 2 V şi o rezistenţă $r = 0,3\ \Omega$, o rezistenţă de $1\ \Omega$ cufundată în 400 g petrol lampant cu căldura specifică $c = 2093$ J/kg·grd şi care, traversată de curent timp de 4 min şi 10 s, ridică temperatura petrolului cu 1,2 °C, un voltametru V, cu apă acidulată, în derivaţie cu un motor M. Voltametrul are o t.c.e.m. $e_1 = 1,4$ V şi o rezistenţă interioară $r_1 = 3,8\ \Omega$, iar motorul are rezistenţa $r_2 = 1,2\,\Omega$. Rezistenţa firelor de legătură fiind neglijabilă, se cere:

a) Diferenţa de potenţial la bornele CD ale voltametrului şi motorului. b) Cantitatea de hidrogen care se degajă în timp de 16 min şi 5 s în voltametru. c) T.c.e.m. a motorului şi puterea acestuia.

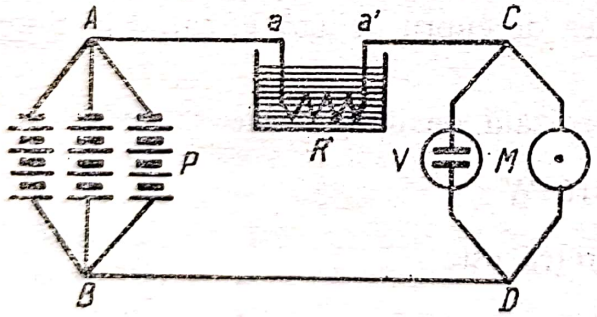


Fig. 178

Rezolvare. a) T.e.m. a bateriei, $E = 4e = 4 \cdot 2 = 8$ V, iar rezistenţa echivalentă a acesteia, $r_e = 0,4\ \Omega$. Rezistenţa cufundată în petrol $R = 1\ \Omega$.

Intensitatea curentului principal se deduce din relaţia

$$0,4 \cdot 2\,093 \cdot 1,2 = I^2 \cdot 1 \cdot 250\ ;\ I = 2\ \text{A},$$

$$U_{CD} = E - I(R + r_e) = 8 - 2(1 + 0,4) = 5,2\ \text{V}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Curentul care trece prin voltametru

$$i_1 = \frac{U_{CD} - e_1}{r_1} = \frac{5{,}2 - 1{,}4}{3{,}8} = 1\,\text{A}.$$

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot It = 1{,}036 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1{,}008}{1} \cdot 1 \cdot 965 \approx 1{,}008 \cdot 10^{-5}\,\text{kg} = 10{,}08\,\text{mg}.$$

c) Curentul care trece prin motor, $i_2 = I - I_1 = 1$ A, iar t.c.e.m. a motorului, $e_2 = U_{CD} - r_2 i_2 = 4$ V.

$$P = e_2\, i_2 = 4 \cdot 1 = 4\text{W}.$$

4.83. Circuitul din fig. 179 cuprinde: o baterie de elemente în serie, avînd fiecare o t.e.m. de 1,7 V și o rezistență interioară $r = 0{,}2\ \Omega$, o rezistență $R = 2\ \Omega$ și un număr de 11 lămpi în derivație avînd fiecare o rezistență de 3 Ω. În derivație cu circuitul lămpilor se află, în serie, rezistența r_1 cufundată într-un vas cu apă și voltametrul V cu soluție de sulfat de cupru. Cînd prin ramificația voltametrului trece un curent electric timp de 50 min și 15 s, vasul cu apă acumulează o cantitate de căldură de 15,150 J, iar la catodul voltametrului se depun 0,50 g de cupru. Știind că tensiunea dintre punctele C și D este egală cu 11 V și rezistența firelor de legătură este neglijabilă, greutatea atomică a cuprului (metal bivalent) este 64, iar pentru eliberarea unui gram de hidrogen sînt necesari 96 480 C, se cere:

a) Valoarea rezistenței r_1 din vasul cu apă și a rezistenței r_2 a voltametrului. b) Numărul elementelor care compun bateria. c) Cantitatea de apă din vas știind că, în timpul trecerii curentului, temperatura apei crește de la 15 la 24°C.

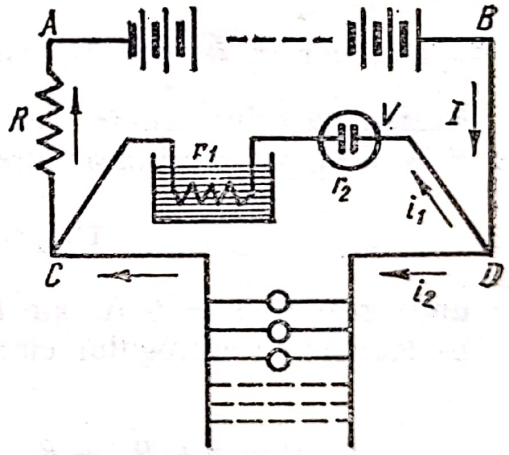


Fig. 179

Rezolvare. a) Curentul prin ramificația voltametrului este $i_1 = 0{,}5$ A, iar rezistența $r_1 = 20\ \Omega$. Din relația

$$U_{CD} = i_1 (r_1 + r_2)$$

rezultă $r_2 = 2\ \Omega$.

b) Rezistența lămpilor fiind egală cu 11/3 Ω rezultă curentul $i_2 = 3$ A, iar curentul total

$$I = i_1 + i_2 = 3{,}5\ \text{A}.$$

Din relația $U_{CD} = ne - I(R + nr)$, unde n este numărul elementelor iar r rezistența unui element, rezultă $n = 18$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Cantitatea de apă este $m = 402$ g.

4.84. Circuitul din fig. 180 este format dintr-o baterie de n elemente în serie avînd rezistența totală de 4 Ω; rezistențele în serie sînt egale: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 2$ Ω, rezistențele derivație sînt și ele egale: $R_7 = R_8 = 3$ Ω, și dintr-un voltametru cu sulfat de cupru și electrozi de cupru, avînd rezistența $R_9 = 2$ Ω. După 16 min și 5 s se depun la catod 0,32 g cupru. Se cere:

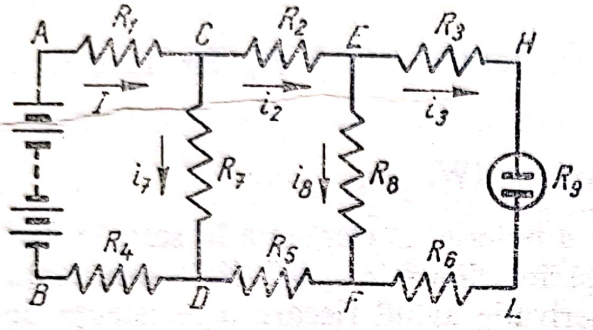


Fig. 180

a) Curentul total produs de baterie. b) Rezistența echivalentă a întregului circuit. c) Numărul elementelor care compun bateria, fiecare element avînd cîte 2 V.

Rezolvare. a) Din legea lui Faraday se calculează curentul care trece prin voltametru, $i_3 = 1$ A. Tensiunea la bornele $E-F$ este

$$U_{EF} = i_3 (R_3 + R_6 + R_9) = 6 = R_8 i_8$$

de unde rezultă

$$i_8 = 2 \text{ A}, \quad \text{iar} \quad i_2 = i_3 + i_8 = 3 \text{ A}.$$

Rezistența echivalentă a rezistențelor R_2, R_3, R_5, R_6, R_8 și R_9 este egală cu $R' = 6$ Ω, iar tensiunea între punctele CD este

$$U_{CD} = R' i_2 = 18 = R_7 i_7$$

de unde rezultă $i_7 = 6$ A, iar $I = i_2 + i_7 = 9$ A.

b) Rezistența întregului circuit este

$$R = 4 + R_1 + R_4 + \frac{R' R_7}{R' + R_7} = 8 + \frac{6 \cdot 3}{9} = 10 \text{ Ω}.$$

c) Din legea lui Ohm rezultă

$$E = RI = 10 \cdot 9 = 90 \text{ V}.$$

Numărul elementelor este

$$n = \frac{E}{e} = \frac{90}{2} = 45.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.85. Ionul de hidrogen apare la electroliză cu cea mai mică sarcină electrică cunoscută. Știind că un centimetru cub de hidrogen, în condiții normale de temperatură și presiune, conține $2{,}7 \cdot 10^{19}$ molecule, că densitatea hidrogenului este $\rho = 9 \cdot 10^{-2}$ kg/m^3, masa atomică a hidrogenului $A = 1{,}008$, iar constanta lui Faraday $F = 96{,}521 \cdot 10^6$ C/echiv. kg, se cere:

a) Masa particulei de hidrogen. b) Sarcina electrică a particulei. c) Energia minimă și diferența de potențial la care trebuie supus hidrogenul dintr-un tub pentru ionizarea gazului și accelerarea particulelor cu o viteză de $5{,}08 \cdot 10^4$ m/s. d) Dacă drumul liber mijlociu al particulelor de hidrogen este egal cu $\lambda = 10^{-2}$ cm, care este intensitatea cîmpului electric care poate produce ionizarea hidrogenului ?

R e z o l v a r e. a) Masa unui centimetru cub de hidrogen este

$$M = V\rho = 1 \cdot 9 \cdot 10^{-8} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ kg.}$$

Hidrogenul fiind biatomic, o moleculă a lui este formată din doi atomi și 1 cm^3 de hidrogen va avea

$$N = 2 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{19} = 5{,}4 \cdot 10^{19} \text{ atomi.}$$

Masa particulei de hidrogen va fi

$$m = \frac{M}{N} = \frac{9 \cdot 10^{-8}}{5{,}4 \cdot 10^{19}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

b) Cantitatea de electricitate (sarcina elementară) depusă prin electroliză de particula de hidrogen m este dată de legea lui Faraday

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot e$$

de unde rezultă

$$e = \frac{m \cdot F \cdot n}{A} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 96{,}521 \cdot 10^6 \cdot 1}{1{,}008} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

c) $$W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 25{,}80 \cdot 10^8 = 21{,}543 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

Diferența de potențial necesară rezultă din relația

$$W = Ue, \quad U = \frac{W}{e} = \frac{21{,}543 \cdot 10^{-19}}{1{,}596 \cdot 10^{-19}} = 13{,}54 \text{ V.}$$

d) $$E = \frac{U}{\lambda} = \frac{13{,}54}{10^{-4}} = 13{,}54 \cdot 10^4 \text{ V/m.}$$

Scanned with OKEN Scanner

4.86. Două plăci electrizate, aflate la distanța $d = 5$ cm una de alta și sub diferența de potențial $U = 15\,000$ V, creează între ele un cîmp electric E. Ce viteză va căpăta un electron înainte de ciocnirea cu moleculele, dacă drumul liber mijlociu (drumul parcurs pînă la ciocnire) este $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m, sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, iar masa acestuia $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

Rezolvare. Potențialele electrice sub care se află electronul la distantele λ și d sînt

$$U_\lambda = E \cdot \lambda \quad \text{și} \quad U = E \cdot d.$$

Din aceste două relații se deduce

$$U_\lambda = \frac{\lambda}{d} \cdot U.$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, avem

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U_\lambda = e \cdot \frac{\lambda}{d} U.$$

Din această relație rezultă

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot U} = \sqrt{2 \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{-31}} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-2}} \cdot 15 \cdot 10^3} =$$

$$= 2{,}52 \cdot 10^5 \text{ m/s} = 252 \text{ km/s}.$$

4.87. Un fascicul de raze catodice trecînd printre armăturile unui condensator, care creează un cîmp electrostatic $E = 2 \cdot 10^4$ V/m, suferă o deviație. Să se calculeze mărimea acestei deviații știind că viteza razelor este $v = 6 \cdot 10^7$ m/s, lungimea armăturilor condensatorului, $l = 3 \cdot 10^{-2}$ m, sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, iar masa acestuia $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

Rezolvare. În timp ce trece printre armături cu viteza constantă v, electronul, care este supus unei forțe F, are și o mișcare uniform accelerată, perpendiculară pe direcția armăturilor și putem scrie

$$l = vt \quad \text{și} \quad S = \frac{at^2}{2}.$$

Eliminînd pe t între aceste ecuații obținem

$$S = \frac{1}{2} a \left(\frac{l}{v}\right)^2. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Accelerația a se deduce din relația

$$F = m\,a = q\,E = e\,E, \qquad a = \frac{eE}{m}.$$

Făcînd înlocuirile în (1) obținem deviația

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{e\,R}{m} \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^4}{9 \cdot 10^{-31}} \cdot \left(\frac{310^{-2}}{6 \cdot 10^7}\right)^2 =$$

$$= \frac{14{,}4 \cdot 10^{-19}}{324 \cdot 10^{-17}} = 0{,}044 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 0{,}44\ \text{mm}.$$

C. Electromagnetismul

24. Acțiuni electromagnetice, inducția electromagnetică, mașini electrice de curent continuu

a. Considerații teoretice

1. Permeabilitatea magnetică a unui mediu este dată de relația

$$\mu = \mu_0\,\mu_r$$

unde μ_0 este permeabilitatea vidului, iar μ_r — permeabilitatea relativă a mediului și se găsește în tabele.

Permeabilitatea vidului se măsoară în henry pe metru (H/m) și are valoarea

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H/m}.$$

2. Intensitatea cîmpului magnetic se măsoară în amperi pe metru (A/m).

3. Intensitatea cîmpului magnetic creat de un curent care trece printr-un conductor rectiliniu foarte lung, la distanța d de conductor este

$$H = \frac{I}{2\pi d}\ [\text{A/m}].$$

4. Intensitatea cîmpului magnetic în centrul unui cadru circular cu N spire (multiplicator) de rază r, este dată de relația

$$H = \frac{NI}{2r}\ [\text{A/m}].$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Intensitatea cîmpului magnetic în centrul unui solenoid (bobină cilindrică) parcurs de curentul I este dată de relația

$$H = \frac{NI}{l} \text{ [A/m]}.$$

unde N este numărul de spire, iar l — lungimea solenoidului.

6. Intensitatea cîmpului magnetic în interiorul unui tor (inel circular), este

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{NI}{2\pi r} \text{ [A/m]}$$

în care N este numărul de spire, iar r — raza medie a torului.

7. Inducția magnetică se măsoară în tesla (T) și este

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H \text{ [T]}$$

în care H se măsoară în [A/m], iar $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m].

8. Fluxul magnetic care trece prin suprafața S a cărei normală face un unghi α cu direcția cîmpului magnetic H, se măsoară în weberi [Wb] și este dat de relația

$$\Phi = \mu H S \cos \alpha \text{ [Wb]}.$$

9. Fluxul magnetic în centrul unui solenoid este dat de relațiile

$$\Phi = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} I \text{ [Wb]}$$

în care S este suprafața solenoidului, I — intensitatea curentului iar N — numărul de spire ale solenoidului de lungime l.

10. Fluxul magnetic care străbate o bobină se mai poate scrie

$$\Phi = \mu \frac{N^2 S}{l} \cdot I = LI \text{ [Wb]}.$$

Coeficientul L este *inductanța proprie a bobinei* și se măsoară în henry [H].

Inductanța proprie a unui solenoid este dată de relația

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} \text{ [H]}.$$

Inductanța proprie a unui tor este

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{2\pi r} \text{ [H]}$$

unde l este lungimea, iar r — raza medie a torului.

Scanned with OKEN Scanner

11. Forța electromagnetică care acționează asupra unui conductor de lungime l, situat într-un cîmp magnetic H și prin care trece un curent I, este un vector perpendicular pe planul format de direcția curentului și a cîmpului. Ea se măsoară în newtoni și este dată de relația

$$F = \mu H l I = \mu_0 \mu_r H l I \text{ [N]}.$$

12. Doi conductori rectilinii paraleli foarte lungi, situați la distanța d și parcurși de curenții I_1 și I_2, acționează unul asupra celuilalt pe lungimea l, cu forță electrodinamică dată de formula

$$F = \mu_0 \mu_r \frac{I_1 I_2 l}{2\pi d} \text{ [N]}.$$

13. Tensiunea electromotoare indusă într-o bobină cu N spire, este dată de relația

$$e = -\mu N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\mu_0 \mu_r N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \text{ [V]}$$

unde $\Delta \Phi$ este variația fluxului, iar Δt — timpul în care are loc această variație.

14. Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor liniar de lungime l, care se mișcă cu viteza v, într-un cîmp magnetic H, este dată de relația

$$e = -Blv = -\mu_0 \mu_r H l v \text{ [V]}.$$

15. Tensiunea electromotoare de autoinducție, care ia naștere într-un circuit de inductanță proprie L, este dată de relația

$$e = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

unde ΔI este variația intensității curentului care trece prin circuit, iar Δt — timpul în care are loc această variație.

16. Forța portantă a unui electromagnet în formă de potcoavă este

$$F = \frac{B^2 S}{\mu_0} \text{ [N]}$$

unde B este inductanța miezului, S — aria suprafeței unui pol, iar μ_0 — permeabilitatea magnetică a vidului, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Scanned with OKEN Scanner

17. Fluxul magnetic produs de o bobină cu N spire înfășurate pe un miez cu medii magnetice diferite este dat de relația

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{2}{\mu_2 S_2} + \cdots} = \frac{NI}{\sum \frac{l}{\mu S}} = \frac{F}{\mathfrak{R}}$$

unde l_1, l_2, ..., sînt lungimile, S_1 S_2 — secțiunile, μ_1, μ_2 — permeabilitățile mediilor, F este tensiunea magnetomotoare, iar $\mathfrak{R}$ — reluctanța circuitului.

18. Tensiunea electromotoare a unui generator electric este

$$E = n N \Phi$$

unde n este numărul de rotații pe secundă, N — numărul de spire ale indusului (rotorului), Φ — fluxul care străbate spirele indusului.

19. Tensiunea la bornele unui generator (dinam) este dată de relațiile:

a) Pentru generatorul cu excitația în serie

$$U = E - I(R_r + R_i).$$

b) Pentru generatorul cu excitația în derivație

$$U = E - I_r R_r = R_i \cdot I_i$$

unde R_r și R_i sînt rezistențele înfășurării rotorului și inductorului, iar I_r și I_i — curenții în rotor și inductor.

20. Tensiunea la bornele unui electromotor de curent continuu este dată de relațiile:

a) Pentru electromotorul cu excitația serie

$$U = E + I(R_r + R_i).$$

b) Pentru electromotorul cu excitația în derivație.

$$U = E + R_r I_r.$$

21. Randamentul electric și randamentul industrial ale unui dinam sînt

$$\eta_e = \frac{UI}{EI_r}, \quad \eta_i = \frac{P_u}{P_c} = \frac{UI}{P_c}.$$

22. Randamentul electric și randamentul industrial ale unui electromotor sînt

$$\eta_e = \frac{P_{indus}}{P_{cons}}, \qquad \eta_i = \frac{P_{produs}}{P_{cons}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b. Probleme

4.88. Prin doi conductori rectilinii și paraleli, situați la distanța $r = 10$ cm unul de altul, circulă doi curenți I_1 și I_2 de sens contrar. Rezultanta cîmpurilor magnetice create de cei doi curenți în exterior, la distanța $r_1 = 50$ cm de curentul cel mai slab, este zero iar rezultanta cîmpurilor magnetice create de cei doi curenți în exterior, la distanța $r_2 = r_1 = 50$ cm de cel mai puternic dintre curenți, este egală cu $11/3\pi$ amperi pe metru. Se cere:

a) Valoarea celor doi curenți. b) Rezultanta cîmpurilor la jumătatea distanței dintre cei doi conductori.

Rezolvare. a) Rezultanta celor două cîmpuri la distanțele r_1 și r_2 sînt date de relațiile

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{I_2}{r + r_1} - \frac{I_1}{r_1}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{I_2}{r_2} - \frac{I_1}{r + r_2}\right) = \frac{11}{3\pi}. \tag{2}$$

Făcînd înlocuirile obținem ecuațiile

$$5I_2 = 6I_1, \quad \frac{1}{2\pi}\left(\frac{I_2}{0{,}5} - \frac{I_1}{0{,}6}\right) = \frac{11}{3\pi}.$$

Rezolvînd aceste ecuații obținem $I_1 = 10$ A și $I_2 = 12$ A.

b) În acest punct vom avea

$$H = \frac{1}{\pi r}(I_1 + I_2) = \frac{22}{3{,}14 \cdot 0{,}1} = 70 \text{ A/m}.$$

4.89. Un circuit cuprinde în serie o baterie electrică E de rezistență interioară r egală cu 1 Ω, o rezistență R de 1,4 Ω și un cadru circular B, cu 10 spire și cu raza $r = 0{,}28$ m, avînd rezistența $R_1 = 8$ Ω. Planul cadrului este în planul meridianului magnetic. În derivație cu cadrul se pune o rezistență $R_2 = 2$ Ω. În centrul cadrului se află un ac magnetic, care, după stabilirea curentului, se rotește cu un unghi de 45° (fig. 181). Știind că proiecția orizontală a cîmpului magnetic terestru este $H' = 50/\pi$ A/m, să se calculeze:

a) Intensitățile curenților în cadru, în rezistența R_2 și în circuitul principal. b) Tensiunea electromotoare a bateriei.

Rezolvare. a) Cîmpul creat de cadru este

$$H = \frac{NI_1}{2r} = \frac{10I_1}{0{,}56}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Acul magnetic luînd direcția rezultantei celor două cîmpuri H și H', direcția lui este dată de

$$\frac{H}{H'} = \operatorname{tg}\alpha = 1 \quad \text{adica} \quad H = H'.$$

Rezultă $I_1 = 0{,}893$ A.
Exprimînd tensiunea dintre punctele A și B, avem

$$U_{AB} = I_1 R_1 = I_2 R_2, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_2} \cdot I_1 = \frac{8}{2} \cdot 0{,}893 = 3{,}572\,\text{A}.$$

Curentul total este .

$$I = I_1 + I_2 = 0{,}893 + 3{,}572 = 4{,}465\,\text{A}.$$

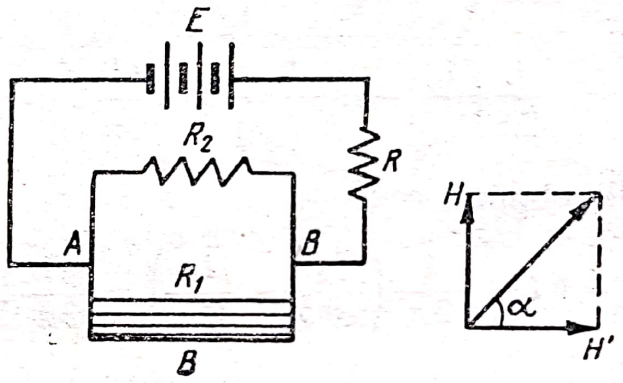


Fig. 181

b) Rezistența echivalentă a rezistențelor R_1 și R_2 este

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 8}{2 + 8} = 1{,}6\ \Omega.$$

Tensiunea electromotoare a bateriei este

$$E = I(R_{AB} + R + r) = 4{,}465\,(1{,}6 - 1{,}4 + 1) = 17{,}86\ \text{V}.$$

4.90. Un circuit-serie este format dintr-o rezistență de 20 Ω, o bobină cu 10^3 spire, cu lungimea de 12,56 cm și un voltametru cu soluție de $CuSO_4$ avînd electrozii din cupru. Bobina are miez de fier cu $\mu_r = 100$ și secțiunea de 50 cm². Rezistența se află într-un calorimetru cu capacitatea calorică neglijabilă, care conține 216 g apă la 20°C. Curentul transportă $9 \cdot 10^{20}$ ioni de cupru la catod și produce în bobină un flux de 8 Wb. Se cere:
a) Masa de cupru depus la catod. b) Intensitatea curentului. c) Timpul cît circulă curentul. d) Inducția magnetică a bobinei și inductanța bobinei.

e) La ce temperatură se încălzește apa. Se dau: masa atomică a cuprului 63,5 și numărul lui Faraday $F = 96{,}500 \cdot 10^6$ [C/echiv. kg].

(Olimpiada de fizică, 1965)

R e z o l v a r e. a) Valența cuprului fiind $n = 2$, cantitatea de electricitate depusă la catod este

$$q = n_1 ne = 9 \cdot 10^{20} \cdot 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 288 \text{ C},$$

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} q = \frac{1}{96{,}500 \cdot 10^6} \cdot \frac{63{,}5}{2} \cdot 288 = 9{,}48 \cdot 10^{-5} \text{ kg}.$$

b) $$\Phi = BNS = \mu HNS = \mu \frac{N^2 I}{l} S = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 S}{l} I,$$

$$I = \frac{\Phi l}{\mu_r \mu_0 N^2 S} = \frac{8 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-2}}{10^2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 1{,}6 \text{ A}.$$

c) $$t = \frac{q}{I} = \frac{288}{1{,}6} = 180 \text{ s}.$$

d) Inducția este

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l} = 10^2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10^3 \cdot 1{,}6}{12{,}56 \cdot 10^{-2}} = 1{,}6 \text{ T}.$$

Inductanța bobinei este

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{8}{1{,}6} = 5 \text{ H}.$$

e) Temperatura apei se deduce din relația

$$RI^2 t = mc \Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{RI^2 t}{mc} = \frac{20 \cdot 1{,}6^2 \cdot 180}{0{,}216 \cdot 4187} \approx 10{,}1^\circ \text{C}.$$

4.91. Prin trei vîrfuri ale unui pătrat cu latura de 10 cm trec trei curenți perpendiculari pe planul figurii. Curentul $I_1 = 251{,}2$ A are sensul dinspre figură spre noi. Ceilalți doi curenți au sensul opus lui I_1, și valorile $I_2 = 502{,}4$ A și $I_3 = 251{,}2$ A. Se cere:

a) Intensitatea cîmpului magnetic produs în al patrulea vîrf, opus lui I_2. b) Unghiul făcut de această intensitate cu diagonala pătratului. c) Forța electromagnetică care se exercită asupra unității de lungime a unui curent

Scanned with OKEN Scanner

$I = 200$ A rectiliniu, paralel cu ceilalți, de același sens cu I_1 și care trece prin al patrulea vîrf al pătratului (fig. 182). d) Ce devine această forță dacă I_1 și I_2 își schimbă sensul? Experiența se face în vid.

(R. F. Ch., nr. 2/1966)

Rezolvare

a) $$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r} = \frac{251{,}2}{2\pi \cdot 0{,}1} = 400\ \text{A/m},$$

$$H_3 = \frac{I_3}{2\pi r} = \frac{251{,}2}{2\pi \cdot 0{,}1} = 400\ \text{A/m}.$$

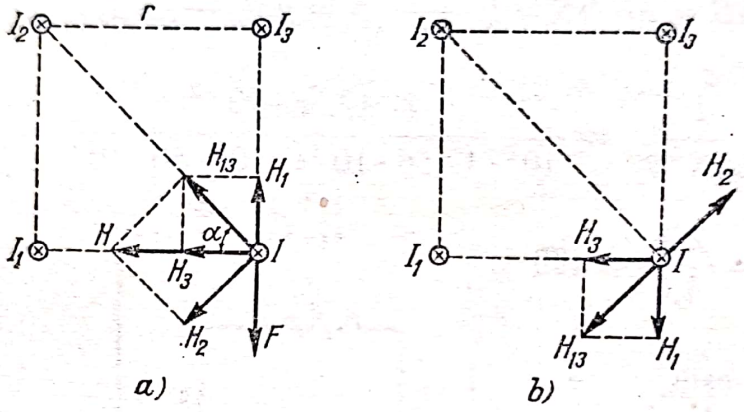


Fig. 182

Rezultanta acestor cîmpuri este

$$H_{13} = \sqrt{H_1^2 + H_3^2} = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot 10^4} = 400\sqrt{2}\ \text{A/m},$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi r\sqrt{2}} = \frac{502{,}4}{2\pi \cdot 0{,}1\sqrt{2}} = 400\sqrt{2}\ \text{A/m}.$$

Cîmpul produs în al patrulea vîrf este egal cu

$$H = \sqrt{H_{13}^2 + H_2^2} = \sqrt{2 \cdot 400^2 + 2 \cdot 400^2} = 800\ \text{A/m}.$$

b) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H_2}{H_{13}} = \frac{400\sqrt{2}}{400\sqrt{2}} = 1, \quad \alpha = 45°.$$

c) $F = BIl = \mu_0\mu_r HIl,$

$$\frac{F}{l} = \mu_0\mu_r HI = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800 \cdot 200 = 64\pi \cdot 10^{-3}\ \text{N/m}.$$

Direcția și sensul acestei forțe sînt arătate în fig. 182, *a*.

d) În acest caz, $H = 0$, $F = 0$.

Intensitățile cîmpurilor electromagnetice își păstrează valorile, iar sensul lor este arătat în fig. 182, *b*.

4.92. Un voltametru cu anod de Ag, care conține o soluție de $AgNO_3$, este legat în serie cu o rezistență de 25 Ω și cu o bobină lungă de 0,2 m cu 100 spire, avînd miezul de fier. Rezistența se află într-un vas care conține 0,5 l apă la temperatura de 18°C. Prin circuit trece un curent electric care transportă la catod $5 \cdot 10^{21}$ ioni de Ag, încălzește apa din vasul ce conține rezistența și produce în miezul de fier o inducție magnetică de 3,14 tesla. Se cere:

a) Cantitatea de Ag depusă la catod. b) Intensitatea curentului și timpul cît circulă. c) Pînă la ce temperatură se încălzește apa din vas? Se dă echivalentul electrochimic al Ag, 1,118 mg/C și sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C, iar permeabilitatea magnetică relativă a fierului este 800. Se neglijează capacitatea calorică a vasului.

(Olimpiada de fizică, 1961)

R e z o l v a r e. a) Numărul electronilor în mișcare corespunde cu numărul ionilor de argint. Valența argintului este egală cu 1, iar sarcina electrică va fi

$$q = ne = 5 \cdot 10^{21} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 8 \cdot 10^2 \text{ C}.$$

Masa de argint depusă la catod este

$$m = k \cdot q = 1{,}118 \cdot 8 \cdot 10^2 = 894{,}4 \text{ mg}.$$

b) Inducția magnetică a bobinei este

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l} = 800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{100\, I}{0{,}2} = 3{,}14 \text{ T}.$$

Din această relație rezultă

$$I = \frac{0{,}2 \cdot 3{,}14}{32 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-3}} = \frac{200}{32} = 6{,}25 \text{ A},$$

$$t = \frac{q}{I} = \frac{800}{6{,}25} = 128 \text{ s}.$$

c) $RI^2 t = mc(\theta - \theta_0)$,

$$\theta = \frac{RI^2 t}{mc} + \theta_0 = \frac{25 \cdot 6{,}25^2 \cdot 128}{0{,}5 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3} + 18 = 78^\circ\text{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.93. Doi solenoizi S_1 și S_2 ale căror centre coincid, cu axele perpendiculare și în același plan, au respectiv $N_1 = 4$ și $N_2 = 20$ spire pe centimetru, iar rezistențele lor $R_1 = 1\ \Omega$ și $R_2 = 100\ \Omega$. Capetele solenoizilor se unesc în derivație la bornele unei baterii electrice. În serie cu solenoidul S_1 se pune rezistența R. Un ac magnetic plasat în centrul O și supus numai cîmpurilor create de cei doi solenoizi face, la stabilirea curentului, un unghi $\alpha = 60°$ cu axa orizontală a solenoidului S_2. Să se calculeze R (fig. 183).

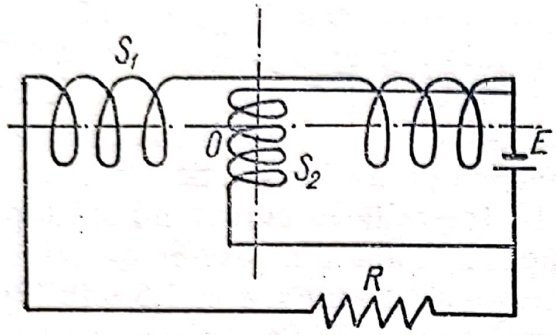


Fig. 183

Rezolvare. Acul magnetic, supus acțiunii celor două cîmpuri magnetice H_1 și H_2, va lua direcția rezultantei acestor cîmpuri și vom avea

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H_1}{H_2} = \sqrt{3}. \qquad (1)$$

Notînd cu i_1 și i_2 curenții care trec prin solenoizi, avem

$$H_1 = \frac{N_1 i_1}{l_1} = 400\, i_1, \quad H_2 = \frac{N_2 i_2}{l_2} = 2000\, i_2$$

valori care înlocuite în (1) ne dau relația

$$\frac{i_1}{i_2} = 5\sqrt{3}. \qquad (2)$$

R_1 și R fiind în serie putem scrie relația

$$U_{AB} = R_2 i_2 = (R_1 + R) i_1. \qquad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă $R = 10{,}53\ \Omega$.

4.94. În circuitul unei baterii cu t.e.m. de 4 V, se găsește o rezistență de 1,4 Ω și un solenoid cu rezistența de 8 Ω. Solenoidul are 100 spire, secțiunea de 25 cm² și o lungime de 6,28 cm. În paralel cu solenoidul se găsește montat un voltametru cu sulfat de cupru, avînd rezistența de 2 Ω. După închiderea circuitului, pe catodul voltametrului se depun 320 mg Cu în 20 min 50 s. Se cere:

a) Intensitatea curentului în ramurile circuitului. b) Intensitatea cîmpului magnetic în interiorul bobinei, fluxul care străbate bobina și inductanța proprie a solenoidului. c) Rezistența interioară a bateriei. (Echivalentul electrochimic al cuprului este $0{,}32 \cdot 10^{-6}$ kg/C.)

(Olimpiada de fizică, 1960)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Din legea lui Faraday rezultă intensitatea curentului în voltametru

$$I_1 = \frac{m}{kt} = \frac{320 \cdot 10^{-6}}{0{,}32 \cdot 10^{-6} \cdot 1250} = 0{,}8\,\text{A}.$$

Tensiunea la bornele comune ale voltametrului și solenoidului este

$$U_1 = R_1 I_1 = R_2 I_2 = 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6\,\text{V}.$$

Din această relație rezultă curentul care trece prin solenoid

$$I_2 = \frac{U_1}{R_2} = \frac{1{,}6}{8} = 0{,}2\,\text{A}.$$

Curentul total care trece prin circuit este

$$I = I_1 + I_2 = 0{,}8 + 0{,}2 = 1\,\text{A}.$$

b) $$H = \frac{NI_2}{l} = \frac{100 \cdot 0{,}2}{0{,}0627} = \frac{10^3}{\pi}\,\text{A/m},$$

$$\Phi = BS = \mu_0 HS = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10^3}{\pi} \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 10^{-6}\,\text{Wb},$$

$$L = \frac{\Phi}{I_2} = \frac{10^{-6}}{0{,}2} = \frac{1}{2 \cdot 10^5}\,\text{H}.$$

c) Rezistența interioară a bateriei rezultă din relația

$$I = \frac{E}{R_e + r}, \quad r = \frac{E}{I} - R_e = \frac{4}{1} - 3 = 1\,\Omega.$$

4.95. Pe un tor de fier cu secțiunea $S = 12{,}56$ cm² și cu diametrul mediu $D = 50$ cm, este înfășurată, spiră lîngă spiră, o bobină din fir de cupru cu diametrul firului, $d = 1{,}57$ mm. Dacă la capetele firului se aplică o tensiune $U = 2{,}2$ V, bobina este străbătută de un flux $\Phi = 16\pi \cdot 10^{-2}$ Wb. Rezistivitatea cuprului fiind $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-2}\ \Omega \cdot \text{m}$ se cere

a) Curentul care trece prin bobină. b) Inductanța proprie a bobinei. c) Permeabilitatea relativă a fierului. d) Cîmpul creat în interiorul bobinei.

Rezolvare. a) Numărul de spire se scoate din relația

$$N = \frac{\pi D}{d} = \frac{3{,}14 \cdot 50}{0{,}157} = 1000.$$

Scanned with OKEN Scanner

Diametrul unei spire este

$$d_s = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12{,}56}{3{,}14}} = 4 \text{ cm}.$$

Lungimea firului este

$$l = N \cdot \pi d_s = 1\,000 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 12\,560 \text{ cm} = 125{,}6 \text{ m} = 40\pi \text{ metri}.$$

Rezistența firului este

$$R = \rho \frac{l}{s} = \rho \frac{40\pi}{\frac{\pi d^2}{4}} = \rho \frac{160}{d^2} = 0{,}0170 \cdot \frac{160}{1{,}57^2} = \frac{2{,}72}{2{,}46} = 1{,}1\ \Omega.$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2{,}2}{1{,}1} = 1 \text{ A}.$$

b) $L = \dfrac{\Phi}{I} = \dfrac{16\,\pi \cdot 10^{-2}}{1} = 16\,\pi \cdot 10^{-2}$ H.

c) Inductanța proprie a bobinei se mai exprimă și sub forma

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{2\pi r} = 4\pi \cdot 10^{-7} \mu_r \frac{N^2 S}{2\pi r}.$$

Din această relație rezultă

$$\mu_r = \frac{2\pi r L}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot N^2 S} = \frac{rL}{2 \cdot 10^{-7} N^2 S} =$$

$$= \frac{0{,}25 \cdot 16\pi \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{10^3}{2} = 500.$$

d) $H = \dfrac{NI}{l} = \dfrac{NI}{2\pi r} = \dfrac{1000 \cdot 1}{6{,}28 \cdot 0{,}25} = 637$ A/m.

4.96. Se consideră două bobine A și B. Bobina A este conectată la o sursă de curent continuu care dă o intensitate $I = \dfrac{10^2}{\pi^2}$ A. Să se calculeze:

a) Variația de flux care taie bobina B cînd în bobina A este întrerupt curentul, considerînd că în timpul în care are loc scăderea la zero a curentului bobina A este introdusă complet în B. b) În cît timp a avut loc această variație de flux, dacă valoarea maximă a curentului indus în bobina B este $I_{max} = 0{,}4$ A,

Scanned with OKEN Scanner

iar puterea consumată în circuitul exterior alcătuit dintr-o rezistență este $P = 640$ W, considerînd că I este constant și că neglijăm rezistența bobinei B.

c) Valoarea rezistenței din circuitul exterior al bobinei, energia și cantitatea de căldură degajată în ipoteza de mai sus. Se dau $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, $n = 1\,000$ spire, $r = 0{,}04$ m, $l = 0{,}4$ m.

(R. F. Ch., nr. 5/1966)

R e z o l v a r e. a) Pentru bobina cu lungimea l pe care se găsesc n spire, fluxul este dat de relația

$$\Phi = \mu \frac{n^2 SI}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{n^2 SI}{l}.$$

Mărimile variabile în această relație sînt n, S, l, I, iar variația de flux este formată din patru termeni pe care îi calculăm ținînd seamă că $\Delta n = n$, $\Delta S = nS$, $\Delta I = 0 - I = -I$, $\Delta l = l$, $S = \pi r^2 = 16\pi \cdot 10^{-4}$ m. Vom avea

$$(\Delta\Phi)_n = \mu \frac{SI}{l}[(n + \Delta n)^2 - n^2] = \mu \frac{SI}{l} \cdot 3n^2 = 3\Phi,$$

$$(\Delta\Phi)S = \mu \frac{n^2 I}{l}(S + \Delta S - S) = \mu \frac{n^2 I}{l} \cdot \Delta S = \frac{n^2 I}{l} nS = n\Phi,$$

$$(\Delta\Phi)I = \mu \frac{n^2 S}{l}(I + \Delta I - I) = \mu \frac{n^2 S}{l} \cdot \Delta I = -\mu \frac{n^2 S}{l} I = -\Phi,$$

$$(\Delta\Phi)l = \mu n^2 SI\left(\frac{1}{l + \Delta l} - \frac{1}{l}\right) = \mu n^2 SI\left(\frac{1}{2l} - \frac{1}{l}\right) = -\frac{1}{2}\Phi,$$

$$\Delta\Phi = \Phi\left(3 + n - 1 - \frac{1}{2}\right) = \Phi(n + 1{,}5) \approx n\Phi = \mu \frac{n^2 S}{l} I.$$

Făcînd înlocuirile, obținem

$$\Delta\Phi = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10^3 \cdot 16\pi \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-1}} \cdot \frac{10^2}{\pi 2} = 16 \cdot 10 = 160 \text{ Wb}.$$

Deoarece $R > R_B$ putem scrie

$$e = Ri \quad \text{și} \quad P = ei = Ri^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste relații rezultă

$$e = \frac{P}{i} = \frac{640}{4 \cdot 10^{-1}} = 16 \cdot 10^2 \text{ V}.$$

b) $e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, $\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{e} = \frac{16 \cdot 10}{16 \cdot 10^2} = \frac{1}{10}$ s.

c) $P = ei = Ri^2$, $R = \frac{P}{i^2} = \frac{640}{4^2 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^3\ \Omega$,

$$Q = W = P\Delta t = 640 \cdot 10^{-1} = 64 \text{ J}.$$

4.97. Să se determine acțiunea unui curent care trece printr-un conductor rectiliniu foarte lung xy, avînd intensitatea $I_1 = 2$ A, asupra unui dreptunghi situat în același plan cu I_1. Laturile dreptunghiului AD și BC sînt egale cu $a = 50$ cm și $AB = DC = h = 30$ cm. Depărtarea de la conductorul xy la latura AD este egală cu $d = x = 10$ cm. Dreptunghiul este parcurs de un curent $I_2 = 1$ A (fig. 184).

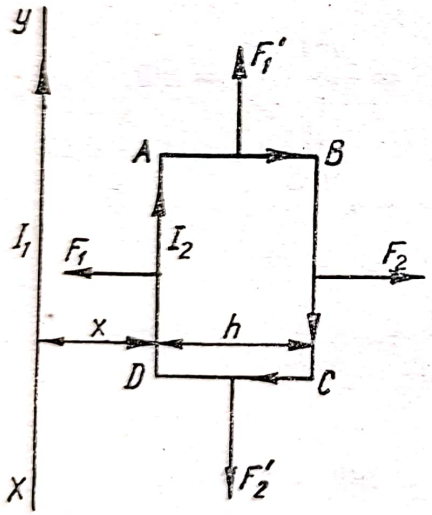


Fig. 184

Rezolvare. Latura AD prin care circulă un curent de același sens cu I_1 este acționată de forța

$$F_1 = 2 \cdot 10^{-7}\, \mu_r \cdot \frac{I_1 I_2 a}{d} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 0{,}50}{0{,}10} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

iar latura BC, prin care circulă un curent de sens contrar cu I_1, este acționată de forța

$$F_2 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \frac{I_1 I_2 a}{d + h} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 0{,}50}{0{,}40} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$$

Rezultanta acestor forțe este

$$F = F_1 - F_2 = 10^{-7}(20 - 5) = 15 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forțele produse de xy la mijlocul conductorilor AB și CD fiind egale și de sens contrar, acțiunea lor se anulează

$$F_1' = -F_2' = 2 \cdot 10^{-7} I_1 I_2 \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

unde ln este logaritmul natural.

4.98. Un cadru circular are 1 000 spire de 30 cm diametru; el este mobil în jurul unui ax vertical. Se așază cadrul într-o poziție inițială, astfel ca planul său să fie perpendicular pe planul meridianului magnetic; se învîrtește apoi foarte repede o dată în jurul axului vertical timp de 0,02 s. Se cere t.e.m. efectivă indusă în firul celor 1 000 spire ale căror capete sînt reunite. Componenta orizontală a cîmpului magnetic terestru este $H = 50/\pi$ [A/m].

Rezolvare. Dacă n este numărul spirelor cadrului, t.e.m. totală indusă în ele va fi

$$e = 4\pi \cdot 10^{-7} \mu_r \cdot n \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{t} \cdot$$

În starea inițială, cadrul este străbătut de fluxul $\Phi_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \mu_r H S$, iar după o jumătate de rotație, de fluxul $\Phi_2 = -4\pi \cdot 10^{-7} \mu_r HS$, astfel încît avem

$$e = 4\pi \cdot 10^{-7} \mu_r \cdot 2n \frac{HS}{t} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{45 \cdot 10}{8} = 45\pi \cdot 10^{-3} =$$

$$= 0{,}1413 \text{ V}.$$

4.99. O spiră circulară cu diametrul de 30 cm este plasată într-un plan vertical, într-un cîmp magnetic uniform a cărui intensitate este egală cu $10^2/2\pi$ [A/m]. Spira care este la început perpendiculară pe liniile de forță se rotește cu un unghi de 90°. Care este cantitatea de electricitate indusă în spiră știind că rezistența acestei spire și a galvanometrului care completează circuitul este de 2 Ω.

Rezolvare. Fluxul care străbate inițial spira are valoarea

$$\Phi_1 = \mu_0 \mu_r HS = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{10^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi d^2}{4} =$$

$$= 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{2} d^2 = 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 900 \cdot 10^{-4} = 4{,}5\,\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb}.$$

Cînd rotim spira cu 90°, aceasta nu mai taie nici o linie de forță, deci fluxul $\Phi_2 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Variația de flux va fi

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 4{,}5\,\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Wb}.$$

Cantitatea de electricitate indusă în spiră, este

$$Q = i\,\Delta t = \frac{e}{R}\,\Delta t = \frac{1}{R}\,\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot\Delta t =$$

$$= \frac{1}{R}\,\Delta\Phi = \frac{1}{2}\cdot 4{,}5\,\pi \cdot 10^{-7} = 7{,}065 \cdot 10^{-7}\ \text{C}.$$

4.100, Un electromagnet din fier, cu secțiunea pătrată, în formă de potcoavă, are dimensiunile indicate în fig. 185. Numărul de spire al înfășurării este $N = 200$, iar intensitatea curentului $I = 2$ A. Placa ce formează armătura este tot din același material și are secțiunea egală cu a electromagnetului. Dacă permeabilitatea relativă a materialului, $\mu_r = 200$, se cere:

a) Forța portantă a electromagnetului, b) Ce curent trebuie să treacă prin înfășurare pentru a atrage armătura, care este încărcată cu o sarcină $G = 196$ N și se află la distanța $d = 1$ mm de polii electromagnetului.

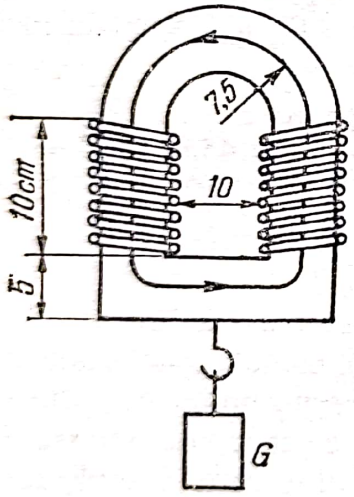


Fig. 185

Rezolvare. a) Dacă l este lungimea medie totală parcursă de fluxul magnetic, inducția e dată de relația

$$B = \mu_0\,\mu_r\,H = \mu_0\,\mu_r\,\frac{NI}{l}.$$

Înlocuind în formula forței portante, obținem

$$F = \frac{B^2\,S}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{S}\left(\frac{NI}{\Re}\right)^2 \qquad (1)$$

unde S este secțiunea unui pol, iar $\Re$ este reluctanța circuitului

$$\Re = \frac{l}{\mu_r\,S} = \frac{0{,}20 + 0{,}15 + 3{,}14 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 1{,}17.$$

Înlocuind în relația (1) se obține

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{25 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(\frac{400}{1{,}17}\right)^2 = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 117 \cdot 10^3 = 58{,}5\ \text{N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Permeabilitatea relativă a aerului fiind egală cu 1, reluctanța circuitului va fi, de data aceasta,

$$\mathfrak{R}' = \frac{l}{\mu_r S} + \frac{2d}{1 \cdot S} = 1{,}17 + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 1{,}97.$$

Din relația (1) rezultă

$$I' = \frac{\mathfrak{R}'}{N} \sqrt{\frac{F \cdot S}{\mu_0}} = \frac{1{,}97}{200} \sqrt{\frac{196 \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 6{,}15\,\text{A}.$$

4.101. Indusul (rotorul) unui generator de curent continuu cu excitația în serie are rezistența $R_r = 1{,}5\,\Omega$, diametrul $D = 20$ cm și lungimea $l = 25$ cm; pe el sînt înfășurate $N = 90$ spire. Indusul se rotește cu $n = 600$ rot/min în cîmpul produs de inductor. Rezistența inductorului, $R_i = 0{,}5\,\Omega$, iar inducția inductorului, $B = 3$ T. Se cere:

a) T.e.m. produsă de generator. b) Curentul și tensiunea de utilizare, dacă generatorul alimentează un circuit exterior cu rezistența $R_e = 16\,\Omega$. c) Cîte becuri cu rezistența a $240\,\Omega$ fiecare, montate în derivație poate să alimenteze generatorul. d) Care este puterea unui bec. e) Randamentul electric al generatorului.

Rezolvare.

a) $\Phi = BS = 3 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 15 \cdot 10^{-2}$ Wb,

$$E = nN\Phi = 10 \cdot 90 \cdot 15 \cdot 10^{-2} = 135\,\text{V}.$$

b) $$I = \frac{E}{R_r + R_i + R_e} = \frac{135}{1{,}5 + 0{,}5 + 16} = \frac{135}{18} = 7{,}5\,\text{A},$$

$$U = E - I(R_i + R_r) = 135 - 7{,}5 \cdot 2 = 120\,\text{V}.$$

c) Dacă R este rezistența unui bec, iar n' — numărul de becuri, avem

$$n' = \frac{R}{R_e} = \frac{240}{16} = 15 \text{ becuri}.$$

d) $$P_b = UI' = U \cdot \frac{I}{n} = 120 \cdot \frac{7{,}5}{15} = 60\,\text{W}.$$

e) $$\eta_e = \frac{U}{EI} = \frac{U}{E} = \frac{120}{135} \cdot 100 = 88{,}88\,\%.$$

4.102. Un dinam are o t.e.m. de 400 V și o rezistență interioară de $8\,\Omega$. Acest dinam alimentează un motor electric a cărui t.c.e.m. este de 210 V, iar

Scanned with OKEN Scanner

rezistența interioară de 6 Ω. Firul conductorului de legătură are o rezistență de 5 Ω. Se cere:

a) Care este intensitatea curentului cînd mașina a doua funcționează ca motor și care este puterea absorbită de motor? b) Care este energia calorică degajată într-o secundă în întreg circuitul, cînd ambele mașini sînt în mișcare? c) Care este energia calorică degajată într-o secundă în circuit, cînd motorul nu este în mișcare?

Rezolvare.

a) $I = \dfrac{E - E'}{R} = \dfrac{400 - 210}{19} = 10\,\text{A},$

$$W = E'I = 210 \cdot 10 = 2\,100\,\text{W}.$$

b) $Q = RI^2 = 19 \cdot 100 = 1\,900\,\text{W}.$

c) În acest caz, curentul în motor va fi

$$I' = \frac{E}{R} = \frac{400}{19} = 21{,}05\,\text{A},$$

$$Q' = RI'^2 = 19 \cdot 21{,}05^2 = 8\,400\,\text{W}.$$

4.103. Un dinam cu excitația în derivație (fig. 186) are t. e. m. E=120 V, rezistența indusului r=0,1 Ω, rezistența inductorului R=54 Ω și intensitatea curentului în indus $I_r = 120$ A. se cere:

a) Diferența de potențial la borne. b) Randamentul electric al dinamului.

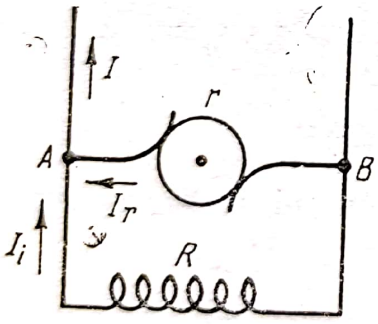


Fig. 186

Rezolvare.

a) $U = E - rI_r = 120 - 0{,}1 \cdot 120 = 108\,\text{V}.$

b) Curentul din inductor este

$$I_i = \frac{U}{R} = \frac{108}{54} = 2\,\text{A}.$$

Curentul debitat în exterior este

$$I = I_r - I_i = 120 - 2 = 118\,\text{A}.$$

Puterea utilă a dinamului este

$$P_u = UI = 108 \cdot 118 = 12\,744\,\text{W}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Puterea dezvoltată de indus este

$$P_a = EI_r = 120 \cdot 120 = 14\,400 \text{ W}.$$

Randamentul electric al dinamului este

$$\eta_e = \frac{P_u}{P_a} = \frac{12\,744}{14\,400} = 0{,}885 \quad \text{sau} \quad 88{,}5\%.$$

4.104. Un dinam are o t. e. m. $E_1 = 100$ V, cînd se învîrteşte cu $n_1 = 500$ rot/min. Punem dinamul în legătură cu o baterie de acumulatori care are o t. e. m. $E' = 60$ V; dinamul furnizează în acest caz o putere de 800 W. Rezistenta întregului circuit fiind egal cu $R = 2\ \Omega$, se cere:

a) Turaţia dinamului. b) Intensitatea curentului în circuit. c) Puterea consumată sub formă de căldură.

Rezolvare. a) T.e.m. a dinamului este dată de relaţia

$$E_1 = 100 = Nn\Phi = Kn_1 = 1500\ K. \tag{1}$$

Pus în legătură cu bateria, dinamul are t.e.m. egală cu E şi putem scrie

$$I = \frac{E - E'}{R} = \frac{E - 60}{2},$$

$$W = EI = \frac{E(E - 60)}{2} = 800 \text{ W}. \tag{2}$$

Din ecuaţia (2) obţinem $E = 80$ V.
Pe de altă parte ,avem

$$E = Kn = 80 \tag{3}$$

Din (1) şi (2) rezultă $n = 1200$ rot/min.

b) $$I = \frac{80 - 60}{2} = 10 \text{ A}.$$

c) $$P = RI^2 = 2 \cdot 100 = 200 \text{ W}.$$

4.105. Un dinam cu excitaţia în derivaţie încarcă 60 elemente ale unui acumulator. Rezistenţa r a indusului este de 1,5 Ω, rezistenţa R a inductorului este 60 Ω, rezistenţa r' a unui element este de 0,02 Ω, iar rezistenţa legăturilor neglijabilă.

a) Ştiind că t.e.m. la încărcare a unui element este egală cu 2,1 V, să se afle ce t.e.m. trebuie să ia naştere în indus pentru ca intensitatea curentului

Scanned with OKEN Scanner

de încărcare să fie de 15 A. b) Cureaua care acționează dinamul sărind de pe șaibă, acumulatorul debitează în dinam transformîndu-l în motor. Motorul continuînd să se învîrtească în sens invers, produce o t.c.e.m. egală cu 115 V. Care sînt în acest caz intensitățile curenților în indus, inductor și acumulator?

Rezolvare. a) Tensiunea la bornele dinamului este egală cu

$$U = ne + nr'I = n(e + r'I) = 60\,(2{,}1 + 0{,}02 \cdot 15) = 60 \cdot 2{,}4 = 144 \text{ V}.$$

Curentul în inductor este

$$I_i = \frac{U}{R} = \frac{144}{60} = 2{,}4 \text{ A}.$$

Curentul în indus este

$$I_r = I + I_i = 15 + 2{,}4 = 17{,}4 \text{ A}.$$

Tensiunea electromotoare a indusului va fi deci

$$E = U + rI_r = 144 + 1{,}5 \cdot 17{,}4 = 170{,}1 \text{ V}.$$

b) Notînd cu U' tensiunea la bornele motorului și cu I', I'_r, I'_i valorile curenților în circuitul exterior, în rotor și inductor, avem

$$U' = E' + rI'_r = 155 + 1{,}5\,I'_r = RI'_i = 60\,I'_i.$$

În acest caz, bateria debitează un curent în motor, deci tensiunea la bornele acestuia este mai mică decît t.e.m. a bateriei, adică

$$U' = E - nr'I' = 60 \cdot 2{,}1 - 60 \cdot 0{,}02\,I' = 60\,(2{,}1 - 0{,}02\,I').$$

Pe de altă parte avem

$$I' = I'_r + I'_r.$$

Rezolvînd aceste ecuații obținem

$$I' = 5 \text{ A}, \quad I'_r = 3 \text{ A}, \quad I'_i = 2 \text{ A} \quad \text{si} \quad U' = 120 \text{ V}.$$

4.106. Un motor electric cu excitația în derivație, legat la o rețea de curent continuu (fig. 187), acționează prin curea o piatră de polizor. Rezistența indusului este de 0,5 Ω, iar rezistența inductorului de 90 Ω. Arborele motorului pe care acționează cureaua are raza $r = 5$ cm, iar șaiba polizorului acționată de curea are raza $r' = 10$ cm. Piatra de polizor are raza $R = 20$ cm și asupra ei acționează o forță periferică de 300 N. Turația polizorului n' este 750 rot/min, iar pierderile în curea și frecări reprezintă 60% din puterea motorului. Indusul motorului are 2000 conductori, iar inductorul este străbătut de un flux $\Phi = 4 \cdot 10^{-3}$ Wb. Să se calculeze:

Scanned with OKEN Scanner

a) Puterea polizorului în kW. b) Puterea motorului în kW. c) Turația motorului. d) Tensiunea contraelectromotoare a motorului. e) Intensitatea curenților în indus, inductor și a celui primit de motor de la rețea. f) Tensiunea rețelei de distribuție.

Rezolvare. a) Puterea utilă a polizorului este

$$P_u = Fv = FR\omega = FR\frac{\pi n'}{30} = 300 \cdot 0{,}2 \times$$

$$\times \frac{3{,}14 \cdot 750}{30} = 4\,710\ \text{W} = 4{,}71\ \text{kW},$$

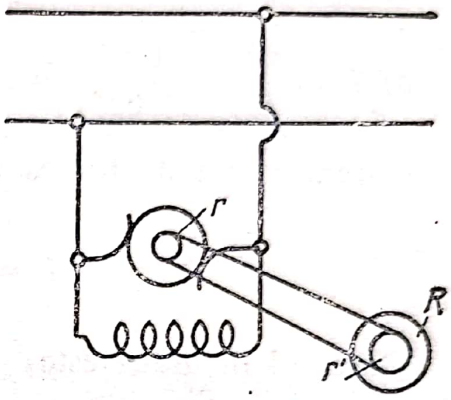


Fig. 187

b) Randamentul polizorului fiind egal cu 40 %, puterea P_m a motorului se deduce din relația

$$\eta = \frac{P_u}{P_m},\quad P_m = \frac{P_u}{\eta} = \frac{4{,}71}{0{,}40} = 11{,}77\ \text{kW}.$$

c) Dacă n este turația motorului, avem relația

$$\frac{n}{n'} = \frac{r'}{r},\ \text{de unde}\ n = \frac{r'}{r}n' = \frac{10}{5} \cdot 750 = 1\,500\ \text{rot/min} = 25\ \text{rot/s}.$$

d) $E = Nn\Phi = 2000 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 200$ V.

e) Puterea motorului este $P_m = EI_r$, de unde rezultă

$$I_r = \frac{P_m}{E} = \frac{11\,770}{200} = 58{,}85\ \text{A}.$$

Tensiunea la bornele motorului este

$$U = E + R_r I_r = R_i I_i$$

de unde obținem

$$I_i = \frac{E + R_r I_r}{R_i} = \frac{200 + 0{,}5 \cdot 58{,}85}{90} = 2{,}55\ \text{A},$$

$$I = I_r + I_i = 58{,}85 + 2{,}55 = 61{,}4\ \text{A}.$$

f) $U = R_i I_i = 90 \cdot 2{,}55 \approx 230$ V.

4.107. Un dinam cu excitația în paralel alimentează un circuit de lămpi sub tensiunea de 65 V, toate lămpile consumînd o putere de 1950 W. Rezistența

rotorului este $r = 0{,}04\ \Omega$, iar a inductorului $R = 20\ \Omega$. Lămpile fiind în paralel și absorbind fiecare dintre ele cîte 50 W, se cere:

a) Curentul debitat de dinam pe rețea. b) Tensiunea electromotoare a dinamului. c) Pierderile de putere în inductor. d) Randamentul electric al dinamului. e) Numărul lămpilor din circuit și rezistența fiecărei lămpi.

Rezolvare.

a) $I = \frac{W}{U} = \frac{1\,950}{65} = 20\ \text{A}.$

Curentul în inductor este

$$I_i = \frac{U}{R} = \frac{65}{20} = 3{,}25\ \text{A}.$$

Curentul în indus este

$$I_r = 30 + 3{,}25 = 33{,}25\ \text{A}.$$

b) $E = U + rI_r = 65 + 0{,}04 \cdot 33{,}25 = 66{,}33\ \text{V}.$

c) $P_i = RI_i^2 = 20 \cdot 3{,}25^2 = 20 \cdot 10{,}56 = 211{,}2\ \text{W}.$

d) $\eta_e = \frac{UI}{EI_r} = \frac{65 \cdot 30}{66{,}33 \cdot 33{,}25} = 0{,}88.$

e) Numărul lămpilor din circuit este egal cu $1950 : 50 = 39$.
Rezistența unei lămpi

$$R = \frac{U^2}{W} = \frac{65^2}{50} = 84{,}5\ \Omega.$$

4.108. Un circuit electric de curent continuu este format din următoarele elemente legate în serie:

Un dinam cu t.e.m. $E = 120$ V și cu rezistența interioară $r = 3\ \Omega$; o bobină L cu $N = 100$ spire, cu lungimea $l = 20$ cm și cu diametrul $D = 5$ cm avînd rezistența ohmică $R_1 = 2\ \Omega$; un voltametru cu $CuSO_4$ cu rezistența $R_2 = 3\ \Omega$ și o rezistență R_3 necunoscută. Știind că în 1/4 ore se depune la catodul voltametrului o cantitate de 2 g de Cu al cărui echivalent electrochimic $k = 32 \cdot 10^{-8}$ kg/C, se cere:

a) Intensitatea curentului în circuit. b) Intensitatea cîmpului magnetic în centrul solenoidului. c) Fluxul magnetic într-o spiră. d) Valoarea rezistenții R_3. e) Randamentul electric al dinamului.

(Adm. Inst. Politehnic, Buc., 1967)

Rezolvare.

a) $I = \frac{m}{kt} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{2}} = 6{,}94\ \text{A}.$

b) $H = \frac{NI}{l} = \frac{100 \cdot 6{,}94}{20 \cdot 10^{-2}} = 3\,470\ \text{A/m}.$

c) $\Phi = B \cdot S = \mu_0 \mu_r H \cdot S = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 3\,470 \cdot \frac{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{4} =$

$$= \pi^2 \cdot 3\,470 \cdot 25 \cdot 10^{-11} = 8{,}675 \cdot 10^{-6}\ \text{Wb}.$$

d) $I(R_1 + R_2 + R_3 + r) = E;\ R_3 = 9{,}29\ \Omega.$

e) $\eta = \frac{U}{E} = \frac{E - rI}{E} = \frac{120 - 3 \cdot 6{,}94}{120} = \frac{99{,}18}{120} = 0{,}8265 = 82{,}65\,\%.$

4.109. Un dinam de curent continuu are tensiunea la borne $U = 120$ V, rezistența interioară $r = 2{,}5\ \Omega$ și randamentul electric $\eta = 80\%$. El debitează curent printr-un conductor cu secțiunea $s = 5{,}5\ \text{mm}^2$ și rezistivitatea $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. La capetele conductorului se află montați în derivație următorii receptori; 1) Un voltametru cu soluție de $AgNO_3$ având rezistența $R_1 = 38\ \Omega$. 2) Un solenoid cu $N = 250$ spire având rezistența ohmică $R_2 = 19\ \Omega$, lungimea $l = 25$ cm și secțiunea $S = \frac{10^3}{4\pi}\ \text{cm}^2$. 3) Un reșou electric, cu rezistența $R_3 = 38\ \Omega$ și cu randamentul $\eta' = 80\ \%$, pe care se află un litru de apă la temperatura $t_0 = 20\ ^\circ\text{C}$. Cînd apa începe să fiarbă se întrerupe curentul principal. Cunoscînd echivalentul electrochimic al Ag $= 1118 \cdot 10^{-6}$ kg/C, se cere:

a) T.e.m. a dinamului. b) Curentul debitat. c) Lungimea conductorului. d) Cîmpul magnetic în interiorul solenoidului și inductanța proprie a solenoidului. e) Cantitatea de argint depusă la catodul voltametrului.

Rezolvare

a) $E = \frac{U}{\eta} = \frac{120}{0{,}80} = 150\ \text{V}$, b) $I = \frac{E - U}{r} = 12\ \text{A}$. c) Rezistența echivalentă a receptorilor, $R_c = 9{,}5\ \Omega$. Rezistența conductorului se calculează din relația $E = I(R_c + r + R)$ și se găsește $R = 0{,}5\ \Omega$, lungimea acestuia $l = 160$ m. d) $H = 6000$ A/m iar inductanța proprie $L = 25 \cdot 10^{-4}\text{H}$. e) Timpul necesar pentru încălzirea apei de la temperatura $t_0 = 20\ ^\circ\text{C}$ la temperatura de $100\ ^\circ\text{C}$ este egal cu $t = 1222$ s, iar cantitatea de Ag depusă la catod, $m = 4{,}0985$ g.

Scanned with OKEN Scanner

D. Curentul alternativ

25. Tensiunea, curentul și puterea în curent alternativ. Circuite și mașini de curent alternativ. Termoelectricitatea

a. Considerații teoretice

1. Valorile instantanee ale tensiunii și curentului alternativ sînt date de relațiile

$$e = E_m \sin \omega t; \quad i = I_m \sin \omega t$$

unde E_m este tensiunea maximă, I_m — curentul maxim, ω — pulsația, iar t — timpul de trecere al curentului prin circuit.

2. Frecvența, perioada și pulsația curentului sînt date de relațiile

$$\nu = f = \frac{1}{T}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi f.$$

3. Valorile eficace ale tensiunii și curentului sînt date de relațiile

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, U_m.$$

Valorile citite la aparate sînt cele eficace.

4. Reactanța inductivă, reactanța capacitivă și impedanța unui circuit sînt date de relațiile

$$X_L = \frac{U_L}{I} = \omega L, \quad X_c = \frac{U_c}{I} = \frac{1}{C\omega}, \quad Z = \frac{U}{I}.$$

Impedanța Z este suma geometrică a rezistențelor și reactanțelor unui circuit.

5. Puterea activă, reactivă și aparentă ale unui circuit se măsoară în W sau kW, var sau kvar și volt-amperi (VA) sau kilovolt amperi și sînt date de relațiile

$$P = UI \cos \varphi, \quad Q = UI \sin \varphi, \quad S = UI$$

unde U este tensiunea de la bornele circuitului, I — curentul, iar φ — unghiul de defazaj dintre tensiune și curent.

Scanned with OKEN Scanner

6. Intensităţile curenţilor într-un circuit care conţine numai rezistenţă activă, numai reactanţă inductivă sau numai reactanţă capacitivă, sînt date de relaţiile

$$I_R = \frac{U}{R}, \quad I_L = \frac{U}{L\omega}, \quad I_c = \frac{U}{\frac{1}{C\omega}} = U \cdot C\omega.$$

În primul caz, curentul şi tensiunea sînt în fază, în al doilea caz curentul este decalat în urma tensiunii cu unghiul $\varphi = \pi/2$, iar în al treilea caz curentul este decalat înaintea tensiunii cu unghiul $\varphi = \pi/2$.

7. Pentru un circuit în care sînt montate în serie o rezistenţă activă, o reactanţă inductivă şi o reactanţă capacitivă, există relaţiile

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \quad \overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C$$

unde Z este impedanţa circuitului în ohmi, U — tensiunea la bornele circuitului, U_R, U_L şi U_C sînt tensiunile la bornele rezistenţei active şi a reactanţelor

$$U_R = RI, \; U_L = L\omega I \text{ şi } U_C = \frac{I}{C\omega}.$$

Dacă circuitul cuprinde în serie numai o parte din rezistenţe sau reactanţe, elementele lui se calculează tot cu ajutorul relaţiilor precedente, anulîndu-se rezistenţa sau reactanţa care lipseşte din circuit.

Cînd $L\omega = 1/C\omega$ ne găsim în rezonanţă. În acest caz curentul este maxim şi are valoarea

$$I_m = \frac{U}{R}, \text{ iar } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f = 2\pi\nu.$$

8. Circuite electrice în paralel:

a) Dacă circuitul cuprinde o rezistenţă montată în paralel cu o reactanţă inductivă, avem relaţiile

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{L\omega}\right)^2; \quad I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}.$$

b) Pentru o rezistență și o reactanță capacitivă în paralel, avem relațiile

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{\frac{1}{C\omega}}\right)^2, \quad I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}.$$

c) Pentru o reactanță inductivă în paralel cu o reactanță capacitivă, avem relațiile

$$I = I_L - I_c = \frac{U}{L\omega} - \frac{U}{\frac{1}{C\omega}} = U\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right).$$

9. Curentul alternativ trifazat: dacă notăm cu I_l, I_f curentul de linie și pe fază, cu U_l și U_f, tensiunea de linie și între două faze, iar cu P, S și Q puterea activă, aparentă și reactivă, avem următoarele relații:

a) Pentru montajul în triunghi

$$I = I_f\sqrt{3}, \quad U_l = U_f, \quad P = \sqrt{3}\,U_l I_l \cos\varphi,$$
$$S = \sqrt{3}\,U_l I_l, \quad Q = \sqrt{3}\,U_l I_l \sin\varphi = P\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

b) Pentru montajul în stea avem

$$I_l = I_f, \quad U_l = U_f\sqrt{3}, \quad P = \sqrt{3}\,U_l I_l \cos\varphi,$$
$$S = \sqrt{3}\,U_l I_l, \quad Q = \sqrt{3}\,U_l I_l \sin\varphi = P\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

10. Într-un transformator de curent alternativ există relațiile

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1}$$

unde U_1, I_1, N_1 sînt tensiunea, curentul și numărul de spire din primar, iar U_2, I_2, N_2 – tensiunea, curentul și numărul de spire din secundar.

11. Numărul de rotații pe minut al rotorului unei mașini sincrone de curent alternativ este dat de relația

$$n = \frac{60f}{p}$$

unde f este frecvența curentului, iar p – numărul de perechi de poli ai mașinii.

12. Tensiunea electromotoare produsă de o rezistență termoelectrică este dată de relația

$$U = C \cdot \Delta t$$

unde C este constanta rezistenței, în V/grd, iar Δt – diferența de temperatură dintre contactele îmbinărilor metalelor care formează termocuplul.

Scanned with OKEN Scanner

b. Probleme

4.110. O bobină formată din 200 spire se învîrteşte cu 3000 rot/min într-un cîmp magnetic de $2 \cdot 10^6/\pi$ [A/m]. Permeabilitatea magnetică fiind egală cu 1, iar secţiunea bobinei 250 cm², să se calculeze valoarea eficace a t.e.m. de inducţie.

Rezolvare. Fluxul maxim care traversează bobina este

$$\Phi_{max} = \mu_0 \mu_r HS = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{2 \cdot 10^6}{\pi} \cdot 250 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Wb},$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{6{,}28 \cdot 3000}{60} = 314 \text{ rad/s}.$$

Tensiunea electromotoare maximă este

$$E_0 = \Phi_{max} \cdot \omega N = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 314 \cdot 2 \cdot 10^2 = 1256 \text{ V}.$$

Tensiunea eficace este dată de relaţia

$$E_{ef} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \frac{1256}{1{,}41} = 891 \text{ V}.$$

4.111. O maşină de curent alternativ cu opt poli trebuie să debiteze un curent cu frecvenţa de 100 s^{-1}, sub tensiunea efectivă $U_{ef} = 220$ V. Se cere: a) Turaţia maşinii. b) Valoarea maximă a tensiunii. c) Valoarea instantanee a tensiunii după 1/12 dintr-o perioadă.

Rezolvare. a) Ţinînd seamă că $2p = 8$ şi $p = 4$, avem

$$n = \frac{60f}{p} = \frac{60 \cdot 100}{4} = 1500 \text{ rot/min}.$$

b) $U_m = \sqrt{2}\, U_{ef} = 1{,}414 \cdot 220 = 311$ V.

c) $u = U_m \sin \omega t = U_m \sin 2\pi f \cdot \frac{T}{12} = U_m \sin \frac{\pi}{6} = 155{,}5$ V.

4.112. Care este raportul de transformare al unui transformator dacă înfăşurarea primară are $N_1 = 4490$ spire, iar cea secundară produce o t.e.m. $E_2 = 1000$ V. Miezul de fier are secţiunea $S = 10$ cm² şi permeabilitatea relativă $\mu_r = 50$, iar cîmpul magnetic are intensitatea maximă $H = \frac{10^4}{2\pi} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right]$ şi frecvenţa $f = 50$ Hz.

(G. M. F., nr. 2/1955)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare.

$$\omega = 2\pi f = 100\,\pi\,; \quad B = \mu_0 \mu_r H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot \frac{10^4}{2\pi} = 10^{-1} = \frac{1}{10}\ \text{T}.$$

Tensiunea electromotoare maximă în primar este

$$E_1 = \omega B S N_1 = 100\,\pi \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} \cdot 4490 = 141\ \text{V}.$$

Raportul de transformare este

$$K = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1000}{141} = 7{,}1.$$

4.113. O bobină cu miez de fier este alcătuită dintr-un fir de cupru bobinat spiră lîngă spiră într-un singur strat. Se cere:

a) Ce intensitate are curentul electric care parcurge bobina, dacă aceasta se conectează pe rînd la o tensiune continuă și apoi alternativă de 110 V cu frecvența de 50 Hz. b) Ce condensator trebuie legat în serie cu bobina în curent alternativ, pentru ca bobina să fie străbătută de același curent care o străbate în curent continuu? Se dă numărul de spire al bobinei $N = 500$, lungimea bobinei $l = 0{,}10$ m, diametrul bobinei $D = 0{,}02$ m, rezistivitatea cuprului $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ și permeabilitatea magnetică relativă a miezului, $\mu_r = 800$.

(R. F. Ch., nr. 7/1966)

Rezolvare. a) Lungimea firului $l' = \pi DN = 3{,}14 \cdot 0{,}02 \cdot 500 = 10\,\pi$ [m]; diametrul firului este egal cu $d = l/N = 0{,}10/500 = 0{,}0002$ m $= 0{,}2$ mm, iar secțiunea firului $s = \pi d^2/4 = \pi \cdot 10^{-8}$ [m^2].

Rezistența bobinei este

$$R = \rho \frac{l'}{s} = 1{,}72 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{10\pi}{\pi \cdot 10^{-2}} = 17{,}2\ \Omega.$$

În curent continuu, avem

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{110}{17{,}2} = 6{,}4\ \text{A}.$$

Inductanța bobinei este

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800 \cdot \frac{500^2 \cdot \pi \cdot 10^{-4}}{10^{-1}} = 0{,}8\ \text{H}.$$

Reactanța bobinei este

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}8 = 251{,}2\ \Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Intensitatea curentului alternativ este

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{110}{\sqrt{17{,}2^2 + 251{,}2^2}} = 0{,}44\,\text{A}.$$

b) $$\frac{U}{R} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

Făcînd calculele obținem condiția de rezonanță

$$x_L = x_C\,; \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}\,;$$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{40 \cdot 2500 \cdot 0{,}8} = \frac{1}{8 \cdot 10^4}\,\text{F} = 12{,}5\,\mu\text{F}.$$

4.114. Un reșou electric cu randamentul $\eta = 75\ \%$ pus la rețeaua de curent alternativ monofazat de 120 V și 50 Hz, fierbe 1,550 l apă aflată la temperatura $t_0 = 20\ ^\circ\text{C}$, în timp de 10 min. Spirele care formează circuitul reșoului au și rezistență inductivă. Impedanța totală a circuitului fiind egală cu $Z = 10\ \Omega$, se cere:

a) Curentul absorbit de reșou. b) Puterea utilă activă și puterea activă absorbită de la rețea. c) Factorul de putere al reșoului. d) Valoarea rezistenței ohmice și reactanța inductivă. e) Inductanța proprie a circuitului.

Rezolvare

a) $$I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{10} = 12\,\text{A}.$$

b) Căldura utilă necesară pentru fierberea apei este

$$Q_u = W_u = mc(t - t_0) = 1{,}550 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3 (100 - 20) =$$

$$= 1{,}550 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3 \cdot 80 = 518\,320\,\text{J}.$$

Puterea utilă a reșoului este

$$P_u = \frac{W_u}{t} = \frac{518\,320}{600} = 864\,\text{W}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Puterea absorbită de la rețea este

$$P_c = \frac{P_u}{\eta} = \frac{964}{0{,}75} = 1152\ \text{W} = 1{,}152\ \text{kW}.$$

c) $\cos\varphi = \frac{P_c}{UI} = \frac{1152}{1440} = 0{,}80; \quad \operatorname{tg}\varphi = 0{,}75.$

d) R rezultă din relațiile

$$Z^2 = R^2 + (L\omega)^2 \text{ și } \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}; \quad R = 8\,\Omega$$

e) $L\omega = 6; \quad L = \frac{6}{314} = 0{,}0189\ \text{H} = 18{,}9\ \text{m H}.$

4.115. Un circuit este format dintr-un condensator de $2\cdot10^3/\pi\ \mu$F legat în serie cu o bobină care are rezistența activă $R = 4\ \Omega$ și inductanța $L = 20/\pi$ mH. Circuitul este alimentat cu o tensiune instantanee $u = 20\sqrt{2}\sin 100\,\pi t$. Bobina are 200 de spire și servește ca primar unui transformator cu 25 spire la secundar. Se cere:

a) Tensiunea efectivă și frecvența curentului alternativ. b) Diagrama rezistențelor și curentul în circuit. c) Tensiunea la bornele bobinei și cea de la bornele condensatorului. d) Defazajul dintre intensitate la bornele bobinei și cea de la bornele circuitului. e) Tensiunea la bornele secundarului transformatorului. f) Puterea activă și reactivă consumate de circuit.

(Olimpiada de fizică, 1965)

Rezolvare.

a) $u = U_m \sin\omega t = 20\sqrt{2}\sin 100\,\pi t; \quad U_m = 20\sqrt{2}\ \text{V},$

$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20\ \text{V}; \quad \omega = 100\pi = 2\pi f; \quad f = 50\ \text{Hz}.$$

b) $X_L = \omega L = 100\pi\cdot\frac{20}{\pi}\cdot10^{-3} = 2\,\Omega,$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100\pi\cdot\frac{2\cdot10^3}{\pi}\cdot10^{-6}} = 5\,\Omega,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\,\Omega$$

$$I = \frac{U_{ef}}{Z} = \frac{20}{5} = 4\,\text{A}.$$

c) $U_B = I \cdot Z_B = I\sqrt{R^2 + X_L^2} = 4\sqrt{16 + 4} = 8\sqrt{5}$ V

$U_C = I \cdot Z_C = I \cdot X_C = 4 \cdot 5 = 20$ V.

d) $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_L}{R} = \frac{2}{4} = 0{,}5; \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} 0{,}5.$

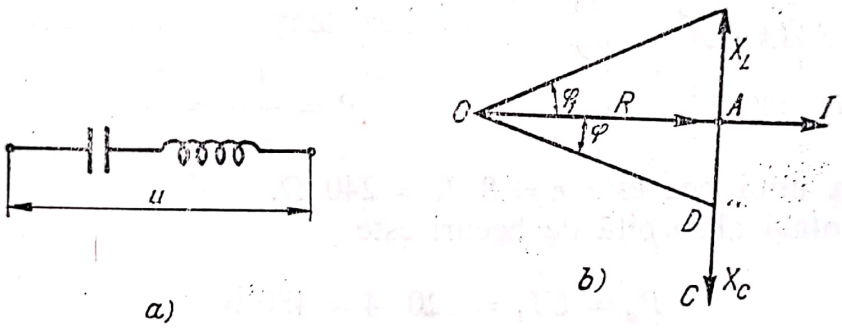


Fig. 188

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_C - X_L}{R} = \frac{5 - 2}{4} = \frac{3}{4}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

e) $\frac{U_B}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_B = \frac{25}{200} \cdot 8\sqrt{5} = \sqrt{5}$ V.

f) $P = UI \cos \varphi = 20 \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = 64$ W

$Q = UI \sin \varphi = 20 \cdot 4 \cdot \frac{3}{5} = 48$ var.

4.116. La tensiunea alternativă monofazată de 120 V se află o bobină de selfinducție montată în derivație cu opt becuri cu incandescență, montate la rîndul lor în paralel. În serie cu acest montaj se află un ampermetru (fig. 189) de rezistență neglijabilă. Cînd becurile sînt stinse ampermetrul indică 3 A, iar cînd becurile sînt aprinse ampermetrul indică 5 A. Se cere:

a) Reactanța bobinei. b) Curenții în bobină și becuri cînd acestea sînt aprinse. c) Rezistența și puterea unui bec. d) Factorul de putere al circuitului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Becurile fiind stinse, prin bobină trece un curent de 3 A, de unde rezultă

$$L\omega = \frac{U}{I} = \frac{120}{3} = 40\,\Omega.$$

b) Curentul care trece prin bobină este

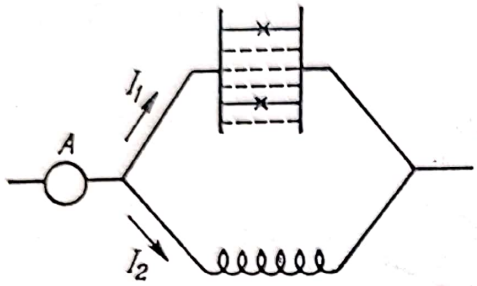


Fig. 189

$$I_2 = \frac{U}{L\omega} = \frac{120}{40} = 3\,\text{A}.$$

Curentul total care trece prin becuri este

$$I_1 = \sqrt{I^2 - I_2^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = 4\,\text{A}.$$

c) Rezistența totală a becurilor este

$$R = \frac{U}{I_1} = \frac{120}{4} = 30\,\Omega.$$

Rezistența unui bec este $r = 8\ R = 240\ \Omega$.
Puterea totală absorbită de becuri este

$$P_a = UI_1 = 120 \cdot 4 = 480\,\text{W}.$$

Puterea unui bec este de $480 : 8 = 60$ W.
d) Factorul de putere este dat de relația

$$P_a = UI\cos\varphi,\ \cos\varphi = \frac{P_a}{UI} = \frac{480}{120 \cdot 5} = \frac{480}{600} = 0{,}8.$$

4.117. La o rețea de curent trifazat, cu tensiunea de linie (între faze) de 220 V, sînt conectate trei grupe de lămpi electrice cu incandescență. Rezistența fiecărei grupe fiind egală cu 30 Ω, se cere să se calculeze curenții și tensiunile fiecărei grupe de lămpi atunci cînd se arde siguranța *b*, (fig. 190) în următoarele cazuri:
a) Grupele de lămpi sînt montate în triunghi. b) Grupele de lămpi sînt montate în stea.

Rezolvare. a) Arzîndu-se siguranța *b* (fig, 190, *a*) grupele de becuri de pe fazele *AB* și *AC* rămîn montate în serie și au rezistența totală egală cu $R_1 = 2\ R = 2 \cdot 30 = 60\ \Omega$. Grupa *BC* este în derivație cu *BAC* și putem scrie

$$R_e = \frac{R_1 R}{R_1 + R} = \frac{60 \cdot 30}{60 + 30} = \frac{1800}{90} = 20\ \Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Curentul total absorbit de la rețea este

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{220}{20} = 11\,\text{A}.$$

Curentul care trece prin grupele BA și AC este

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R_1} = \frac{220}{60} = \frac{11}{3}\,\text{A}.$$

Curentul care trece prin grupa BC este

$$I_3 = \frac{U}{R} = \frac{220}{30} = \frac{22}{3}\,\text{A}.$$

Grupele de lămpi AB și AC se vor găsi sub tensiunile

$$U_{AB} = U_{AC} = RI_1 =$$

$$= 30 \cdot \frac{11}{3} = 110\,\text{V}.$$

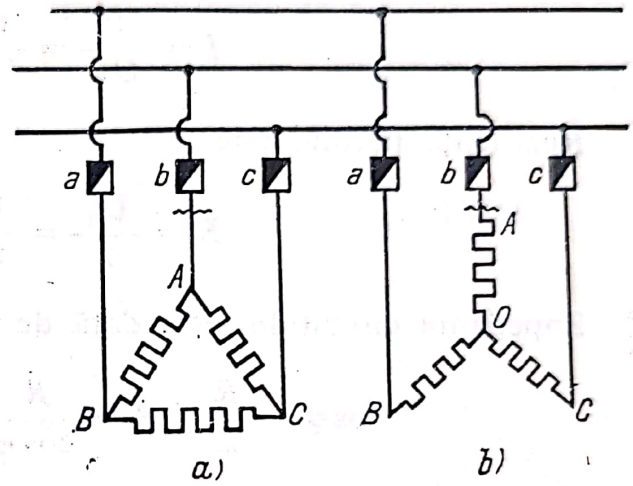


Fig. 190

Grupa BC se va găsi sub tensiunea

$$U'_{BC} = RI_2 = 30\frac{22}{3} \approx 220\,\text{V}.$$

b) În acest caz rămîn numai grupele OB și OC în serie, iar prin grupa OA nu va mai trece nici un curent (fig. 190, *b*).

Curentul care trece prin grupele OB și OC este

$$I = \frac{U}{2R} = \frac{220}{60} = \frac{11}{3}\,\text{A}.$$

Grupa OA se va găsi sub tensiunea zero, iar grupele OB și OC se vor găsi sub tensiunea

$$U_{OB} = U_{OC} = RI = 30 \cdot \frac{11}{3} = 110\,\text{V}.$$

4.118. Un bec electric cu puterea de 60 W și cu tensiunea nominală de 120 V, este montat la o rețea de curent alternativ cu tensiunea mai mare decît a becului. Pentru ca becul să funcționeze normal se montează în serie

Scanned with OKEN Scanner

cu el o bobină de selfinducţie, obţinîndu-se astfel un factor de putere $\cos \varphi = 0{,}545$. Se cere:

a) Impedanţa şi reactanţa circuitului. b) Tensiunea reţelei de alimentare. c) Randamentul circuitului. d) Mărimea rezistenţei ohmice care ar putea înlocui bobina, astfel ca becul să lumineze normal, şi randamentul circuitului în acest caz.

R e z o l v a r e. a) Curentul care poate trece prin circuit este cel suportat de bec, adică

$$I = \frac{P}{U_1} = \frac{60}{120} = 0{,}5\,\text{A}.$$

Rezistenţa becului este

$$R = \frac{U_1}{I} = \frac{120}{0{,}5} = 240\,\Omega.$$

Impedanţa circuitului este dată de relaţia

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z},\quad Z = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{240}{0{,}545} = 440\,\Omega,$$

$$L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{440^2 - 240^2} = 369\,\Omega.$$

b) $U = IZ = 0{,}5 \cdot 440 = 220$ V.

c) Puterea activă totală este egală cu puterea utilă a becului, iar randamentul este 100%.

d) Dacă R' este rezistenţa căutată, avem

$$(R + R')\,I = 220,\quad R' = \frac{220}{I} - R = \frac{220}{0{,}5} - 240 = 200\,\Omega.$$

Puterea totală absorbită de circuit este

$$P_a = (R + R')\,I^2 = 440 \cdot 0{,}25 = 110\,\text{W}.$$

Puterea utilă, $P_u = 60$ W.

Randamentul circuitului este

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{60}{110} \cdot 100 = 54{,}54\,\%.$$

Este mai bine deci să punem becul în serie cu bobina, întrucît aceasta nu absoarbe putere activă.

Scanned with OKEN Scanner

4.119. La hidrocentrala de pe Crișul Repede, diferența de nivel dintre generator și castelul de apă este de 32 m, debitul apei este de 8,85 m^3/s, iar rotorul face 500 rot/min și are 12 poli. Tensiunea la bornele alternatorului este de 6000 V, intensitatea curentului 332,5 A. Pe linie, curentul se transmite sub tensiunea de 35 000 V. Se cere:

a) Randamentul generatorului. b) Frecvența curentului produs. c) Raportul de transformare al transformatorului. d) Intensitatea curentului pe linie. e) Diametrul firului, dacă pierderile admise pe linie sînt 4 % din tensiune, conductorul fiind de oțel-aluminiu cu $\rho = 2{,}9 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$. Se va lua $g = 10\ m/s^2$ și distanța de la generator la consumator 40 km.

(R. F. Ch., nr. /1965)

Rezolvare. a) Puterea consumată este

$$P_c = \frac{mgh}{t} = \frac{V\rho gh}{t} = \frac{8{,}85 \cdot 1\,000 \cdot 10 \cdot 32}{1} = 283{,}2 \cdot 10^4\ W.$$

Puterea utilă $P_u = UI = 6000 \cdot 332{,}5 = 199{,}5 \cdot 10^4$ W.

$$\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{199{,}5}{283{,}2} = 0{,}7.$$

b) $f = \frac{np}{60} = \frac{500 \cdot 6}{60} = 50$ Hz.

c) $k = \frac{U'}{U} = \frac{35\,000}{6\,000} \approx 6.$

d) $\frac{U'}{U} = \frac{I}{I'}$, $I' = \frac{U}{U'} \cdot I = \frac{6\,000}{35\,000} \cdot 332{,}5 = 57$ A.

e) Pierderea de tensiune pe linie este

$$\Delta U = \frac{35\,000 \cdot 4}{100} = 1\,400\ V,$$

$$R = \frac{\Delta U}{I'} = \frac{1\,400}{57} = 24{,}5\,\Omega = \rho \frac{l}{s},$$

$$d = 2\sqrt{\frac{\rho l}{\pi R}} = 2\sqrt{\frac{2{,}9 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^4}{3{,}14 \cdot 24{,}5}} = 7{,}75 \cdot 10^{-3}\ m \approx 7{,}8\ mm.$$

4.120. Un transformator electric cu randamentul 90 % este conectat la rețeaua orașului, care are tensiunea de 6000 V. Tensiunea la bornele înfășurării secundare este de 220 V. Se cere:

Scanned with OKEN Scanner

a) Raportul de transformare. b) Curentul în înfășurarea secundară, dacă puterea absorbită de transformator este de 25 kW, iar factorul de putere al circuitului secundar este de 0,5.

Rezolvare.

$$a)\ K = \frac{U_1}{U_2} = \frac{6\,000}{220} = 27{,}27.$$

b) Puterea debitată de secundar este

$$P_2 = \eta P_1 = 0{,}9 \cdot 25 = 22{,}5\ \text{kW} = 22\,500\ \text{W}.$$

Curentul în circuitul secundar se deduce din relația

$$P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi,$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2 \cos\varphi} = \frac{22\,500}{220 \cdot 0{,}5} = 204\ \text{A}.$$

4.121. O rețea electrică de curent alternativ monofazat de 120 V și 50 Hz, alimentează o bobină cu reactanța de 10 Ω și rezistență neglijabilă. Dacă în paralel cu bobina se montează o rezistență ohmică R (fig. 191, *a*), curentul total absorbit de la rețea se mărește de 1,67 ori, iar dacă în locul rezistenței se pune, în paralel cu bobina, un condensator fig. 191, *b*, curentul absorbit se micșorează de două ori față de cel inițial cu bobină. Se cere:

a) Mărimea rezistenței și capacitatea condensatorului. b) Curenții absorbiți de rezistență și condensator. c) Care dintre circuite are un factor de putere mai mare. d) Puterea activă și reactivă a fiecărui circuit.

Rezolvare. a) Curentul absorbit de bobină este

$$I_1 = \frac{U}{X_L} = \frac{120}{10} = 12\,\text{A}.$$

Punînd rezistența în paralel cu bobina, diagrama curenților față de tensiune se prezintă ca în fig. 191, *a* și putem scrie

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2. \qquad (1)$$

Ținînd seama că

$$I_R = \frac{U}{R} \quad \text{si} \quad I_L = \frac{U}{X_L},$$

relația (1) devine

$$I^2 = U^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}\right). \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (2) rezultă

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{I}{U}\right)^2 - \frac{1}{X_L^2}} = \sqrt{\left(\frac{1{,}67 \cdot 12}{120}\right)^2 - \frac{1}{10^2}} = \sqrt{\left(\frac{20}{120}\right)^2 - \frac{1}{10^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{36} - \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{64}{3\,600}} = \frac{8}{60}, \quad R = \frac{60}{8} = 7{,}5\,\Omega.$$

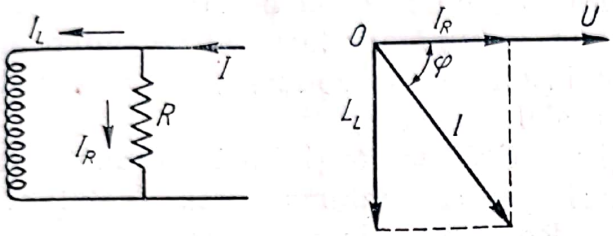


Fig. 191, a

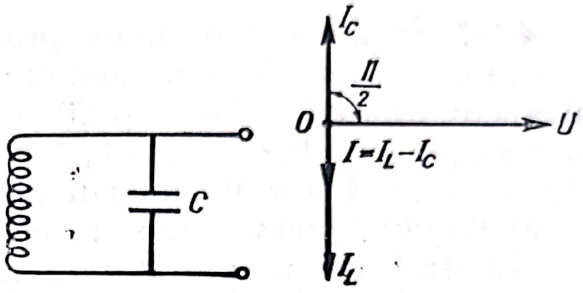


Fig. 191, b

Punînd condensatorul în paralel cu bobina, diagrama curenților față de tensiune se prezintă ca în fig. 191, *b*.

Din figură rezultă

$$I = I_L - I_C = \frac{U}{X_L} - \frac{U}{X_C} = U\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right).$$

Din această relație rezultă

$$\frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_L} - \frac{I}{U} = \frac{1}{10} - \frac{6}{120} = \frac{1}{20},$$

$$X_C = 20\,\Omega = \frac{1}{C\omega}, \quad C = \frac{1}{20\,\omega} = \frac{1}{6\,280}\,F = 159{,}2\,\mu F.$$

b) $I_R = \frac{U}{R} = \frac{120}{7{,}5} = 16\,A, \quad I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{120}{20} = 6\,A.$

c) În cazul cînd în circuit se află numai bobina, decalajul curentului față de tensiune este $\pi/2$, deci $\cos\varphi = 0$. Cînd în circuit se află bobina și rezistența, $\cos\varphi = I_R/I = 16/20 = 0{,}8$. Cînd în circuit se află bobina și condensatorul, decalajul este $\pi/2$ și $\cos\varphi = 0$.

d) În primul caz circuitul absoarbe numai putere reactivă

$$P_r = UI\sin\varphi = 120 \cdot 12 \cdot 1 = 1\,440\,\text{var} = 1{,}44\,\text{kvar}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul al doilea circuitul absoarbe și putere activă și putere reactivă

$$P_a = UI\cos\varphi = 120 \cdot 20 \cdot 0{,}8 = 1\,920\ \text{W} = 1{,}92\ \text{kW},$$

$$P_r = UI\sin\varphi = 120 \cdot 20 \cdot 0{,}6 = 1\,440\ \text{var} = 1{,}44\ \text{kvar}.$$

În cazul al treilea circuitul absoarbe numai putere reactivă

$$Q = UI\sin\varphi = 120 \cdot 6 \cdot 1 = 720\ \text{var} = 0{,}72\ \text{kvar}.$$

4.122. În urma dispozițiilor primite de la I.D.E.B., o întreprindere de stat care consumă de la rețeaua orașului o putere activă de 200 kW curent alternativ trifazat de 380 V și 50 Hz, și-a îmbunătățit factorul de putere de la $\cos\varphi_1 = 0{,}60$ la $\cos\varphi_2 = 0{,}90$ prin instalarea de condensatori statici de cîte 12 kvar și 380 V, montați în paralel. Se cere:

a) Raportul dintre puterea activă și reactivă înainte și după îmbunătățire. b) Numărul de condensatori necesari pentru îmbunătățirea instalației. c) Capacitatea unui condensator. d) Raportul dintre curentul absorbit după îmbunătățire și cel dinainte.

Rezolvare.

a) $$K_1 = \frac{\sqrt{3}\,UI\cos\varphi_1}{\sqrt{3}\,UI\sin\varphi_1} = \frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

deci puterea reactivă (pierderile) este mai mare decît cea activă

$$K_2 = \frac{\sqrt{3}\,UI\cos\varphi_2}{\sqrt{3}\,UI\sin\varphi_2} = \frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi_2} = \frac{0{,}90}{0{,}44} \approx 2.$$

Puterea pierdută este mai mică decît cea utilizată.

b) Puterea reactivă care se compensează prin montarea condensatorilor este

$$Q = P_a(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2) = 200\,(1{,}333 - 0{,}488) = 200\ \ 0{,}845 = 169\ \text{kvar}.$$

Numărul de condensatori necesari este

$$n = \frac{169}{12} = 14\ \text{condensatori}.$$

b) Puterea unui condensator este

$$P = \sqrt{3}\,UI\cos\varphi = \sqrt{3}\,UI_c = \sqrt{3}\,U \cdot \frac{U}{\frac{1}{C\omega}} = \sqrt{3}\,U^2 C\omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din această relație rezultă

$$C = \frac{P}{\sqrt{3}\, U^2 \omega} = \frac{12\,000}{1{,}73 \cdot 380^2 \cdot 314} = 153\ \mu\text{F}.$$

d) $P_a = \sqrt{3}\, UI_1 \cos \varphi_1 = \sqrt{3}\, UI_2 \cos \varphi_2$.

Din această relație rezultă

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = \frac{0{,}6}{0{,}9} = \frac{2}{3} = 0{,}666;$$

rezultă că, după îmbunătățirea instalației, se absoarbe un curent mai mic de 0,666 ori față de cel inițial pentru a produce aceeași putere activă.

4.123. O bobină de inducție și o rezistență R sînt montate în serie la rețeaua de curent alternativ monofazat de 120 V și 50 Hz, absorbind un curent $I = 24$ A. Dacă bobinei și rezistenței li se adaugă în serie un condensator cu reactanța de 3 Ω, circuitul intră în rezonanță. Se cere:

a) Să se întocmească diagramele de funcționare și să se calculeze valoarea rezistenței, inductanța proprie a bobinei și capacitatea condensatorului. b) Valoarea curentului de rezonanță. c) Tensiunile la bornele rezistenței, bobinei și condensatorului din cele două circuite. d) Care dintre cele două circuite are factorul de putere mai mare. e) Puterea activă a circuitelor.

Rezolvare. a) Din diagrama de funcționare (fig. 192, *a*) rezultă

$$U_1^2 + U_2^2 = U^2; \quad I^2 (R^2 + L^2 \omega^2) = U^2,$$

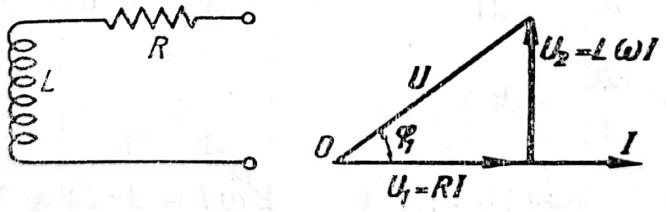


Fig. 192, *a*

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}.$$

Făcînd înlocuirea obținem

$$\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} = \frac{U}{I} = \frac{120}{24} = 5\ \Omega. \qquad (1)$$

După montarea condensatorului, diagrama se prezintă ca în fig. 192, *b*. Se vede ușor că

$$U^2 = U_1'^2 + (U_2' - U_3')^2.$$

Făcînd înlocuirile, se obține valoarea curentului

$$I' = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

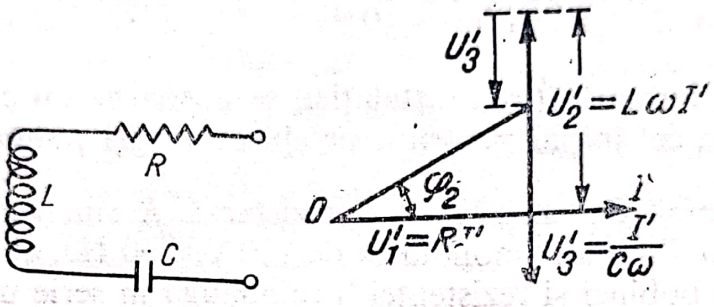


Fig. 192, a

Din condiția de rezonanță se obține

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} = X_C = 3\,\Omega.$$

Înlocuind în (1) se obține $R = 4\,\Omega$.

$$L = \frac{X_C}{\omega} = \frac{3}{314}\,\text{H}; \quad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{942}\,\text{F}.$$

b) $I' = \frac{U}{R} = \frac{120}{4} = 30\text{A}.$

c) $U_1 = RI = 4 \cdot 24 = 96\,\text{V}; \quad U_2 = L\omega I = 3 \cdot 24 = 72\,\Omega,$

$U_1' = RI' = 4 \cdot 30 = 120\,\text{V}; \quad U_2' = L\omega I' = 3 \cdot 30 = 90\,\text{V},$

$$U_3' = \frac{1}{C\omega} I' = 3 \cdot 30 = 90\,\text{V}.$$

d) Pentru primul circuit avem

$$\cos\varphi_1 = \frac{U_1}{U} = \frac{96}{120} = 0{,}8.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru circuitul al doilea

$$\cos\varphi_2 = \frac{U_1'}{U} = \frac{120}{120} = 1;\ \varphi_2 = 0.$$

e) $P_1 = UI\cos\varphi_1 = 120 \cdot 24 \cdot 0{,}8 = 2304$ W,

$$P_2 = UI'\cos\varphi_2 = 120 \cdot 30 \cdot 1 = 3600 \text{ W}.$$

4.124. Un electromotor asincron trifazat, avînd rezistența $R = 16\ \Omega$ și reactanța inductivă $X_L = 12\ \Omega$ pe fiecare fază (înfășurare) a lucrat la o întreprindere din București, la tensiunea de 380/220 V, fiind montat în stea. Electromotorul fiind transferat la o întreprindere din provincie, unde rețeaua orașului are o tensiune de 220/127 V, se cere:

a) Curentul de linie absorbit de electromotor de la rețeaua din București. b) Factorul de putere și puterea nominală a electromotorului. c) Cum trebuie montat electromotorul în orașul din provincie și ce curent de linie absoarbe el de la rețeaua acestui oraș?

Rezolvare. a) Impedanța unei faze (unei înfășurări) este

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20\ \Omega.$$

Tensiunea de 380 V înscrisă pe motor este tensiunea între două fire de linie sau tensiunea între faze (între A și B, fig. 193, *a*) iar tensiunea de 220 V

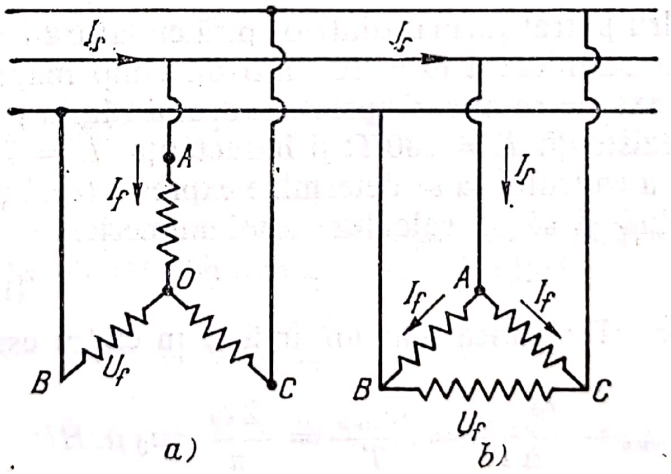


Fig. 193

este tensiunea unei înfășurări sau tensiunea unei faze (între un fir de linie și punctul neutru U_{AO})

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{380}{1{,}73} = 220.$$

Curentul absorbit de o fază este egal cu cel de linie, adică

$$I_f = I_l = \frac{U_l}{Z} = \frac{220}{20} = 11\,\text{A}.$$

b) Factorul de putere este

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{16}{20} = 0{,}8.$$

Puterea nominală a electromotorului

$$P = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos\varphi = 1{,}73 \cdot 380 \cdot 11 \cdot 0{,}8 \approx 5\,800\,\text{W} = 5{,}8\,\text{kW}.$$

c) Pentru a putea lucra la una dintre tensiunile înscrise pe electromotor (380/220 V) el trebuie montat în triunghi, avînd tensiunea pe fază (unei înfășurări, între punctele AB fig. 193, *b*) egală cu cea de linie $U_f = U_l = 220$ V.
Curentul absorbit de o înfășurare (o fază) este

$$I_f = \frac{U_f}{Z} = \frac{220}{20} = 11\,\text{A}.$$

Curentul de linie este

$$I_l = \sqrt{3}\, I_f = 1{,}73 \cdot 11 = 19\,\text{A}.$$

4.125. Un cadru pătrat format dintr-o spiră cu latura $l = 20$ cm, se rotește uniform cu viteza unghiulară $\omega = 10\pi$ într-un cîmp magnetic $H = 13$ A/m perpendicular pe axa de rotație. Capetele cadrului rămîn tot timpul conectate la o bobină cu rezistența $R = 180\ \Omega$ și inductanța $L = 7{,}5/\pi$ [H]. Neglijînd rezistența ohmică a cadrului să se determine expresia tensiunii de autoinducție maximă din bobină și să se calculeze apoi numeric.

(R. F. Ch., nr. 6/1967)

Rezolvare. Tensiunea maximă indusă în cadru este

$$E_{max} = \frac{\Phi_{max}}{\Delta t} = \frac{\Phi_{max}}{\frac{T}{4}} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \mu_0 \mu_r H l^2.$$

Aceasta va da naștere în circuitul format de cadru și de bobină unui curent de intensitate maximă

$$I_{max} = \frac{E_{max}}{Z} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\mu_0 \mu_r H l^2}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea maximă a tensiunii de autoinducție din bobină va fi

$$E'_{max} = L\frac{\Delta I_{max}}{\Delta t} = L\frac{I_{max}}{\Delta t} = L\cdot\frac{4\omega^2}{\pi^2}\cdot\frac{\mu_0\mu_r Hl^2}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}.$$

Făcînd înlocuirile cu datele numerice pentru aer, avem

$$E'_{max} = \frac{1\,560\cdot 10^{-7}}{\sqrt{180^2+75^2}} = \frac{1\,560\cdot 10^{-7}}{\sqrt{38\,025}} = \frac{1\,560\cdot 10^{-7}}{195} = 8\cdot 10^{-7}\ \text{V}.$$

4.126. Un circuit cuprinde în serie, un alternator, un bec cu rezistența de 20 Ω și o bobină cu rezistența R și inductanță proprie L, necunoscute. Diferențele de potențial măsurate cu voltmetrul termic sînt respectiv: la extremitățile becului 50 V, la extremitățile bobinei 70 V, la bornele alternatorului 87 V. Se cere:

a) Intensitatea curentului. b) Rezistența R și inducția proprie L a bobinei. c) Puterea absorbită de bec, de bobină și de alternator. d) Factorul de putere al circuitului. (Frecvența curentului care trece prin circuit este $f = 50$ Hz).

(G. M. F., nr. 10/1961)

Rezolvare.

a) $I = \dfrac{U_1}{R_1} = \dfrac{50}{20} = 2{,}5\,\text{A}.$

b) Impedanța bobinei este

$$Z = \sqrt{R^2+(L\omega)^2} = \frac{U_2}{I} = \frac{70}{2{,}5} = 28\,\Omega. \qquad (1)$$

Tensiunea la bornele alternatorului este egală cu impedanța totală a becului și bobinei, înmulțită cu intensitatea curentului adică

$$87 = 2{,}5\sqrt{(20+R)^2+(L\omega)^2} = 2{,}5\sqrt{400+40R+R^2+(L\omega)^2} =$$

$$= 2{,}5\sqrt{400+40R+28^2} = 2{,}5\sqrt{1\,184+40R}.$$

Din această relație se obține

$$40R = \frac{87^2}{2{,}5^2} - 1\,184 = 1\,211 - 1\,184 = 27,$$

$$R = \frac{27}{40} = 0{,}675\,\Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (1) rezultă

$$(L\omega)^2 = 28^2 - R^2; \quad L = \frac{\sqrt{28^2 - R^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{784 - 0{,}4556}}{314} =$$

$$= \frac{28}{314} = 0{,}089 \text{ H}.$$

c) Puterea absorbită de bec este

$$P_1 = U_1 I = 50 \cdot 2{,}5 = 125 \text{ W}.$$

Puterea activă absorbită de bobină

$$P_2 = RI^2 = 0{,}675 \cdot 6{,}25 = 4{,}22 \text{ W}.$$

Puterea alternatorului

$$P = (R_1 + R)\, I^2 = 20{,}675 \cdot 6{,}25 = 129{,}22 \text{ W}.$$

d) Puterea alternatorului este dată de expresia

$$P = UI \cos\varphi.$$

Din această relație rezultă

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{129{,}22}{87 \cdot 2{,}5} = 0{,}594.$$

4.127. Pentru determinarea temperaturii unui cuptor se introduce în el capătul unui termocuplu nichel-crom-nichel cu constanta $C = 5 \cdot 10^{-7}$ V/grd. Celălalt capăt al termocuplului este legat la un galvanometru cu sensibilitatea de 10^{-8} amperi pe diviziune și cu rezistența $R = 2 \cdot 10^3\ \Omega$. Temperatura mediului ambiant $t_0 = 15$ °C. Dacă galvanometrul arată 25 diviziuni, se cere temperatura cuptorului.

Rezolvare. Curentul produs de termocuplu și înregistrat de galvanometru, $I = 25 \cdot 10^{-8}$ A. Tensiunea între capetele termocuplului

$$U = IR = 25 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^3 = C(t - t_0).$$

Din această relație rezultă

$$t - 15\,^\circ\text{C} = \frac{25 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-7}} = 1\,000\,^\circ\text{C}; \quad t = 1\,015^\circ\text{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

Oscilaţii şi unde. Acustica

A. Oscilaţii şi unde elastice. Acustica

26. Mişcarea oscilatorie armonică, legile pendulului, compunerea mişcărilor oscilatorii, efectul Doppler-Fizeau, viteza sunetului

a. Consideraţii teoretice

1. Elongaţia, viteza şi acceleraţia unei mişcări oscilatorii armonice sînt date de relaţiile

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right).$$

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y$$

unde A este amplitudinea, ω — pulsaţia, T — perioada, iar φ — faza iniţială.

Frecvenţa f, perioada şi pulsaţia sînt legate prin relaţiile

$$\omega = 2\pi f, \quad T \cdot f = 1, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

2. Perioada oscilaţiei complete a unui pendul matematic este dată de relaţia

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

unde l este lungimea pendulului iar g — acceleraţia gravitaţiei.

3. Mişcarea oscilatorie armonică a unei mase m, produsă de o forţă elastică, este definită de relaţiile

$$k = m\omega^2, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

unde k este constanta elastică şi reprezintă forţa care deplasează masa m din poziţia ei de echilibru cu o distanţă egală cu unitatea.

Scanned with OKEN Scanner

4. Elongația unei oscilații la distanța x de sursa de origine este

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

unde λ este lungimea de undă.

5. Rezultanta a două mișcări oscilatorii paralele și de aceeași perioadă

$$y' = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right), \; y'' = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right)$$

este dată de ecuația

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\varphi}{2\pi} \right).$$

Amplitudinea mișcării rezultante și faza sînt date de relațiile

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \delta, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2}{a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2}$$

unde δ este diferența dintre fazele celor două mișcări componente, $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$.

Dacă cele două mișcări au o direcție comună, amplitudinea rezultantă este egală cu suma algebrică a amplitudinilor componente.

Frecvența bătăilor mișcării rezultante este dată de diferența dintre frecvențele componentelor

$$\Delta f = f_2 - f_1.$$

6. În fenomenul de interferență al oscilațiilor paralele cu aceeași diferență de fază dintre ele, maximele amplitudinii au loc pentru

$$\delta = 2k\pi \text{ sau } \Delta = k\lambda$$

iar minimele amplitudinii pentru

$$\delta = (2k+1)\pi \quad \text{sau} \quad \Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

unde $\Delta = x_2 - x_1$ este diferența de drum, $\delta = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda}$ diferența de fază, iar k — un număr întreg.

7. Suprapunerea a două mișcări oscilatorii în fază și de aceeași perioadă, pe direcții perpendiculare, dă tot o mișcare oscilatorie în fază cu ele, de aceeași perioadă și cu amplitudinea

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

8. *Efectul Doppler-Fizeau.* Sunetele de viteză v și frecvență f, produse de o sursă de vibrații, sînt percepute de un observator cu frecvențe date de relațiile

$$f_1 = f\frac{v}{v \pm u}, \quad f_2 = f\frac{v \pm w}{v}, \quad f_3 = f\frac{v \pm w}{v \pm u}$$

unde u este viteza sursei, iar w – viteza observatorului. În prima formulă, semnul minus se ia pentru apropierea sursei, iar semnul plus pentru îndepărtarea ei de observator. În relația a doua, semnul plus se ia pentru apropiere, iar minus pentru îndepărtarea observatorului de sursă. În relația a treia, se ia plus la numărător și minus la numitor cînd sursa și observatorul se apropie unul de altul, iar minus la numărător și plus la numitor cînd sursa și observatorul se depărtează unul de altul.

9. Numărul vibrațiilor dat de o sirenă cu m orificii și care face n rotații în timp de t secunde, este

$$f = \frac{mn}{t}.$$

10. Viteza de propagare a sunetului în gaze este

$$v = v_0\sqrt{1 + \alpha t}$$

unde v_0 este viteza sunetului în condiții normale de presiune și temperatură, α – coeficientul de dilatație al gazelor iar t – temperatura acestora.

11. Viteza sunetului într-un gaz, față de viteza lui în aer, în aceleași condiții de presiune și de temperatură este dată de formula

$$v_g = v_a\sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_g}}$$

unde v_g este viteza sunetului în gaz, v_a – viteza lui în aer, ρ_g – densitatea gazului, iar ρ_a – densitatea aerului.

12. Viteza sunetului într-un mediu elastic unidimensional este dată de relația

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

unde E este modulul de elasticitate al mediului, iar ρ – densitatea corpului prin care se propagă sunetul.

13. Lungimea unui tub sonor deschis, cu n noduri, este dată de relația

$$L = \frac{n\lambda}{2} = \frac{nv}{2f}.$$

Scanned with OKEN Scanner

14. Lungimea unui tub sonor închis, cu n noduri, este dată de relația

$$L = \frac{(2n-1)\,v}{4f}.$$

15. Frecvențele sunetelor produse de un tub: a) deschis la ambele capete; b) închis la ambele capete; c) deschis la un cap și închis la celălalt, sînt

$$\text{a) } f_{dd} = n \cdot \frac{v}{2L}, \quad \text{b) } f_{ii} = n \cdot \frac{v}{2L}, \quad \text{c) } f_{di} = (2n-1) \cdot \frac{v}{4L}$$

unde v este viteza sunetului, L — lungimea tubului, iar $n = 1, 2, 3, \ldots$ Pentru $n = 1$ se obțin frecvențele sunetului fundamental.

16. Frecvența oscilațiilor produse de o coardă de lungime L, diametru d și densitate ρ, supusă unei forțe de întindere F, este dată de expresia

$$f = \frac{n}{Ld}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}; \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Lungimile de undă ale sunetelor, $\lambda = 2L/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b. Probleme

5.1. Mișcarea arcului elicoidal este dată de ecuația $x = \sqrt{3}\cos 2t + \sin 2t$. Se cere:

a) Să se arate că această mișcare este oscilatorie armonică și să se determine elementele mișcării. b) Care sînt elongația, viteza și accelerația unui punct al arcului după timpul $t = \pi/6$ [s] (amplitudinea se va considera în cm)?

Rezolvare. a) Ecuația dată se poate scrie sub forma

$$x = \sqrt{3}\left(\cos 2t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2t\right).$$

Dacă notăm $\operatorname{tg}\varphi = 1/\sqrt{3}$, ecuația devine

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}\cos(2t-\varphi) = 2\cos(2t-\varphi) = 2\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$$

și reprezintă ecuația unei mișcări armonice cu amplitudinea $A = 2$, pulsația $\omega = 2$ perioada $T = 2\pi/\omega = \pi$, frecvența $f = 1/T = 1/\pi$ și faza inițială $\varphi = \pi/6$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru $t = \pi/6$, avem

$$x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ cm},$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t - \varphi) = -2\cdot 2\sin\frac{\pi}{6} = -2\text{ cm/s},$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t - \varphi) = -2\cdot 4\cos\frac{\pi}{6} = -4\sqrt{3}\text{ cm/s}^2.$$

† **5.2.** Pe un cărucior este fixată o bară orizontală de-a lungul căreia poate aluneca fără frecare un manșon de masă $m = 1$ kg. De manșon sînt legate două arcuri al căror coeficient de elasticitate comun este $k = 100$ N/m. Se imprimă brusc căruciorului o accelerație constantă, $a = 1$ m/s² și se cere: a) Ecuația de mișcare a manșonului și elementele mișcării. b) Energia cinetică a manșonului la revenirea în poziția de echilibru.

Rezolvare. a) Forța elastică a arcului, care comprimă manșonul în sens invers mișcării, este egalată de forța de inerție, adică

$$kx_0 = ma.$$

De aici rezultă

$$x_0 = A = \frac{ma}{k} = \frac{1\cdot 1}{100} = 0{,}01\text{ m} = 1\text{ cm}.$$

Perioada și pulsația mișcării sînt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}2\,\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2\,\pi} = 10.$$

Mișcarea manșonului este oscilatorie armonică de forma

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) = \sin(10\,t + \varphi).$$

Pentru aflarea fazei φ scriem că la timpul $t = 0$ elongația este zero, de unde rezultă $\varphi = 0$, iar $x = \sin 10\,t$.

b) Manșonul revine la poziția inițială după timpul $t = \pi/10$ și are viteza

$$v = 10\cos 10\cdot\frac{\pi}{10} = 10\cos\pi = -10\text{ cm/s},$$

$$W_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-0{,}1)^2 = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005\text{ J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.3. Pe o scîndură se află un corp cu masa $m = 1$ kg. Scîndura efectuează oscilații armonice în plan vertical, cu perioada $T = 1/2$ s și amplitudinea $A = 2$ cm. Se cere:

a) Forța de apăsare a corpului pe scîndură. b) Ce amplitudine A' ar trebui să aibă oscilațiile pentru ca corpul să înceapă să sară de pe scîndură. c) Dacă scîndura oscilează într-un plan orizontal cu perioada $T = 5$ s, corpul începe să alunece la o amplitudine $A'' = 0{,}6$ m. Care este coeficientul de frecare dintre scîndură și corp?

Rezolvare.

a) Accelerația mișcării oscilatorie este

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t = -0{,}02 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t =$$

$$= -0{,}02\,(4\pi)^2 \sin 4\pi t = -3{,}2 \sin 4\pi t.$$

Forța de inerție $F_i = ma = 3{,}2 \sin 4\pi t$.

Ecuația de echilibru dinamic a corpului este

$$mg - N + F_i = 0.$$

Din această ecuație scoatem reacțiunea N, egală și de sens contrar cu forța de apăsare

$$N = mg + F_i = 9{,}8 + 3{,}2 \sin 4\pi t.$$

Reacțiunea este maximă pentru $\sin 4\pi t = 1$, $4\pi t = \pi/2$, $t = \pi/8\pi = 1/8$ [s] $= T/4$ [s] și are valoarea

$$N_{max} = 9{,}8 + 3{,}2 = 13 \text{ N}.$$

b) Corpul începe să sară cînd se anulează reacțiunea, $N = 0$. În acest caz va trebui să avem

$$mg = -F_i, \quad g = a = A' \cdot \omega^2,$$

$$A' = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9{,}8}{16\pi^2} = \frac{9{,}8}{160} = 0{,}06125 \text{ m} = 61{,}25 \text{ mm}.$$

c) În acest caz, forța de inerție este egală cu forța de frecare și avem

$$\mu mg = ma, \quad \mu = \frac{a}{g} = \frac{A''\omega^2}{g} = \frac{0{,}6 \cdot (0{,}4\pi)^2}{9{,}8} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}16\pi^2}{9{,}8} =$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot 1{,}6}{9{,}8} \approx 0{,}1.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.4. Să se afle perioada oscilațiilor mici libere ale unui corp de masă m, fixat la mijlocul unei coarde subțiri de lungime l, care trece pe după un scripete și susține, la capătul liber, o greutate Q.

Rezolvare.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad k = \frac{4Q}{l}, \quad T = \pi \sqrt{\frac{ml}{Q}}.$$

†**5.5.** O lamă elastică este prinsă cu un capăt într-o menghină. La capătul liber are o masă $m = 88{,}2$ g. Cîte oscilații pe secundă face lama atunci cînd capătul ei liber se deplasează cu 5 cm sub acțiunea unei forțe $F = 4{,}41$ N.

Rezolvare. Constanta de elasticitate a lamei este

$$K = \frac{F}{d} = \frac{4{,}41}{5 \cdot 10^{-2}} = 88{,}2.$$

Perioada de oscilație a lamei este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}0882}{88{,}2}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{0{,}001} = 6{,}28 \cdot 0{,}032 = 0{,}2 \text{ s}.$$

Frecvența oscilațiilor este egală cu

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ s}^{-1}.$$

†**5.6.** Un acrobat avînd masa $M = 60$ kg, sare de la înălțimea $h = 5$ m pe o placă cu masa $m = 40$ kg, fixată pe un resort și rămîne acolo pînă la amortizarea oscilațiilor. Dacă constanta de elasticitate a resortului este $k = 9\,800$ N/m și se neglijează rezistența aerului, se cere:

a) Elongația plăcii în momentul săriturii. b) Perioada oscilațiilor plăcii.

(G. M. F., nr. 5/1963)

Rezolvare. a) Acrobatul lovește placa cu viteza $v_1 = \sqrt{2gh}$. După ciocnire, placa și resortul se vor deplasa cu viteza v, dată de relația

$$M v_1 + m v_2 = (M + m) v.$$

Întrucît $v_2 = 0$, rezultă

$$v = \frac{M}{M + m} v_1 = \frac{M \sqrt{2gh}}{M + m}.$$

Energia cinetică a sistemului după ciocnire va fi egală cu

$$W_c = \frac{1}{2}(M + m) v^2 = \frac{M^2 \cdot gh}{M + m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta se transformă în energie potențială a resortului și vom avea

$$\frac{M^2 gh}{M+m} = \frac{1}{2} k x_0^2, \quad x_0 = \sqrt{\frac{2M^2 gh}{k(M+m)}} = M\sqrt{\frac{2gh}{k(M+m)}} =$$

$$= 60\sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5}{9\,800 \cdot 100}} = 0{,}60\ \text{m};$$

$$\text{b)}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{100}{9\,800}} = 6{,}28\sqrt{0{,}01} = 0{,}628\ \text{s}.$$

5.7. O masă de 10 g atîrnată de un fir de cauciuc oscilează cu o perioadă de 0,2 s. Din două fire elastice de acest fel se confecționează o praștie. Ea se întinde lungindu-se cu 40 cm. Să se calculeze la ce înălțime se va ridica o piatră de 5 g aruncată vertical în sus de această praștie, dacă întreaga energie potențială a firelor elastice se transformă în energie potențială a pietrei.

(R. F. Ch., nr. 11/1965)

Rezolvare. În cazul oscilațiilor elastice, avem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

de aici rezultă

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m = \frac{4\pi^2}{0{,}2^2} \cdot 0{,}01 = \pi^2\ [\text{N/m}].$$

Energia potențială a firului elastic întins este

$$W = F_m x = \frac{F_0 + F_1}{2} x = \frac{0 + kx}{2} x = \frac{kx^2}{2}.$$

Întrucît avem două fire, energia totală este egală cu

$$W_t = 2W = kx^2.$$

Energia potențială a pietrei la înălțimea maximă este

$$W_p = mgh = kx^2.$$

Din această relație rezultă

$$h = \frac{kx^2}{mg} = \frac{\pi^2 \cdot 0{,}4^2}{0{,}005 \cdot 9{,}8} = 32 \cdot \frac{\pi^2}{9{,}8} \approx 32\ \text{m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.8. Două pendule oscilează în același timp și în același loc; primul face 10 oscilații în timp ce al doilea face numai 6 oscilații. Să se calculeze lungimile celor două pendule, știind că unul este mai lung decît celălalt cu 20 cm.

R e z o l v a r e. Fie t timpul în care au loc oscilațiile celor două pendule. Perioadele de oscilație ale pendulelor vor fi respectiv egale cu

$$T_1 = \frac{t}{10}, \quad T_2 = \frac{t}{6}.$$

Dacă l_1 și l_2 sînt lungimile celor două pendule, iar g accelerația gravitației, avem

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}.$$

Împărțind cele două relații una prin alta, obținem

$$\frac{10}{6} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}, \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{25}{9}.$$

Pe de altă parte, $l_2 - l_1 = 20$.

Din aceste relații rezultă $l_1 = 11{,}25$ cm și $l_2 = 31{,}25$ cm.

5.9. Un ascensor în care se află un ceasornic cu pendul, urcă vertical o înălțime $h = 78{,}48$ cu accelerația constantă $a_1 = 9{,}81$ m/s², după care coboară imediat cu aceeași accelerație. Pendulul a fost potrivit după un altul de jos, la fel cu el și care, în momentul pornirii, arăta ora 12 fix. Considerînd accelerația gravitației egală cu $g = 9{,}81$ m/s², se cere:

a) Lungimea pendulului. b) Ora exactă în momentul reîntoarcerii ascensorului în poziția de plecare. c) Ora indicată de pendulul din ascensor în acest moment.

R e z o l v a r e. a) Perioada completă a pendulului fiind de 2 s, avem

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81 \cdot 4}{4 \cdot 9{,}8596} = 0{,}995 \text{ m}.$$

b) Timpii de urcare și coborîre a ascensorului sînt

$$t_1 = t_2 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8g}{g}} = \sqrt{16} = 4 \text{ s}.$$

Rezultă că la reîntoarcerea ascensorului, va fi ora exactă 12 h 0 min 8 s.

Scanned with OKEN Scanner

c) Frecvențele oscilațiilor pendulului la urcare și coborîre sînt date de relațiile

$$\frac{f_1}{f} = \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{a_1 + g}{g}} = \sqrt{\frac{2g}{g}} = \sqrt{2}, \quad f_1 = f\sqrt{2} = \sqrt{2},$$

$$\frac{f_2}{f} = \frac{T}{T_2} = \sqrt{\frac{a_2 - g}{g}} = 0, \quad f_2 = 0.$$

Rezultă că la urcare, pendulul avansează, indicînd timpul

$$t_1' = t_1\sqrt{2} = 4\sqrt{2} = 5{,}64\,\text{s}.$$

La coborîre, pendulul stă pe loc și ceasornicul din ascensor nu va indica niciun timp.

Pendulul din ascensor va indica deci ora 12 h 0 min 5,64 s.

5.10. Să se calculeze accelerația gravitației g într-o localitate A de pe Pămînt știind că un ceasornic cu pendul, care indică ora exactă într-o altă localitate B, întîrzie în localitatea A cu 35 s în 24 ore. Pentru localitatea B, accelerația gravitației, $g' = 9{,}815\ \text{m/s}^2$.

Rezolvare. Să notăm cu t, timpul (în ore) în care are loc întîrzierea Δt, cu n numărul de oscilații complete și cu T perioada unei oscilații complete a pendulului din A. Aceleași elemente le vom nota cu n' și T' pentru pendulul din B. Numărul de oscilații și perioadele complete ale celor două pendule sînt date de relațiile

$$n = \frac{3600\,t - \Delta t}{2}, \quad n' = \frac{3600\,t}{2}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Numărul de oscilații fiind invers proporțional cu perioadele de oscilație, vom avea

$$\frac{n}{n'} = \frac{3600\,t - \Delta t}{3600\,t} = \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}}.$$

Din această relație scoatem

$$g = g' \cdot \left(\frac{3600\,t - \Delta t}{3600\,t}\right)^2 = 9{,}815\left(\frac{86\,400 - 35}{86\,400}\right)^2 = 9{,}807\ \text{m/s}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.11. Un ceasornic cu pendul de cupru, la temperatura de 0°C înaintează cu 7 s în 24 ore, iar la temperatura de 20°C rămîne în urmă cu 9 s în 24 ore. Se cere coeficientul de dilatație al cuprului.

Rezolvare. În 24 ore, la temperatura de 0°C, pedulul marchează

$$24 \cdot 3\,600 + 7 = 86\,400 + 7 = 86\,407 \text{ s}$$

în loc de 86 400 cît ar trebui să marcheze dacă ar merge exact; acestui timp îi corespund $n_0 = 86\,407/2 = 43\,203{,}5$ oscilații complete. La temperatura de 20°C, pendulul marchează $24 \cdot 3\,600 - 9 = 86\,400 - 9 = 86\,391$ s, care corespund la $n = 86\,391/2 = 43\,195{,}5$ oscilații complete.

Întrucît numărul de oscilații este invers proporțional cu perioadele complete respective, putem scrie

$$\frac{n_0}{n} = \frac{T}{T_0}; \quad \frac{43\,203{,}5}{43\,195{,}5} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{l(1+\alpha t)}{g}} : \; 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{1+\alpha t} = 1{,}000185.$$

Din această relație rezultă

$$\alpha = \frac{1{,}000185^2 - 1}{20} = \frac{0{,}000370}{20} = 1{,}85 \cdot 10^{-5} \text{ grd}^{-1}.$$

5.12. Durata de oscilație a unui pendul (fig. 194) este egală cu 3,14 s într-un loc unde accelerația gravitației este $g = 9{,}81$ m/s². Amplitudinea oscilației este de 60°. Să se calculeze energia potențială și energia cinetică într-un punct cu elongația de 45°, dacă discul pendulului are greutatea $G = 9{,}8$ N.

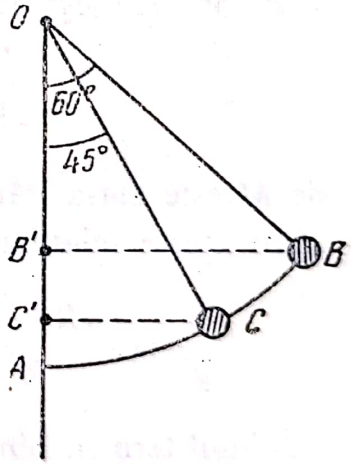


Fig. 194

Rezolvare. Lungimea pendulului este

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 2{,}4525 \text{ m}.$$

Înălțimea maximă la care se ridică pendulul față de poziția de echilibru este

$$AB' = h = l(1 - \cos 60°) = 2{,}4525 \cdot 0{,}5 = 1{,}22625 \text{ m}.$$

Viteza maximă în punctul A este

$$v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{24{,}0590} = 4{,}9 \text{ m/s}.$$

Înălțimea h' cu care se ridică pendulul în punctul C de elongație 45° este

$$AC' = h' = l(1 - \cos 45°) = 2{,}4525 \cdot 0{,}2929 = 0{,}718 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Energia potențială în punctul C este egală cu

$$W_p = Gh' = 9{,}8 \cdot 0{,}718 = 7{,}036 \text{ J}.$$

Energia cinetică în punctul C se deduce din relația

$$\frac{1}{2} mv_C^2 = \frac{1}{2} mv_A^2 - Gh',$$

$$W_c = \frac{1}{2} mv_C^2 = -Gh' + \frac{G}{2g} v_A^2 = G\left(-h' + \frac{v_A^2}{2h}\right) = 9{,}8 \cdot \left(-0{,}718 + \right.$$

$$\left. + \frac{24{,}059}{19{,}62}\right) = 9{,}8 \cdot 0{,}508 = 4{,}95 \text{ J}.$$

5.13. Un pendul este situat într-un loc A la nivelul mării, unde raza Pământului este $R = 6\,360$ km și $g = 9{,}81$ m/s². Se transportă pendulul în poziția B, pe verticala lui A, la o altitudine $h = 6\,360$ m. Ce influență are asupra mersului pendulului transportarea lui din poziția A în poziția B?

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1941)

Rezolvare. În același punct de pe suprafața Pământului, intensitatea gravitației variază cu altitudinea. Dacă g și g' sînt accelerațiile gravitației în A și B conform legii lui Newton putem scrie

$$g = \frac{kM}{R^2} \text{ și } g' = \frac{kM}{(R+h)^2},$$

unde M este masa Pământului, iar h înălțimea de ridicare.

Din aceste relații rezultă

$$\frac{g}{g'} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = \frac{R^2 + 2Rh + h^2}{R^2} = 1 + \frac{2h}{R} + \frac{h^2}{R^2}.$$

Ultimul termen fiind neglijabil, avem

$$\frac{g}{g'} = 1 + \frac{2h}{R} = 1 + \frac{12{,}720}{6\,360} = 1{,}002$$

de unde rezultă

$$g' = \frac{g}{1{,}002} = \frac{9{,}81}{1{,}002} = 9{,}79 \text{ m/s}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Frecvențele de oscilație fiind invers proporționale cu perioadele, vom avea

$$\frac{f'}{f} = \frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{g'}{g}}.$$

Întrucît jos pendulul bate secunda ($f = 1$), avem

$$f' = f\sqrt{\frac{g'}{g}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{9{,}79}{9{,}81}} = 0{,}9999.$$

Avînd frecvența mai mică la urcare, pendulul va întîrzia cu 0,0001 oscilații în fiecare secundă, iar în 24 ore el va întîrzia cu $86\,400 \cdot 0{,}0001 = 8{,}6$ s.

5.14. Într-o rachetă care pornește vertical în sus cu o accelerație constantă $a = 39{,}2$ m/s², se află un ceasornic cu pendul. De la înălțimea la care ceasornicul avansează cu 15 s față de un ceasornic de pe Pămînt, se detașează de rachetă un corp greu. Să se afle decalajul de timp între cele două ceasornice în momentul în care corpul greu atinge Pămîntul.

(R. F. Ch., nr. 12/1965)

Rezolvare. Fie t timpul exact arătat de ceasornicul de pe Pămînt și t' — timpul cît durează ridicarea și coborîrea corpului, indicat de ceasornicul din rachetă. Aceste timpuri fiind invers proporționale cu perioadele ($t' > t$) vom avea

$$\frac{t'}{t} = \frac{T}{T'} = \frac{\sqrt{g+a}}{\sqrt{g}}; \quad \frac{t'-t}{t} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\sqrt{g+a} - \sqrt{g}}{\sqrt{g}},$$

$$\Delta t = t \cdot \frac{\sqrt{g+a} - \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = t\left(\sqrt{1 + \frac{a}{g}} - 1\right), \qquad (1)$$

Dacă $\delta t = 15$ s reprezintă întîrzierea ceasornicelor în momentul lansării corpului din rachetă, timpul exact efectuat de rachetă pînă în acest moment, este

$$t_1 = \delta t \cdot \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g+a} - \sqrt{g}} = \frac{15 \cdot 3{,}13}{7 - 3{,}13} = 12 \text{ s}.$$

Înălțimea la care are loc detașarea corpului de rachetă este

$$h_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 39{,}2 \cdot 144 = 2822 \text{ m}.$$

Corpul își continuă mișcarea de ridicare cu viteza inițială $v_0 = at_1 = 39{,}2 \cdot 12 = 470$ m/s parcurgînd un spațiu $h_2 = v_0^2/2g = 11\,270$ m în timpul exact $t_2 = v_0/g = 470/9{,}8 = 48$ s.

Scanned with OKEN Scanner

Revenirea pe Pământ a corpului durează un timp

$$t_3 = \sqrt{2(h_1 + h_2)/g} = 53 \text{ s}.$$

Timpul total, $t = t_1 + t_2 + t_3 = 113$ s.
Înlocuind în relația (1) se obține

$$\Delta t = 113(\sqrt{1+4} - 1) = 139 \text{ s}.$$

5.15. Găleata unei fîntîni cu scripete se găsește la adîncimea de 12,8 m și, în urma unui șoc, începe să oscileze. Să se calculeze viteza cu care este scoasă găleata afară în mișcare uniformă, dacă în timp de 6,3 s, perioada găleții scade cu 6,28 s.

(G. M. F., nr. 8/1962)

Rezolvare.

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{l_1 - l_2}{6{,}3}, \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}},$$

$$T_1 - T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}(\sqrt{l_1} - \sqrt{l_2}) = \frac{6{,}28}{\sqrt{9{,}8}}(\sqrt{l_1} - \sqrt{l_2}) = 6{,}28,$$

$$\sqrt{l_1} - \sqrt{l_2} = \sqrt{9{,}8}; \quad \sqrt{l_2} = \sqrt{l_1} - \sqrt{9{,}8} = \sqrt{12{,}8} - \sqrt{9{,}8}$$

$$\sqrt{l_2} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(8 - 7) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad l_2 = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ m};$$

$$v = \frac{12{,}8 - 0{,}2}{6{,}3} = \frac{12{,}6}{6{,}3} = 2 \text{ m/s}.$$

5.16. Doi observatori stau în punctele A și B, egal depărtate de un zid, la distanța de 200 m (fig. 195). În punctul A se produce un sunet pe care observatorul din B îl aude cu o secundă înaintea aceluiași sunet reflectat de zid. Să se afle distanța între cei doi observatori, considerînd viteza sunetului în aer de 330 m/s.

Rezolvare. Pentru unda directă putem scrie relația

$$AB = x = vt \qquad (1)$$

în care v este viteza sunetului, iar t — timpul necesar sunetului pentru a parcurge distanța AB.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru unda reflectată în C putem scrie

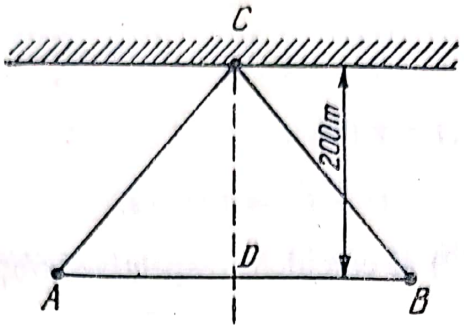


Fig. 195

$$AC + CB = v(t + 1). \tag{2}$$

Dar $$AC = CB = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + 40\,000.} \tag{3}$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem

$$AB = x = 77 \text{ m}.$$

5.17. Pe malul unui lac se produce o explozie. Un observator care se găseşte pe malul opus cu capul sub apă, aude zgomotul exploziei. Scoate imediat capul de sub apă şi aude din nou zgomotul exploziei după 10 s. Ce lăţime are lacul, dacă viteza sunetului în aer este 340 m/s, iar în apă 1 450 m/s?

Rezolvare. Dacă x este lăţimea lacului, vom avea

$$x = 1\,450\,t = 340\,(t + 10).$$

Scoţînd valoarea lui t din ultima egalitate, avem

$$t = \frac{340}{111} = 3{,}06 \text{ s}.$$

Înlocuind în prima relaţie rezultă

$$x = 1\,450 \cdot 3{,}06 = 4\,437 \text{ m}.$$

5.18. Un observator lasă să cadă o piatră într-o fîntînă şi după 3 s aude sunetul produs de piatră. Ştiind că viteza sunetului în aer este 340 m/s, se cere să se calculeze adîncimea fîntînii. Se va neglija rezistenţa aerului şi se va socoti $g = 9{,}80$ m/s^2.

Rezolvare. Fie x adîncimea fîntînii, t' timpul necesar pentru ajungerea pietrei la fund, t'' timpul necesar sunetului să străbată adîncimea fîntînii şi v viteza sunetului.

Timpii t' și t'' sînt dați de relațiile

$$t' = \sqrt{\frac{2x}{g}} \qquad \text{și} \qquad t'' = \frac{x}{v}. \tag{1}$$

Din enunțul problemei rezultă că

$$t' + t'' = t = 3\text{ s}. \tag{2}$$

Făcînd înlocuirile în (2) și calculele respective, obținem ecuația de gradul al doilea

$$gx^2 - 2v(v + gt)x + v^2 gt^2 = 0,$$

$$x = \frac{340}{9{,}80}(369{,}40 \pm 368{,}20) = 41{,}63\text{ m}.$$

5.19. După 8 s de la apariția primului fulger produs de o furtună se aude tunetul. Furtuna se apropie și după 30 s se vede al doilea fulger, iar după 4 s de la al doilea fulger se aude al doilea tunet. Să se afle cu ce viteză v' se apropie furtuna, dacă viteza sunetului în aer este egală cu 340 m/s (fig. 196).

Rezolvare. Distanța x_1 la care se află norii prima dată este egală cu

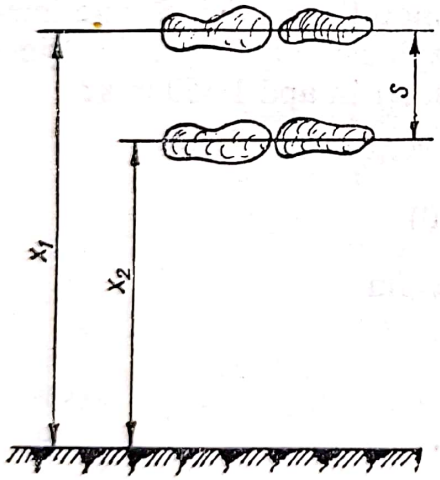


Fig. 196

$$x_1 = vt_1 = 340 \cdot 8 = 2\,720\text{ m}.$$

După primul fulger, norii coboară pe verticală timp de 30 s, aflîndu-se la distanța x_2, iar tunetul se aude a doua oară după 4 s, de unde rezultă

$$x_2 = vt_2 = 340 \cdot 4 = 1\,360\text{ m}.$$

Deducem v' din formula spațiului parcurs de nori în timp de 30 s

$$s = x_1 - x_2 = v't.$$

$$v' = \frac{x_1 - x_2}{t} = \frac{2\,720 - 1\,360}{30} = 45{,}33\text{ m/s} = 163\text{ km/h}.$$

5.20. Un observator spune un cuvînt din patru silabe timp de o secundă. Să se calculeze la ce distanță de el trebuie să se găsească un obstacol, astfel ca observatorul să poată pronunța un alt cuvînt format din cinci silabe, înainte de a fi auzit ecoul produs de primul cuvînt.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Dacă notăm cu x distanța de la observator la obstacol, timpul necesar primului cuvînt pentru a ajunge la obstacol și a se întoarce este egal cu $t = 2\,x/v$, unde v este viteza sunetului în aer.

Timpul necesar pentru pronunțarea unei silabe este egal cu $1/4 = 0{,}25$ s, iar timpul necesar pentru pronunțarea cuvîntului al doilea este

$$t' = 0{,}25 \cdot 5 = 1{,}25\ \text{s}.$$

Aflăm distanța x știind că t și t' trebuie să fie egali

$$\frac{2\,x}{v} = 1{,}25;$$

$$x = \frac{1{,}25\,v}{2} = \frac{1{,}25 \cdot 340}{2} = 212{,}5\ \text{m}.$$

5.21. Un diapazon care produce 1 000 vibrații pe secundă, vibrează la capătul deschis al unui tub închis, care are lungimea $l = 3{,}4$ m. Cunoscînd amplitudinea vibrațiilor diapazonului, $a = 0{,}02$ cm, se cere:

a) Lungimea de undă produsă de vibrațiile diapazonului. b) Distanțele la care rezultanta vibrațiilor incidente și reflectate de fundul tubului, are amlitudinea maximă și valoarea acestei amplitudini. c) Distanțele la care rezultanta vibrațiilor incidentă și reflectată are amplitudinea minimă și valoarea acesteia.

Rezolvare.

$$\text{a)}\ \lambda = vT = 340 \cdot \frac{1}{1\,000} = 0{,}34\ \text{m}.$$

b) Tubul fiind închis la capătul opus diapazonului reflexia se face cu un salt de fază egal cu π și ecuațiile vibrației incidente și reflectate la distanța x de capătul deschis sînt

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

$$y' = a \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l - x}{\lambda}\right) + \pi\right].$$

Diferența de fază va fi

$$\delta = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l - x}{\lambda}\right) + \pi - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{4\pi}{\lambda}(x - l) + \pi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Distanța x pentru care avem amplitudinea maximă rezultă din condiția

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda}(x - l) + \pi = 2k\pi; \quad x = \frac{\lambda}{4}(2k - 1) + l.$$

Amplitudinea maximă este dată de relația

$$A^2 = a^2 + a^2 + 2a\,a\cos 2k\pi = 4a^2, \qquad A = 2a.$$

c) Distanța x pentru care avem amplitudine minimă se obține din condiția

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda}(x - l) + \pi = (2k + 1)\pi, \quad x = \frac{\lambda}{2}k + l.$$

Amplitudinea minimă are valoarea

$$A^2 = a^2 + a^2 + 2a\,a\cos(2k + 1)\pi, \quad A = 0.$$

5.22. Frecvența oscilațiilor unui camerton (instrument muzical de produs sunete) este $f = 100$ Hz. Ce frecvență percepe urechea unui observator dacă: a) Camertonul se îndepărtează cu viteza sunetului. b) Camertonul se apropie cu viteza sunetului. c) Observatorul se apropie de camerton cu viteza sunetului. d) Observatorul se depărtează de camerton cu viteza sunetului.

(R. M. F., nr. 5/1953)

Rezolvare. a) Notînd cu v viteza sunetului și cu u viteza camertonului, frecvența percepută de observator va fi

$$f_1 = f\frac{v}{v + u} = 100 \cdot \frac{340}{340 + 340} = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50\ \text{Hz}.$$

b) În acest caz, avem

$$f_1' = f\frac{v}{v - u} = 100 \cdot \frac{340}{340 - 340} = \infty.$$

c) $f_2 = f\dfrac{v + u}{v} = 100 \cdot \dfrac{340 + 340}{340} = 200\ \text{Hz}.$

d) $f_2' = f\dfrac{v - u}{v} = 100\dfrac{340 - 340}{340} = 0.$

5.23. Un tren merge cu viteza de 20 m/s. El se apropie fluierînd și apoi trece de un observator care se află lîngă șine. Știind că sirena locomotivei emite un sunet de frecvență $f = 392$ Hz, care este diferența dintre frecvența

Scanned with OKEN Scanner

sunetelor percepute de observator cînd trenul se apropie și cînd trenul se depărtează? (Se dă $v = 340$ m/s).

(R. M. F., nr. 11/1952)

Rezolvare. Cînd trenul se apropie, frecvența sunetului perceput de observator este

$$f' = f\frac{v}{v-u}$$

iar cînd trenul se depărtează

$$f'' = f\frac{v}{v+u}.$$

Scăzînd cele două relații, găsim

$$f' - f'' = \frac{2ufv}{v^2-u^2} = \frac{2ufv}{(v+u)(v-u)}.$$

Înlocuind valorile cunoscute $u = 20$ m/s, $f = 392$ Hz, $v = 340$ m/s, găsim

$$f' - f'' = \frac{2\cdot 20\cdot 392\cdot 340}{360\cdot 320} = 46{,}3 \text{ Hz}.$$

5.24. Un motociclist aleargă cu 25 m/s după un automobil și percepe claxonarea acestuia ca un sunet de frecvență $f_1 = 481{,}1$ Hz. După ce depășește automobilul, motociclistul îi aude claxonarea ca un sunet de frecvență $f_2 = 391{,}5$ Hz. Cu ce viteză se mișcă automobilul și ce sunet emite claxonul său ($v = 340$ m/s)?

(R. M. F., nr. 12/1952)

Rezolvare. Înainte de depășirea automobilului, frecvența sunetului perceput de motociclist este egală cu

$$f_1 = f\frac{v+w}{v-u} \tag{1}$$

iar după depășirea automobilului

$$f_2 = f\frac{v-w}{v+u} \tag{2}$$

unde $w = 25$ m/s este viteza motociclistului, iar u este viteza automobilului.

Împărțind relația (1) prin (2) și făcînd înlocuirile, obținem

$$\frac{481,1}{391,5} = \frac{365 \cdot (340 + u)}{315 \cdot (340 - u)}$$

de unde rezultă

$$u = 9,98 \text{ m/s} \approx 10 \text{ m/s},$$

deci

$$f = \frac{f_1 (v - u)}{v + u} = \frac{481,1 \cdot 330}{350} = 455 \text{ Hz}.$$

5.25. Sirena unui vapor care se depărtează de chei emite un sunet înalt de 400 Hz. Observatorii de pe chei aud sunetul ca și cum ar avea frecvența de 395 Hz. Cu ce viteză se depărtează vaporul, viteza sunetului în aer fiind $v = 340$ m/s?

Rezolvare. Frecvența percepută de observatori este

$$f' = f \frac{v}{v + u}$$

unde f este frecvența sunetului emis de sursă, iar u viteza sursei (vaporului).

Din această relație rezultă

$$u = \frac{v (f - f')}{f'} = \frac{340 (400 - 395)}{395} = 4,3 \text{ m/s}.$$

5.26. O sirenă instalată pe un vapor care se deplasează spre mal cu viteza de 14,16 m/s este prevăzută cu un disc care are $m = 100$ orificii și turația $n = 6,25$ rot/s. Să se calculeze înălțimea sunetului recepționat pe mal, de un observator.

(G. M. F., nr. 10/1956)

Rezolvare. Numărul de vibrații produs de sirenă este

$$\nu = \frac{mn}{t} = \frac{100 \cdot 6,25}{1} = 625 \text{ Hz}.$$

Frecvența sunetului recepționat de observator este

$$f' = f \frac{v}{v - u} = 625 \cdot \frac{340}{340 - 14,16} = 652 \text{ Hz}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.27. Un tub sonor are lungimea de 0,5 m. Să se calculeze frecvența sunetului fundamental și frecvența armonicii a doua superioare, în următoarele cazuri:

a) Tubul este deschis la ambele capete. b) Tubul este închis la ambele capete. c) Tubul este închis la un capăt și deschis la celălalt. (Viteza sunetului în aer este de 340 m/s.)

(R. M. F., nr. 6/1954)

Rezolvare.

a) $f_1 = \frac{v}{2l} = \frac{340}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{340}{1} = 340 \text{ Hz}$.

Primele două armonice superioare au 680 Hz și 1 020 Hz.

b) $f_2 = \frac{v}{2l} = \frac{340}{1} = 340 \text{ Hz}$.

Primele două armonice superioare au 680 Hz și 1 020 Hz.

c) $f_3 = \frac{v}{4l} = \frac{340}{2} = 170 \text{ Hz}$.

Armonicele superioare au $3 \cdot 170 = 510$ Hz și $5 \cdot 170 = 850$ Hz.

5.28. Două tuburi de lungimi egale, $L = 1$ m, unul închis la un capăt și celălalt deschis la ambele capete, conțin aer la presiunea și temperatura normală; ele vibrează simultan producînd sunete fundamentale. Un automobilist se apropie de cele două instrumente cu viteza $u = 20$ m/s. Cunoscînd viteza sunetului în aer $v_0 = 331{,}8$ m/s, se cere:

a) Frecvența bătăilor sunetului perceput de automobilist. b) La ce temperatură ar trebui încălzit aerul din tubul deschis la ambele capete pentru ca automobilistul să nu mai audă bătăile.

Rezolvare. a) Frecvențele sunetelor fundamentale produse de cele două tuburi sînt egale cu

$$f_1 = \frac{v_0}{4L} = \frac{331{,}8}{4 \cdot 1} = 82{,}95 \text{ Hz},$$

$$f_2 = \frac{v_0}{2L} = \frac{331{,}8}{2 \cdot 1} = 165{,}90 \text{ Hz}.$$

Automobilistul va auzi sunetul cu frecvența

$$f = (f_2 - f_1)\frac{u + v_0}{v_0} = (165{,}90 - 82{,}95)\frac{20 + 331{,}8}{331{,}8} = 87{,}93 \text{ Hz}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Automobilistul nu mai aude sunetul atunci cînd $f_2 = f_1$, adică

$$\frac{v_0\sqrt{1+\alpha t}}{4L} = \frac{v_0}{2L}.$$

Din această relație rezultă

$$\sqrt{1+\alpha t} = 2, \quad 1+\alpha t = 4,$$

$$t = \frac{3}{\alpha} = 3 \cdot 273 = 819°\text{C}.$$

5.29. Un tub deschis la capete, cu lungimea $L = 0{,}5$ m emite oscilații cu lungimea de undă $\lambda = 1$ m.

a) Ce fel de sunet produce tubul. b) Se astupă tubul la un capăt și se cere lungimea de undă emisă de oscilațiile produse pentru același fel de sunet.

Rezolvare. a) La tuburile deschise, $L = n\frac{\lambda}{2}$,

$n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{1} = 1$. Tubul emite sunetul fundamental.

b) La aceste tuburi, $L = (2n-1)\frac{\lambda'}{4}$; $\lambda' = \frac{4L}{2n-1} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 1 - 1} =$

$= \frac{2}{1} = 2$ m.

5.30. Care este frecvența vibrației unei coarde sonore de argint cu lungimea de 40 cm, cu secțiunea $S = 1$ mm², dacă tensiunea aplicată coardei este $F = 10{,}51$ N? Ce lungime trebuie să aibă un tub sonor deschis pentru a emite același sunet, dacă în el undele sonore formează două noduri? De asemenea pentru un tub închis. Densitatea argintului este 10 510 kg/m³.

(R. M. F., nr. 2/1954)

Rezolvare. În formula coardelor avem, pentru $u = 1$,

$$f = \frac{1}{Ld}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{F}{4\rho S}} = \frac{1}{0{,}4}\sqrt{\frac{10{,}51}{4 \cdot 10{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}} = 39{,}5 \text{ Hz}.$$

Pentru $n = 2$ în formula tuburilor deschise, avem

$$f = \frac{v}{L}; \quad L = \frac{v}{f} = \frac{340}{39{,}5} = 8{,}6 \text{ m}.$$

Pentru $n = 2$ în tuburile închise la un capăt avem

$$f = \frac{3v}{4L}, \quad L = \frac{3}{4} \cdot \frac{v}{f} = 0{,}75 \cdot 8{,}6 = 6{,}45 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.31. O coardă fixată la ambele capete are lungimea de 60 cm. Pusă în oscilație prin ciupire, emite sunete proprii la care armonica a treia are frecvența de 100 Hz. Se cere:

a) Lungimea de undă a primei armonice și viteza de propagare a oscilațiilor în coardă. b) Timpul în care sunetul corespunzător acestor oscilații va ajunge la un observator așezat la distanța de 100 m în aer cu umiditatea relativă de 70% și cu temperatura de 27,3°C. Se consideră presiunea atmosferică $H = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m² și viteza sunetului în aerul uscat la 0°C de 330 m/s (Presiunea maximă a vaporilor saturanți la 27,3°C este $F = 3{,}57 \cdot 10^3$ N/m²). c) Lungimea de undă a sunetului în aer.

(R. F. Ch., nr. 5/1964)

Rezolvare. a) Din expresia lungimii coardei, $L = n\lambda/2$, se obține pentru prima armonică ($n = 2$), $\lambda_1 = L = 0{,}60$ m. Pentru armonica a treia ($n = 4$) se obține $\lambda_3 = L/2 = 0{,}30$ m $= v/f_3$; $v = \lambda_3 f_3 = 0{,}30 \cdot 100 =$ $= 30$ m/s.

b) Viteza sunetului în aer depinde de temperatură și de umiditate. Dacă notăm cu v_u – viteza sunetului în aer uscat la temperatura t și cu v_0 – viteza sunetului în aer uscat la temperatura $t = 0$, avem

$$v_u = v_0\sqrt{1 + \alpha t} = 330\sqrt{1 + \frac{27{,}3}{273}} = 345{,}5 \text{ m/s}.$$

Viteza sunetului în aer umed, în care presiunea vaporilor de apă este egală cu f, iar presiunea atmosferică este H, este dată de relația

$$v_h = v_u\left(1 + 0{,}16\frac{f}{H}\right). \qquad (1)$$

Din relația cunoscută anterior se deduce f

$$B = 100\frac{f}{F}; \quad f = \frac{B \cdot F}{100} = \frac{70 \cdot 3{,}57 \cdot 10^3}{100} = 2{,}5 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \cdot$$

Înlocuind în relația (1) rezultă

$$v_h = 345{,}5\left(1 + 0{,}16\frac{2{,}5 \cdot 10^3}{1{,}013 \cdot 10^5}\right) = 346{,}89 \text{ m/s}.$$

Timpul căutat este

$$t = \frac{S}{v_h} = \frac{100}{346{,}89} = 0{,}288 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Frecvența sunetului dată de prima armonică

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{30}{0{,}6} = 50 \text{ Hz}$$

iar lungimea de undă a sunetului în aer este dată de relația

$$\lambda = \frac{v_h}{f_1} = \frac{346{,}9}{50} = 6{,}938 \text{ m}.$$

5.32. Viteza sunetului într-un fir de oțel este de patru ori mai mare decît viteza sunetului în hidrogen. Cunoscînd viteza sunetului în aer, $v_a = 340$ m/s, densitatea aerului $\rho_a = 1{,}293$ kg/m^3, densitatea hidrogenului $\rho_H = 0{,}089$ kg/m^3 și densitatea oțelului $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3, se cere să se calculeze coeficientul de elasticitate al oțelului (modulul lui Young).

Rezolvare. Vitezele sunetului în fir și în hidrogen sînt

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_H = v_a \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_H}}.$$

Conform enunțului va trebui să avem

$$\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 4v_a \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_H}}$$

de unde rezultă

$$E = \frac{16 v_a^2 \rho \rho_a}{\rho_H} = \frac{16 \cdot 340^2 \cdot 7{,}8 \cdot 10^3 \cdot 1{,}293}{89 \cdot 10^{-3}} = 2{,}1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2.$$

5.33. Într-un mediu elastic, cu modulul de elasticitate $E = 6\,768{,}9 \cdot 10^7$ N/m^2 și densitatea $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3, se propagă vibrații cu frecvența de 500 Hz. Să se calculeze lungimea de undă a vibrațiilor.

Rezolvare.

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{6768{,}9 \cdot 10^7}{2{,}7 \cdot 10^3}} = \sqrt{25 \cdot 10^6} = 5000 \text{ m/s},$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{5000}{500} = 10 \text{ m/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

B. Oscilații și unde electromagnetice

27. Unde electromagnetice, circuite oscilante, tuburi electronice, radiocomunicații

a. Considerații teoretice

1. Viteza de propagare a undelor electromagnetice într-un mediu oarecare, este dată de relația

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

unde ε este permitivitatea mediului în F/m, iar μ — permeabilitatea magnetică a mediului exprimată în H/m. Pentru propagarea undelor în vid, $v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s (viteza luminii).

2. Lungimea de undă a undelor electromagnetice care se propagă cu viteza luminii este dată de relațiile

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{c}{f}$$

unde T este perioada, iar f — frecvența oscilațiilor.

3. Funcționarea aparatelor de radiocomunicații se bazează pe fenomenul de rezonanță al circuitelor oscilante

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{și} \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

unde T este perioada proprie de oscilație, iar f — frecvența oscilațiilor.

Condiția de rezonanță a două circuite oscilante de capacitate C_1 și C_2 și de inductanțe proprii L_1 și L_2 este dată de relația

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

4. Coeficientul de amplificare și panta tuburilor electronice, sînt date de relația

$$\mu = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_g}, \qquad S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_g}$$

unde ΔU_a și ΔU_g sînt variațiile de tensiune anodică și a grilei, iar ΔI_a — variația curentului anodic.

Scanned with OKEN Scanner

b. Probleme

5.34. O antenă de recepție are capacitatea de $\frac{4}{3} \cdot 10^{-10}$ F. Ce capacitate trebuie să aibă condensatorul aparatului de recepție pentru a recepționa unda de 628 m, știind că bobina lui are inductanța proprie de 0,0004 H?

Rezolvare. Capacitatea antenei, este

$$C_1 = \frac{120}{9 \cdot 10^{11}} = \frac{4}{3 \cdot 10^{10}} \text{F}.$$

Frecvența oscilațiilor circuitului este

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{628} = \frac{3 \cdot 10^6}{6{,}28} \text{ Hz}.$$

Dacă C este capacitatea totală a antenei și a condensatorului, iar L inductanța bobinei, avem

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{3 \cdot 10^6}{6{,}28}$$

de unde rezultă

$$C = \frac{1}{9 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{36 \cdot 10^8} \text{ F}.$$

Pe de altă parte, dacă C_2 este capacitatea condensatorului în derivație cu antena, avem

$$C = C_1 + C_2$$

de unde rezultă $C_2 = \frac{13}{9} \cdot 10^{-10}$ F.

5.35. Circuitul oscilant al unui aparat de recepție are capacitatea $C_1 = 1$ pF. Se cere: a) Inductanța circuitului oscilant pentru lungimea de undă $\lambda_1 = 600$ m. b) Cum trebuie legat și ce capacitate trebuie să aibă un alt condensator C_2, care, legat la primul să permită acordarea circuitului pe lungimea de undă $\lambda = 6\,000$ m. Se va lua $\pi^2 \approx 10$.

(R. F. Ch., nr. 2/1967)

Rezolvare. a) Din formulele $\lambda = cT$ și $T = 2\pi \sqrt{LC}$, rezultă

$$L = \frac{\lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 C_1} = \frac{36 \cdot 10^4}{4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 10^{-12}} = 10^{-1} \text{ H}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Capacitatea condensatorului echivalent C, care permite acordarea pe lungimea de undă $\lambda = 6 \cdot 10^3$ m, este

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} = \frac{36 \cdot 10^6}{4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 10^{-1}} = 10^{-10}\,\text{F} = 100\,\text{pF}.$$

Această capacitate fiind mai mare decît a condensatorului C_1, înseamnă că cel de-al doilea condensator C_2 trebuie montat în paralel și avem

$$C = C_1 + C_2; \quad C_2 = C - C_1 = 100 - 1 = 99\,\text{pF}.$$

5.36. În catalogul de tuburi electronice sînt indicate pentru trioda 6Ć2II următoarele date: panta triodei $S = 12$ mA/V, factorul de amplificare $\mu = 55$ și tensiunea anodică optimă 150 V. Se cere:

a) Valoarea rezistenței ohmice de sarcină cînd $U_g = 0$ pentru curentul anodic de 15 mA. b) Valoarea inductanței primarului transformatorului de cuplaj cu tubul următor pentru frecvența de 1 000 Hz. c) Puterea dată de triodă în ambele cazuri.

(R. F. Ch., nr. 6/1966)

Rezolvare. Se știe că

$$\mu = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_g}, \quad S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_g}, \quad R_i = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a}.$$

Din aceste formule rezultă relația

$$R_i = \frac{\mu}{S} = \frac{55}{12} = 4{,}6\,\text{k}\Omega.$$

a) $$I_a = \frac{U_a}{R_i + R_s}, \quad R_s = \frac{U_a}{I_a} - R_i = \frac{150}{15} - 4{,}6 = 5{,}4\,\text{k}\Omega.$$

b) $$I_a = \frac{U_a}{Z}, \quad Z = \frac{U_a}{I_a} = \frac{150}{15} = 10\,\text{k}\Omega,$$

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R_i^2} = \sqrt{10^2 - 4{,}6^2} \approx 9\,\text{k}\Omega = 9\,000\,\Omega,$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{9 \cdot 10^3}{6{,}28 \cdot 10^3} = 1{,}43\,\text{H}.$$

c) Puterea pentru cazul (a) este

$$P = RI^2 = 4\,600 \cdot \frac{225}{10^6} = 1{,}035\,\text{W}.$$

Puterea pentru cazul (b) este

$$P = UI\cos\varphi = X_L I^2 \cdot \frac{R_i}{Z} = 9 \cdot 10^3 \cdot \frac{225}{10^6} \cdot \frac{4{,}6 \cdot 10^3}{10^4} \approx 0{,}9\,\text{W}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.37. Ce capacitate trebuie să aibă un circuit oscilant care, legat în serie cu antena unui aparat de recepție, să elimine prima armonică a oscilațiilor emise de postul de radiodifuziune ce lucrează pe lungimea de undă de 397 m, dacă bobina circuitului oscilant are inductanța proprie de $2{,}2 \cdot 10^{-5}$ H?

(R. F. Ch., nr. 2/1966)

R e z o l v a r e. Se folosește un circuit oscilant derivație care, la rezonanță are curentul principal zero, deci prin bobina de antenă nu trece nici un curent (fig. 197). Frecvența de bază se determină din relația

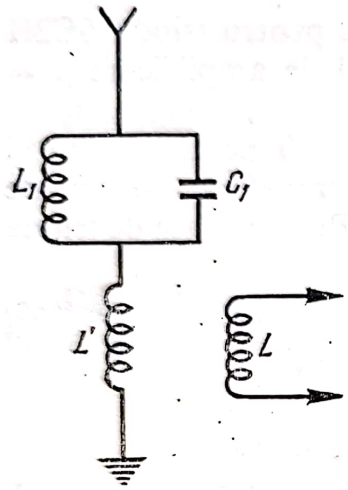


Fig. 197

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{397} = 7{,}56 \cdot 10^5 \text{ Hz}.$$

Prima armonică are frecvența

$$\nu_1 = 2\nu_0 = 2 \cdot 7{,}56 \cdot 10^5 = 15{,}12 \cdot 10^5 \text{ Hz}.$$

Frecvența de rezonanță este dată de relația

$$\nu = \nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Din această relație rezultă valoarea capacității

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 L_1 \nu_1^2} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}86 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 15{,}12^2 \cdot 10^{10}} \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{F}.$$

5.38. Antena unui post de radiorecepție are un circuit oscilant cu o capacitate de $2{,}578 \cdot 10^{-10}$ F asociată în paralel cu capacitatea proprie a antenei a cărei valoare este de $2{,}225 \cdot 10^{-10}$ F.

Să se afle inductanța proprie a circuitului astfel încît el să poată recepționa undele emise de antena postului de radioemisie care este alimentat de un generator de curent alternativ cu o pulsație de $794{,}42 \cdot 10^4$ s^{-1},

(R. F. Ch., nr. 8/1964)

R e z o l v a r e. Din expresia cunoscută pentru pulsație rezultă frecvența

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{794{,}42 \cdot 10^4}{6{,}28} = 1\,265\,000 \text{ Hz} = 1\,265 \text{ kHz}.$$

Capacitatea echivalentă a circuitului este

$$C = C_1 + C_2 = (2{,}578 + 2{,}225)\,10^{-10} \text{F} = 48 \cdot 10^{-11} \text{F},$$

$$L = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 \nu^2 C} = \frac{1}{4 \cdot 10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 \cdot 48 \cdot 10^{-11}} = 3{,}10^{-5} \text{H}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.39. Receptorul unui radioamator are reactanța inductivă de 16 kΩ și se acordă pe lungimea de undă de 1 884 m. Se cere:

a) Capacitatea circuitului oscilant. b) Ce se întîmplă dacă între unda recepționată direct de la sursă și o altă undă care vine prin reflexie în același moment, există o diferență totală de drum de 48,042 km. c) La ce diferență de fază corespunde această diferență de drum.

(Olimpiada de Fizică, 1965)

Rezolvare

a) $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi\nu}$; $\lambda = \frac{c}{\nu}$; $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$;

$$C = \frac{\lambda}{2\pi \cdot c \cdot X_L} = \frac{1\,884}{6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 16 \cdot 10^3} = 625 \cdot 10^{-13}\ \text{F}.$$

b) Dacă împărțim diferența de drum Δ prin jumătatea lungimii de undă obținem numărul întreg impar 51, ceea ce înseamnă că există un minim de interferență și nu se aude nimic.

c) $\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 51\,\pi.$

5.40. Voim să construim un post de radioemisiune pe o lungime de undă de 15 m. Pentru circuitul oscilant dispunem de un condensator cu capacitatea de 0,625 pF, iar pentru bobină dispunem de un cilindru cu lungimea de 4 cm și cu diametrul de 2 cm. Se cere lungimea firului utilizat pentru spirele bobinei.

(R. F. Ch., nr. 9/1965)

Rezolvare. Inductanța circuitului rezultă din relațiile

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{și} \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

$$L = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 C} = \frac{15^2}{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-13}} = 10^{-4}\ \text{H}.$$

Numărul de spire rezultă din formula

$$L=\mu_0\,\mu_r\,\frac{N^2\,S}{l}=4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot\frac{N^2\cdot\pi r^2}{l},$$

$$N=\sqrt{\frac{L\cdot l}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot\pi r^2}}=\sqrt{\frac{10^{-4}\cdot 4\cdot 10^{-2}}{4\pi^2\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 10^{-4}}}=100\text{ spire.}$$

Lungimea firului este

$$l_f=\pi\,dN=3{,}14\cdot 2\cdot 100=628\text{ cm}=6{,}28\text{ m.}$$

5.41. O bobină de inducție de 10^{-3} H formează un circuit oscilant împreună cu un condensator variabil. Știind că frecvența maximă a circuitului este de 500 kHz, iar intervalul de frecvență, care se poate produce în acest circuit este de 100 kHz, se cere:

a) Capacitatea maximă și minimă a condensatorului în pF. b) Dacă acest circuit face parte dintr-un aparat de radiorecepție avînd asociat în paralel cu capacitatea lui o antenă cu capacitatea proprie de $1{,}644\cdot 10^{-10}$ F să se găsească intervalul de lungimi de undă cu care se poate acorda circuitul.

(G. M. F., nr. 4/1961)

Rezolvare. a) Capacitatea minimă a circuitului este

$$C_{min}=\frac{1}{4\pi^2\cdot\nu_{max}^2\cdot L}=\frac{1}{4\pi^2\cdot(5\cdot 10^5)^2\cdot 10^3}=10^{-10}\text{ F}=100\text{ pF,}$$

$$\nu_{min}=\nu_{max}-100=500-100=400\text{ kHz.}$$

Capacitatea maximă a circuitului este

$$C_{max}=\frac{1}{4\pi^2\cdot\nu_{min}^2\cdot L}=\frac{1}{40\cdot 16\cdot 10^{10}\cdot 10^{-3}}=156\text{ pF.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Intervalul de lungimi de undă cu care se poate acorda circuitul este

$$\lambda_{max} - \lambda_{min} = 2\pi\sqrt{L}(\sqrt{C_{max} + C_A} - \sqrt{C_{min} + C_A}) =$$

$$= 2\pi\sqrt{10^{-3}}\left(\sqrt{1{,}56 \cdot 10^{-10} + 1{,}644 \cdot 10^{-10}} - \sqrt{10^{-20} + 1{,}644 \cdot 10^{-10}}\right) =$$

$$= 3{,}37 \cdot 10^{-12}\,\text{F} = 3{,}37\,\text{pF}.$$

5.42. Un circuit oscilant cu $L_1 = 10^{-3}$ H și $C_1 = 10^{-9}$ F are rol de excitator într-un al doilea circuit oscilant în repaus cu rol de rezonator și care are $L_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ H. Se cere: a) Ce capacitate trebuie să aibă al doilea circuit spre a fi în rezonanță cu primul. b) Pe ce lungime de undă se vor acorda circuitele cunoscînd că primul circuit este emițător, iar al doilea este receptor.

(R. F. Ch., nr. 5/1967)

Rezolvare. a) Din condiția de rezonanță a celor două circuite, $T_1 = T_2$, rezultă

$$2\pi\sqrt{L_1C_1} = 2\pi\sqrt{L_2C_2}, \qquad C_2 = \frac{L_1}{L_2}C_1 = \frac{1}{4} \cdot 10^{-9}\,\text{F}.$$

b) $\lambda = cT_1 = cT_2 = 2\pi c\sqrt{L_1\,C_1} = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 1884$ m.

5.43. Un circuit oscilant de recepție este prevăzut cu o antenă de capacitate proprie $C_1 = \frac{1}{3} \cdot 10^{10}$ F, asociată în paralel cu un condensator de capacitate variabilă, cu armături în formă de semicoroane circulare. Știind că bobina circuitului are inductanța proprie $L = 4 \cdot 10^{-4}$ H, iar capacitatea maximă a condensatorului este $C_m = 314$ pF, să se determine unghiul cu care trebuie rotite armăturile mobile față de cele fixe, astfel ca circuitul să se acorde pe lungimea de undă $\lambda = 628$ m.

(R. F. Ch., nr. 6/1967)

Scanned with OKEN Scanner

Indicație și răspuns. Capacitatea C, care rezultă din asocierea în paralel a lui C_1 cu $C_2 = \alpha C_{max}$, trebuie să aibă lungimea de undă λ astfel încît

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} = C_1 + \alpha C_{max}.$$

De aici rezultă unghiul $\alpha = 13/9$ rad $= 82°44'$.

5.44. Un post de radio recepționează un apel S.O.S. pe lungimea de undă $\lambda = 600$ m. Circuitul oscilant al postului are o bobină cu inductanța proprie $L = 100/980$ H. Rezistența totală a circuitului este $R = 30\,\Omega$, iar tensiunea $U = 6$ V. Se cere: a) Frecvența emisiei. b) Capacitatea condensatorului. c) Intensitatea curentului. d) Factorul de putere. e) Puterea activă și reactivă a aparatului.

(R. F. Ch., nr. 4/1967)

Rezolvare.

a) $\nu = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^2} = 5 \cdot 10^5$ Hz $= 500$ kHz.

b) $C = \dfrac{1}{4\pi^2 \nu^2 L} = \dfrac{1}{4 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 10^{10}} = 10^{-12}$ F $= 1$ pF.

c) $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{6}{30} = 0{,}2$ A.

d) Circuitul fiind în rezonanță, $Z = R$ și avem

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = 1; \qquad \sin\varphi = 0.$$

e) Puterea activă $P = UI\cos\varphi = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 1{,}2$ W, iar puterea reactivă, $Q = UI\sin\varphi = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

Optica

28. Propagarea luminii, fotometria

a. Considerații teoretice

1. Iluminarea unei suprafețe se măsoară, în sistemul internațional, în lucși (lx) și este dată de relația

$$E = \frac{\Phi}{S}$$

unde Φ este fluxul luminos în lumeni (lm), iar S – suprafața iluminată în m^2.

2. Iluminarea produsă pe o suprafață de o sursă luminoasă punctiformă este dată de relația

$$E = \frac{I}{d^2} \cos \alpha$$

unde I este intensitatea luminoasă a sursei, în candele (cd), d – distanța de la sursă la suprafață, în m, iar α – unghiul făcut de raza de lumină cu normala la suprafață.

3. Între intensitățile luminoase I_1 și I_2, care luminează în mod egal o suprafață, și distanțele de la sursele luminoase la suprafață, există relația de bază a fotometriei

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

b. Probleme

6.1. O sferă luminoasă O_1 cu raza $R = 10$ cm este așezată în fața unei sfere opace O_2 de rază $r = 5$ cm (fig. 198). Distanța dintre centrele celor două sfere este $O_1O_2 = d = 50$ cm. Se cere:

a) Distanța de la centrul sferei O_2 pînă la vîrful conului de umbră format de sfera O_2 luminată de sfera O_1. b) Diametrul maxim D al cercului de penumbră formată de sfera O_2, pe un paravan perpendicular pe linia centrelor celor două sfere și care trece prin vîrful conului de umbră.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Vîrful O al conului de umbră se obține ducînd tangentele exterioare la cele două sfere. Din asemănarea triunghiurilor AO_1O și BO_2O, se obține

$$\frac{R}{r} = \frac{d+x}{x}; \quad x = \frac{r \cdot d}{R-r} = \frac{5 \cdot 50}{10-5} = 50 \text{ cm}.$$

b) Conul de penumbră se obține ducînd tangentele interioare la cele două sfere. Dacă notăm cu I punctul de intersecție al tangentelor interioare, prin-

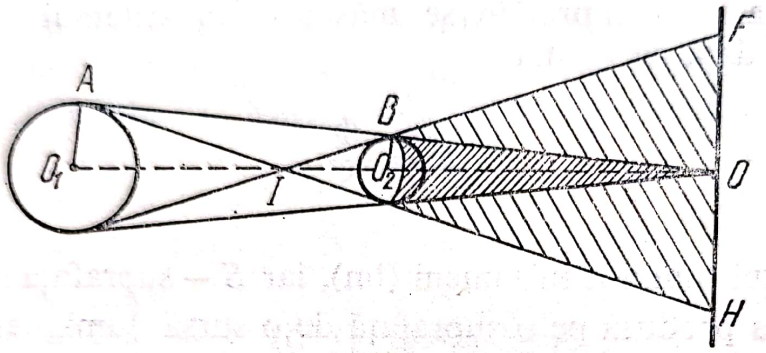


Fig. 198

tr-un calcul matematic (asemănări de triunghiuri și teorema lui Pitagora) se obține

$$FH = D = 42{,}10 \text{ cm}.$$

6.2. Două lumînări identice aprinse și puse una lîngă alta luminează un ecran așezat la distanța de 1 m. Să se calculeze la ce distanță de ecran trebuie să fie așezată numai o singură lumînare aprinsă, ca ecranul să fie luminat la fel?

(Adm. Facultatea de Arhitectură, 1956)

Rezolvare. Dacă I este intensitatea luminoasă a unei lumînări, d și d' distanțele lumînărilor pînă la ecran în cele două experiențe, iar E iluminarea produsă pe ecran avem

$$E = \frac{2I}{d^2} = \frac{I}{d'^2}, \qquad d' = \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{1\sqrt{2}}{2} = 0{,}707 \text{ m}.$$

6.3. Două ecrane se găsesc la distanțe diferite de un bec electric care le luminează. Iluminarea becului pe primul ecran este de 18 lx, iar iluminarea lui pe ecranul al doilea este de 2 lx. De cîte ori este mai mică distanța dintre primul ecran și becul luminos, decît distanța dintre ecranul al doilea și becul luminos?

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Dacă d_1 și d_2 sînt distanțele de la bec la primul și la al doilea ecran, E_1 și E_2 iluminările produse de bec pe fiecare dintre cele două ecrane, iar I intensitatea luminoasă a becului, putem scrie

$$E_1 = \frac{I}{d_1^2}, \qquad E_2 = \frac{I}{d_2^2}.$$

Din împărțirea acestor relații rezultă

$$d_1 = d_2 \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} = d_2 \sqrt{\frac{2}{18}} = \frac{d_2}{3}.$$

6.4. Distanța care separă flacăra unui bec de gaz de aceea a unei lumînări este de 3,6 m. Se cere să se afle în ce punct trebuie să așezăm un corp între cele două surse luminoase pentru ca el să fie egal luminat de fiecare sursă, presupunînd că intensitatea flăcării de gaz este de 16 ori mai mare decît a lumînării.

(Concursul de fizică, 6.V. 1951)

Rezolvare. Dacă x este distanța cerută, putem scrie

$$E = \frac{16\,I}{x^2} = \frac{I}{(3{,}6 - x)^2}$$

de unde rezultă ecuația

$$15\,x^2 - 115{,}2\,x + 207{,}36 = 0, \qquad x = 2{,}88 \text{ m}.$$

6.5. Deasupra unei curți, la înălțimea de 3 m, sînt așezate două becuri electrice, fiecare de cîte 100 cd. Ele se află la 4 m distanță unul de altul. Să se calculeze iluminarea pămîntului de sub fiecare bec (fig. 199).

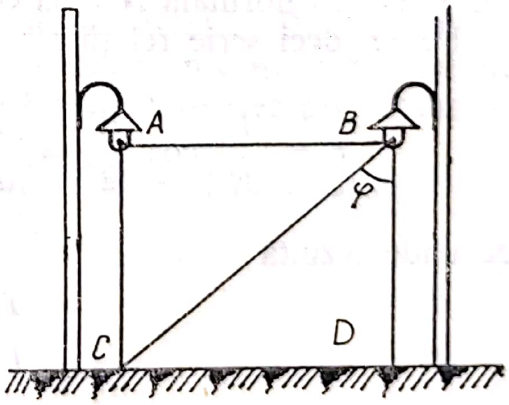


Fig. 199

Rezolvare. Iluminarea produsă în punctul C este egală cu iluminarea produsă de sursa A plus iluminarea produsă de sursa B, adică

$$E = \frac{I}{AC^2} + \frac{I}{BC^2}\cos\varphi =$$

$$= \frac{100}{9} + \frac{100}{25}\cdot\frac{3}{5} = 13{,}511 \text{ lx},$$

6.6. La înălțimea de 5 m deasupra pămîntului este așezat un bec electric de 200 cd. Iluminarea cea mai mare pe pămînt este exact sub becul electric,

în centrul suprafeței și descrește uniform în toate direcțiile. Care este aria cercului înăuntrul căruia iluminarea este mai mare decît un lux?

Rezolvare. Dacă x este raza cercului pe circumferința căruia iluminarea este de 1 lx, rezultă

$$E = \frac{I}{d^2}\cos\alpha = \frac{I}{d^2}\cdot\frac{h}{d} = \frac{I\cdot h}{(x^2+h^2)\sqrt{x^2+h^2}};$$

$$1 = \frac{200\cdot 5}{\sqrt{(x^2+25)^3}}, \qquad x = \sqrt{75} = 8{,}65\ \text{m},$$

$$S = \pi x^2 = 3{,}14\cdot 75 = 236\ \text{m}^2.$$

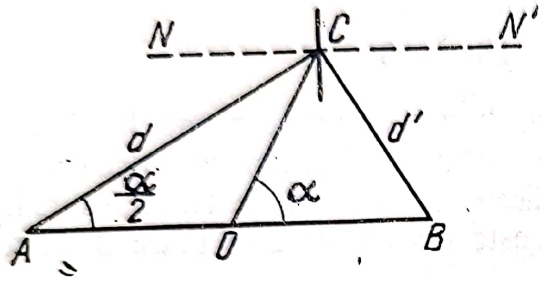


Fig. 200

6.7. Două surse de lumină A și B au intensitățile I și I', al căror raport este $I/I' = \sqrt{3}$. În jurul punctului O, în mijlocul lui AB (fig. 200), se rotește o tijă de lungime $OC = OA = OB$ care poartă la extremitatea C un ecran astfel aranjat încît să rămînă totdeauna perpendicular pe AB. Să se calculeze unghiul $\alpha = COB$ pentru care cele două fețe ale ecranului să fie egal luminate de sursele A și B.

Rezolvare. Intensitatea sursei A fiind mai mare decît a sursei B, ecranul se va afla mai aproape de B decît de A.

Fie d și d' distanțele AC și BC.

Observăm că triunghiul ACB este dreptunghic în C fiind înscris într-un semicerc și că $\widehat{CAO} = \alpha/2$, iar $\widehat{CBO} = 90° - \alpha/2$. Unghiurile făcute de razele AC și BC cu normala NN' la ecran sînt egale, respectiv, cu $\alpha/2$ și $90 - \alpha/2$.

Putem deci scrie relațiile

$$E = \frac{I}{d^2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{I'}{d'^2}\cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{I'}{d'^2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

de unde rezultă

$$\frac{I}{I'}\cdot\frac{d'^2}{d^2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ținînd seama că $d' = d\operatorname{tg}\alpha/2$ obținem

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{I'}{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha = 60°.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.8. O lampă de 27 cd este așezată în fața unei celule fotoelectrice la distanța de 3 m. Știind că sensibilitatea celulei este de 20 μA/lm (microamperi pe lumen) și aria catodului de 4 cm², se cere să se calculeze intensitatea curentului care ia naștere.

(G. M. F., nr. 9/1954)

Rezolvare. Iluminarea suprafeței catodului este egală cu

$$E = \frac{I}{d^2} = \frac{27}{3^2} = 3 \text{ lx}.$$

Fluxul luminos este egal cu

$$\Phi = ES = 3 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ lm}.$$

Relația care ne dă sensibilitatea unei celule fotoelectrice este egală cu

$$f = \frac{I}{\Phi} \tag{1}$$

unde I este intensitatea curentului care ia naștere.

Din relația (1) rezultă

$$I = f\Phi = 20 \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 240 \cdot 10^{-4} \mu\text{A} = 2{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ A}.$$

29. Reflexia luminii

a. Considerații teoretice

1. Imaginea unui obiect într-o oglindă plană se formează în spatele oglinzii, este virtuală și simetrică în raport cu obiectul.

2. Drumul razelor reflectate pe o oglindă sferică este: a) Razele paralele cu axa principală trec prin focar. b) Razele care trec prin centrul de curbură al oglinzii, se reflectă după același drum. c) Razele care trec prin focar, se reflectă paralel cu axa principală.

3. Formulele oglinzilor sferice (originea în vîrful S al oglinzii) sînt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} \tag{2}$$

în care p este distanța de la obiect la oglindă, p' – distanța de la imagine la oglindă, $f = SC/2 = R/2$ este distanța focală, R – raza oglinzii, i – mărimea imaginii și o – mărimea obiectului.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile p și p' sînt pozitive cînd obiectul sau imaginea sînt reale, și negative cînd acestea sînt virtuale; mărimea f este pozitivă pentru oglinzile concave și negativă pentru cele convexe, iar raportul i/o este pozitiv cînd imaginea este dreaptă în raport cu obiectul și negativ cînd imaginea este răsturnată.

b. Probleme

6.9. Un observator SH, a cărui înălțime este de 1,70 m se află în fața unei oglinzi AB verticală, plană, dreptunghiulară. Să se afle la ce înălțime deasupra pămîntului trebuie plasată marginea inferioară B a oglinzii și care trebuie să fie înălțimea oglinzii pentru ca observatorul să se vadă în întregime, oricare ar fi distanța de la oglindă. Se va admite că ochiul O se află la 10 cm sub creștetul capului (fig. 201).

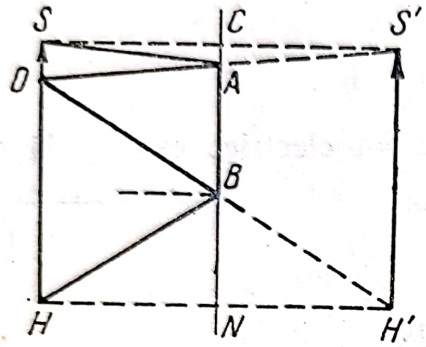


Fig. 201

Rezolvare. Imaginea lui SH este figura simetrică $S'H'$. Pentru ca observatorul să vadă punctul H', trebuie ca raza vizuală OH' să întîlnească oglinda, adică reflexia să aibă loc în punctul B. Rezultă că distanța maximă a marginii inferioare B față de sol, este egală cu

$$BN = \frac{OH}{2} = \frac{1{,}60}{2} = 0{,}80\ \text{m}.$$

Pentru ca observatorul să vadă vîrful imaginii, trebuie ca raza vizuală OS' să întîlnească oglinda. Rezultă că $CA = SO/2 = 5$ cm, deci înălțimea minimă a oglinzii trebuie să fie egală cu

$$BA = SH - BN - CA =$$
$$= 1{,}70 - 0{,}80 - 0{,}05 = 0{,}85\ \text{m}.$$

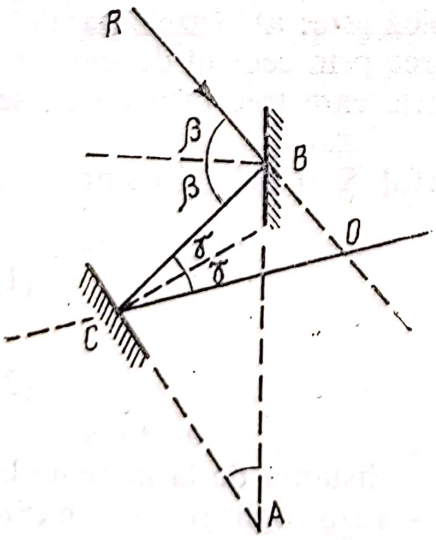


Fig. 202

6.10. Se dau două oglinzi plane B și C, perpendiculare pe planul hîrtiei (fig. 202). Să se demonstreze că, dacă raza luminoasă R cade pe oglinda C, după ce a suferit o primă reflexiune în B, a doua rază reflectată, face cu prima rază un unghi care este de două ori mai mare decît unghiul celor două oglinzi.

Rezolvare. Dacă notăm cu β unghiul de incidență al razei RB și cu γ unghiul de incidență al razei BC, rezultă imediat din triunghiul BOC

$$\widehat{BOC} + (180 - 2\beta) + 2\gamma = 180,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\widehat{BOC} = 2(\beta - \gamma). \qquad (1)$$

În triunghiul BAC, avem de asemenea

$$A + (90 + \gamma) + (90 - \beta) = 180$$

de unde

$$\hat{A} = \beta - \gamma. \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$\widehat{BOC} = 2\hat{A}.$$

6.11. O rază de lumină SI se reflectă succesiv pe două oglinzi plane, P, P' în planul perpendicular pe linia de intersecție a acestor oglinzi. Să se determine unghiul făcut de cele două oglinzi, știind că raza de lumină, după a doua reflexie, este perpendiculară pe raza incidentă SI (fig. 203).

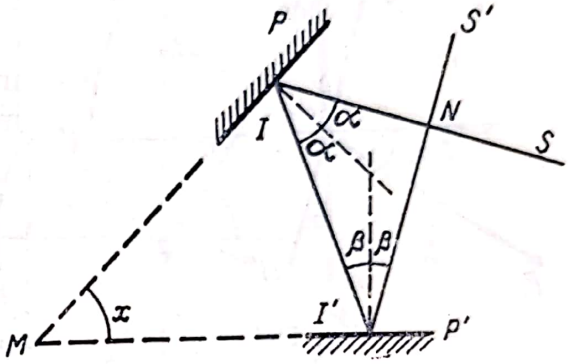


Fig. 203

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Să notăm cu α și β unghiurile de incidență și de reflexie, făcute de raze, cu oglinzile P și P'. În triunghiul $II'M$ putem scrie

$$(90 - \alpha) + (90 - \beta) + x = 180$$

de unde rezultă

$$x = \alpha + \beta \qquad (1)$$

unde x este unghiul celor două oglinzi.

În triunghiul $II'N$ putem scrie

$$2\alpha + 2\beta + 90 = 180$$

de unde rezultă

$$\alpha + \beta = 45°. \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$x = 45°.$$

6.12. Un fenomen luminos se reproduce de 435 de ori pe secundă. Un observator primește imaginile succesive ale fenomenului într-o oglindă plană,

Scanned with OKEN Scanner

plasată la distanța de 1 m de sursa luminoasă și care se rotește cu 5 rot/s. Să se calculeze distanța care separă două imagini consecutive ale fenomenului (fig. 204).

R e z o l v a r e. Fie A' imaginea fenomenului la timpul t și A'' imaginea fenomenului la timpul $t + 1/435$. În timp de 1/435 s oglinda se rotește cu unghiul α, iar raza reflectată IR se rotește cu 2α. Imaginea A' se găsește pe un arc de cerc de rază $IA' = 1$ m, iar distanța sa la imaginea A' este sensibil egală cu mărimea arcului $A'A''$.

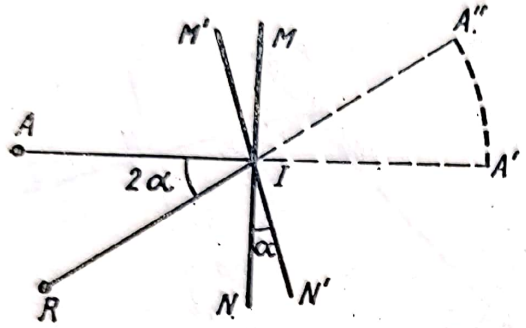


Fig. 204

Valoarea unghiului α, în radiani, este

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot 5}{435} = \frac{10 \cdot 3{,}1416}{435} = \frac{\pi}{43{,}5} \text{ rad.}$$

Lungimea arcului $A'A''$, în centimetri, este

$$A'A'' = 2\alpha \cdot RI = \frac{2 \cdot 10 \cdot 3{,}1416 \cdot 100}{435} = 14{,}4 \text{ cm.}$$

6.13. La unele instrumente optice, rolul acului indicator îl joacă o rază reflectată de o oglindă plană. Fie AB (fig. 205) oglinda plană, S izvorul luminos, SO raza incidentă, OS' raza reflectată, iar CD scara milimetrică așezată perpendicular pe $OS' = 5$ m. Cu ce unghi se rotește oglinda, dacă imaginea S' a izvorului luminos S, se mișcă pe scara milimetrică, din S' în S'' cu 32 mm?

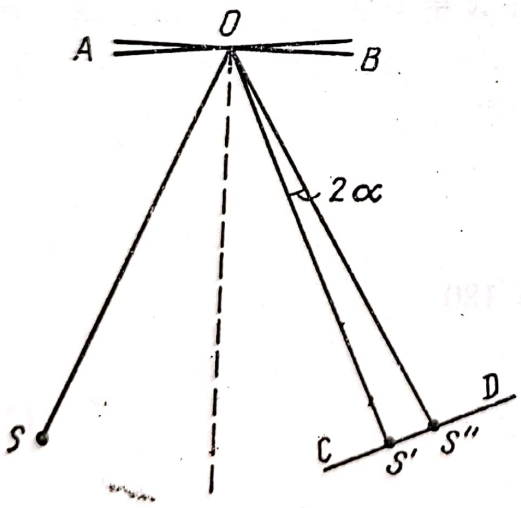


Fig. 205

R e z o l v a r e. Dacă oglinda se rotește cu unghiul α, raza reflectată se rotește cu 2α și din triunghiul dreptunghic $OS'S''$ rezultă

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{S'S''}{OS'} = \frac{32}{5\,000} = 0{,}0064,$$

$$2\alpha = 0^\circ\, 22'.$$

Rezultă că unghiul cu care se rotește oglinda este $\alpha = 0^\circ\, 11'$.

6.14. Să se construiască imaginile date de un corp luminos așezat în fața a două oglinzi plane care formează între ele un unghi de 90°. Cîte imagini se

Scanned with OKEN Scanner

formează? Dar dacă unghiul dintre oglinzi este de 60°, cîte imagini se formează?

Rezolvare. Fie M și M' cele două oglinzi perpendiculare în punctul O, iar S sursa de lumină așezată între cele două oglinzi (fig. 206). Simetricul lui S în raport cu oglinda M ne dă imaginea S_1; simetricul lui S în raport cu

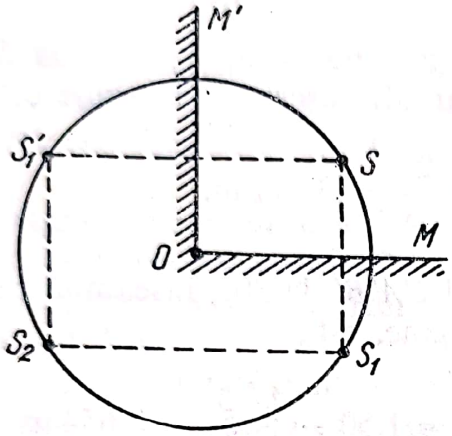


Fig. 206

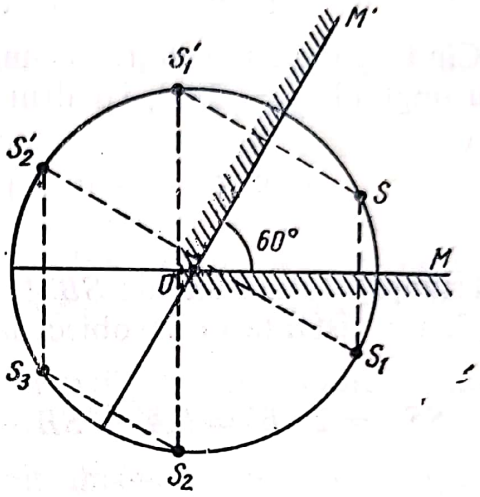


Fig. 207

oglinda M' ne dă imaginea S_1'; simetricele lui S_1 și S'_1 în raport cu oglinzile M' și M ne dau imaginea confundată S_2. Se formează deci trei imagini situate pe un cerc cu centrul în O și raza OS.

În cazul în care oglinzile fac un unghi de 60° (fig. 207) avem:

Imaginea S_1 simetrică cu S în raport cu oglinda M, imaginea S'_1 simetrică cu S în raport cu oglinda M', imaginea S_2 simetrica lui S'_1 în raport cu M, imaginea S'_2 simetrica lui S_1 în raport cu M' și imaginea S_3, simetrica confundată a lui S_2 și S'_2 în raport cu oglinzile.

Avem deci cinci imagini așezate pe un cerc cu centrul în O și raza OS.

6.15. O sursă de lumină S este plasată la distanța de 1,50 m de un dulap cu oglindă, exact pe perpendiculara care trece prin centrul oglinzii (fig.208). Deschizîndu-se ușa dulapului cu un unghi de 60°, se cere:

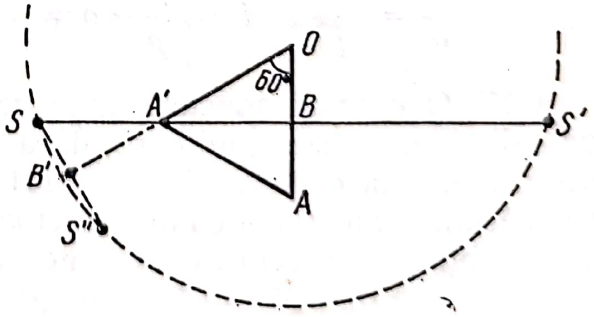


Fig. 208

a) Ce curbă descrie imaginea sursei în timpul rotației. b) Lungimea drumului străbătut de imagine în timpul rotației oglinzii. c) Să se afle distanța de la imagine la obiect în noua poziție a oglinzii. Lățimea oglinzii este de 1 m.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. a) Să notăm cu O axul de rotație și cu OA lățimea oglinzii. Oricare ar fi poziția oglinzii, imaginea S' a lui S este simetrică cu S față de oglindă, adică direcția oglinzii este perpendiculară pe jumătatea coardei SS''; rezultă că imaginea S'' descrie o circumferință cu centrul în O și cu raza

$$R = OS = \sqrt{SB^2 + OB^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}581 \text{ m}.$$

b) Cînd oglinda se rotește cu unghiul $\alpha = 60° = \pi/3$, imaginea S' se rotește cu unghiul $2\alpha = 2\pi/3$, iar drumul (arcul) descris de imagine este

$$\text{arc } S'S'' = 2\alpha R = 1{,}581 \cdot \frac{2\pi}{3} = 3{,}311 \text{ m}.$$

c) Triunghiul dreptunghic $SB'A'$ avînd $\widehat{SA'B'}$ de 30°, înseamnă că $SB' = SA'/2$, iar distanța de la obiect la imagine, este

$$SS'' = 2\,SB' = SA' = SB - A'B = 1{,}50 - \sqrt{\frac{3}{2}} = 0{,}654 \text{ m}.$$

6.16. În fața unei oglinzi concave cu raza de 1 m se așază un obiect luminos de 0,08 m înălțime, perpendicular pe axa principală și la o distanță de 3 m de oglindă; se cere să se determine poziția și mărimea imaginii.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1941)

Rezolvare

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}; \qquad p' = \frac{pR}{2p - r} = \frac{3 \cdot 1}{6 - 1} = 0{,}6 \text{ m}.$$

Mărimea imaginii rezultă din relația

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}, \quad i = \frac{p'}{p} \cdot o = \frac{0{,}6}{3} \cdot 0{,}08 = 0{,}016 \text{ m} = 16 \text{ mm}.$$

6.17. O oglindă concavă are raza de curbură de 20 cm. La ce distanță de oglindă este așezat un corp, dacă imaginea acestuia este prinsă clar pe un ecran așezat la o distanță de centrul optic de două ori cît raza de curbură? Ce mărime trebuie să aibă un obiect așezat în aceeași poziție cu primul, pentru ca să obținem pe ecran o imagine de 8 cm?

(Concursul de Fizică, 1952, R.M.F., nr. 6/1952)

Rezolvare. Ținînd seamă că

$$p = x, \quad p' = 3R \quad \text{și} \quad f = \frac{R}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{3R}=\frac{2}{R}\,;\quad x=\frac{3R}{5}=\frac{60}{5}=12\text{ cm}.$$

Mărimea obiectului rezultă din relația

$$\frac{i}{o}=\frac{p'}{p},\qquad o=\frac{p}{p'}\,i=\frac{12}{60}\cdot 8=1{,}6\text{ cm}.$$

6.18. Axa perincipală a unei oglinzi sferice concave cu raza $R = 5$ m și cu deschiderea $D = 1$ m este dirijată către centrul Soarelui.

a) Care este diametrul d al imaginii Soarelui, diametrul aparent al acestuia fiind 32′?

b) Imaginea Soarelui se prinde pe fața înnegrită a unei cutii de aramă care cîntărește 100 g și conține 500 g apă la 0°C. Peste cît timp va începe să fiarbă apa, știind că Soarele trimite, în fiecare minut, o cantitate de căldură de $8{,}374\cdot 10^4$ J/m²?

Se va presupune că oglinda reflectă numai 0,8 din căldura primită, iar căldura specifică a aramei este egală cu 376,83 J/kg·grd.

Rezolvare. a) Obiectul fiind la infinit, imaginea lui se formează în planul focal. Imaginea va fi un cerc de rază FA. Punctul F este imaginea centrului, iar punctul A este imaginea unui punct de pe periferia discului solar (fig. 209).

Din examinarea figurii rezultă

$$FA=FC\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{R}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2{,}5\operatorname{tg}16'.$$

Diametrul imaginii Soarelui va fi

$$d=AA'=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=5\operatorname{tg}16'.$$

Unghiul fiind mic, tangenta se confundă cu arcul și avem

$$d=AA'=5\cdot\frac{\pi\cdot 16}{180\cdot 60}=$$

$$=\frac{3{,}14\cdot 80}{10\,800}=0{,}023\text{ m}=23\text{ mm}.$$

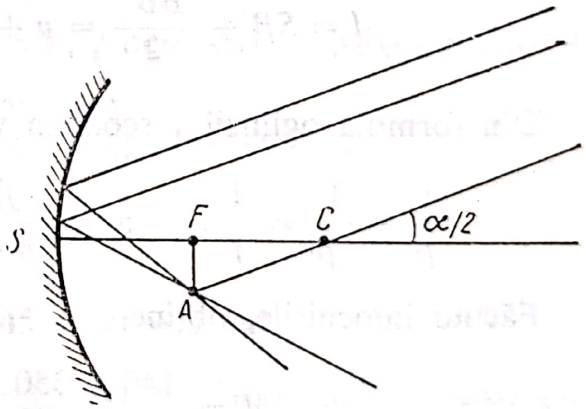


Fig. 209

b) Căldura produsă de razele Soarelui, care cad pe întreaga deschidere a oglinzii, este

$$Q=8{,}374\cdot 10^4\cdot 0{,}8\cdot\frac{\pi D^2}{4}\cdot t=5{,}24\cdot 10^4\,t$$

unde t este timpul necesar încălzirii.

Scanned with OKEN Scanner

Căldura absorbită de cutie și de apa din ea este

$$Q' = 0{,}100 \cdot 376{,}83 \cdot 100 + 0{,}500 \cdot 4187 \cdot 100 = 2 \cdot 125 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Din egalarea lui Q cu Q' rezultă

$$t = \frac{2 \cdot 125 \cdot 105}{5{,}24 \cdot 104} = 4 \text{ min și } 3 \text{ s}.$$

6.19. Se dă o oglindă sferică concavă cu raza de 2 m. La distanța de 1,40 m de vîrful S al oglinzii se plasează un mic cerc luminos cu raza de 1 cm, al cărui centru este pe axa principală a oglinzii (fig. 210). Se cere: a) Să se calculeze la ce distanță de vîrful S trebuie așezată o oglindă plană perpendiculară pe axă, pentru ca centrul imaginii să se confunde cu centrul cercului. b) Care va fi diametrul cercului acestei imagini?

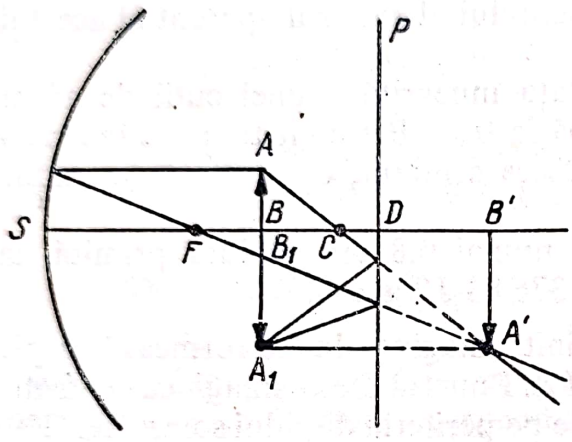


Fig. 210

Rezolvare. a) Fie AB raza cercului și $A'B'$ imaginea acesteia în oglinda sferică. Intercalînd oglinda plană P în punctul D, la jumătatea distanței BB', se formează imaginea A_1B_1 a lui $A'B'$. Distanța d a oglinzii P față de vîrful S este

$$d = SB + \frac{BB'}{2} = p + \frac{p' - p}{2} = \frac{p + p'}{2}.$$

Din formula oglinzilor scoatem valoarea lui p'

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}, \qquad p' = \frac{fp}{p - f} = \frac{100 \cdot 140}{140 - 100} = 350 \text{ cm}.$$

Făcînd înlocuirile, obținem

$$d = \frac{140 + 350}{2} = 245 \text{ cm} = 2{,}45 \text{ m}.$$

b) Raza imaginii se deduce din relația

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}, \quad i = \frac{p'}{p} \cdot o = \frac{350}{140} \cdot 1 = 2{,}5 \text{ cm}.$$

Diametrul cercului imaginii va fi egal cu $2i = 5$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

6.20. O oglindă sferică concavă are raza egală cu 60 cm. În fața acestei oglinzi se așază un obiect luminos de formă dreptunghiulară $ABDE$ (fig. 211) a cărei latură AB este dirijată după axa oglinzii. Se dă $SA = 90$ cm, $AB = 30$ cm, $AE = BD = 6$ cm. Se cere:

a) Să se construiască imaginea $A'B'D'E'$ a acestui obiect. b) Să se definească poziția, forma și dimensiunile acestei imagini. c) Să se calculeze aria S' a acestei imagini și să se compare cu aria S a obiectului.

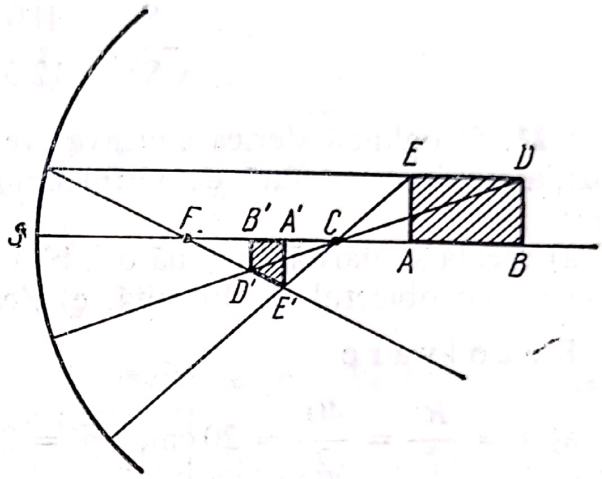


Fig. 211

Rezolvare. a) Construim imaginile D' și E' ale vîrfurilor D și E după regulile cunoscute. Imaginile A' și B' ale vîrfurilor A și B se află pe axa principală.

b) Imaginea formată este un trapez dreptunghic $A'B'D'E'$. Dacă notăm $SA = p$ și $SA' = p'$, putem scrie pentru punctul A

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

de unde rezultă

$$SA' = p' = \frac{fp}{p - f} = \frac{30 \cdot 90}{90 - 30} = \frac{2\,700}{60} = 45 \text{ cm}.$$

Dacă notăm $p_1 = SB = 120$ și $p'_1 = SB'$, putem scrie pentru punctul B

$$SB' = p'_1 = \frac{fp_1}{p_1 - f} = \frac{30 \cdot 120}{120 - 30} = 40 \text{ cm}.$$

Înălțimea trapezului $A'B'D'E'$ este

$$A'B' = SA' - SB' = 45 - 40 = 5 \text{ cm}.$$

Baza mare $A'E'$ și baza mică $B'D'$ ale trapezului imaginii sînt date de relațiile

$$\frac{EA}{E'A'} = \frac{p}{p'}, \qquad E'A' = \frac{p'}{p} \cdot EA = \frac{45}{90} \cdot 6 = 3 \text{ cm}.$$

$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{p_1}{p'_1}, \qquad B'D' = \frac{p'_1}{p_1} \cdot BD = \frac{40}{120} \cdot 6 = 2 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aria imaginii este

$$S' = \frac{(3+2)\cdot 5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5\ \text{cm}^2.$$

Aria obiectului este egală cu

$$S = AB\cdot AE = 30\cdot 6 = 180\ \text{cm}^2.$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{180}{12{,}5} = 14{,}4.$$

6.21. O oglindă sferică concavă are raza de curbură $R = 40$ cm. Se cere poziția unui obiect față de vîrful oglinzii, pentru care imaginea obiectului este:

a) Reală și mărită de două ori. b) Virtuală și mărită de două ori. c) Reală și egală cu obiectul. d) Infinită. e) Zero.

Rezolvare

a) $f = \frac{R}{2} = \frac{40}{2} = 20\ \text{cm}, \quad p' = 2\,\text{p},$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{f} = \frac{1}{20}, \qquad p = 30\ \text{cm}.$$

b) $\frac{1}{p} - \frac{1}{2p} = \frac{1}{20}, \qquad p = 10\ \text{cm}.$

c) $p' = p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} = \frac{1}{20}, \qquad p = 40\ \text{cm} = R.$

d) $p' = \infty, \quad \frac{1}{p} + 0 = \frac{1}{20}, \qquad p = 20\ \text{cm} = f.$

e) $\frac{p'}{p} = 0, \quad p = \infty, \quad 0 + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}, \quad p' = f = 20\text{cm}.$

6.22. Două oglinzi concave S_1 și S_2 au aceeași distanță focală f, concavitățile una spre alta, axele principale comune iar distanța între vîrfuri d. Să se găsească poziția x a unui punct P_1 situat pe axa comună a oglinzilor, astfel încît imaginile lui formate de cele două oglinzi să coincidă.

Aplicație numerică: $d = 40$ cm, $f = 7{,}5$ cm.

Răspuns. Dacă $x = S_1P_1$ avem

$$(2f - d)(x^2 - dx + fd) = 0.$$

În cazul aplicației avem $x_1 = 30$ cm, $x_2 = 10$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

6.23. Două oglinzi sferice, una concavă alta convexă, au aceeași axă principală și aceeași distanță focală de 2 cm. Distanța vîrfurilor $SS' = 5$ cm. La distanța de 3 cm de vîrful S al oglinzii concave se așază un obiect luminos AB cu mărimea de 3 mm, perpendicular pe axa principală (fig. 212). Acest obiect, reflectat de oglinda concavă dă o primă imagine $A'B'$ care, reflectată

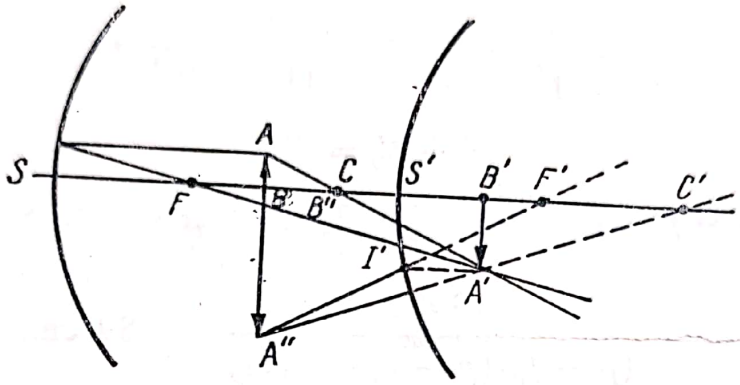


Fig. 212

de oglinda convexă, formează o a doua imagine $A''B''$. Să se construiască geometric aceste imagini și să se indice natura lor.

Rezolvare. Obiectul AB reflectat de oglinda concava, dă o imagine $A'B'$, reală și răsturnată la o distanță de vîrful S egală cu

$$p' = \frac{fp}{p-f} = \frac{2 \cdot 3}{3-2} = 6 \text{ cm}.$$

$A'B'$ joacă rolul de obiect virtual în oglinda convexă. Raza $A'I'$ paralelă cu axa principală se reflectă după direcția $F'I'$ și întîlnește prelungirea razei $C'A'$, în A'', producînd imaginea $B''A''$.

Se poate verifica ușor că $A'B' = 2AB$, iar $A''B'' = 2A'B' = 4\,AB$.

6.24. O oglindă sferică concavă de alamă cu axa principală orizontală se află la temperatura 0 °C. Un punct real A de pe axa principală, aflat la distanța invariabilă p de vîrful oglinzii produce o imagine reală A'. Se încălzește oglinda la temperatura t °C, vîrful O rămînînd fix. Noua imagine reală a punctului A se deplasează în A''. Se cere deplasarea $A'A'' = d$ pentru temperatura t.

Aplicație numerică: distanța focală la temperatura 0 °C este $f_0 = 50$ cm, coeficientul de dilatație liniară a alamei, $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}, temperatura $t = 100$ °C, $p = 51$ cm.

Rezolvare. Suprafața S a oglinzii după dilatare, este $S = S_0(1 + \alpha t)^2$, unde S_0 este suprafața ei la temperatura 0 °C. Ținînd seama că suprafețele sînt proporționale cu pătratul razelor, iar $R = 2f$ și $R_0 = 2f_0$, obținem

$$R^2 = R_0^2(1 + \alpha t)^2, \quad f = f_0(1 + \alpha t). \tag{1}$$

Notînd cu p'_0 și p' distanțele de la imagine la vîrful oglinzii pentru temperaturile 0 °C și t °C putem scrie relațiile

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'_0} = \frac{1}{f_0} \tag{2}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_0(1 + \alpha t)}, \tag{3}$$

$$p' - p'_0 = d. \tag{4}$$

Eliminînd p'_0 și p' din relațiile (2), (3) și (4) și scoțînd valoarea lui d, se obține

$$d = \frac{p^2 f_0 \alpha t}{(p - f_0)(p - f_0 - f_0 \alpha t)} = 289 \text{ cm}.$$

30. Refracția luminii

a. Considerații teoretice

1. Refracția luminii are loc după legea

$$\sin i = n \sin r$$

unde i este unghiul de incidență, r unghiul de refracție, iar n indicele de refracție al mediului al doilea, în raport cu primul.

Dacă n_1 și n_2 sînt indicii absoluți de refracție ai celor două medii, legea precedentă devine

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

2. Unghiul limită λ este valoarea pe care o are unghiul i_2 atunci cînd $i_1 = 90°$, adică

$$\sin \lambda = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n}.$$

3. Deplasarea aparentă AA' a unui punct A aflat într-un mediu cu indicele de refracție n, măsurată pe normala lui A la suprafața mediului, este dată de relația

$$AA' = d = h \cdot \frac{n - 1}{n}$$

în care h este grosimea mediului în care se află A, de la punctul A pînă la suprafața liberă a mediului.

Scanned with OKEN Scanner

4. Deviația (deplasarea laterală a razei emergente față de raza incidentă), într-o lamă cu fețele paralele, este

$$d = \frac{e \sin (i - r)}{\cos r};$$

dacă i și r sînt mici, atunci avem

$$d = ei \frac{n - 1}{n}$$

unde e este grosimea lamei, iar n indicele de refracție.

5. Formulele prismei sînt

$$\sin i = n \sin r;$$
$$\sin i' = n \sin r';$$
$$A = r + r';$$
$$D = i + i' - A,$$

unde i și r sînt unghiurile de incidență și de refracție pentru fața de intrare, i' și r' unghiurile de incidență și refracție pentru fața de ieșire, A este unghiul refringent (de la vîrful prismei), n indicele de refracție al prismei, iar D este unghiul de deviație totală (unghiul format de raza incidentă cu cea emergentă).

Dacă unghiurile A și i sînt mici

$$D = (n - 1) A.$$

6. Minimumul de deviație are loc cînd

$$i = i' \quad \text{și} \quad r = r' = \frac{A}{2}.$$

În acest caz avem

$$D_m = 2i - A, \quad n = \frac{\sin \frac{D_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}};$$

7. Formulele lentilelor subțiri cu originea în centrul optic, sînt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}, \quad \frac{i}{o} = \frac{p'}{p}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Notațiile sînt cele de la oglinzile sferice. La lentilele convergente cu imagini reale, p, p' și f se iau cu semnul (+), iar pentru imagini virtuale, p' se ia cu semnul (−). La lentilele divergente, p' și f, se iau cu (−).

8. Formulele lentilelor luînd ca origine focarele F și F' sînt

$$xx' = f^2, \quad \frac{i}{o} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f}$$

unde x este distanța de la obiect la focarul-obiect F, iar x' distanța de la imagine la focarul-imagine F'.

9. Distanța focală a lentilelor este dată de relația

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

în care n este indicele de refracție al lentilei în raport cu mediul în care trec razele de lumină, iar R_1 și R_2 sînt razele de curbură ale fețelor lentilei.

Pentru fețele convexe, razele se consideră pozitive, iar pentru fețele concave, razele se consideră negative.

10. Puterea unei lentile este

$$P = \frac{1}{f}$$

unde P este exprimat în dioptrii, iar f în metri.

11. Distanța focală F a unui sistem de lentile alipite este dată de relația

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \ldots + \frac{1}{f_n} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{F} = \sum \frac{1}{f_i}.$$

12. Puterea măritoare a unui aparat de proiecție este

$$M = \frac{D}{f}$$

unde D este distanța de la obiectiv la ecranul de proiecție.

13. Puterea optică a unei lupe este

$$P = \frac{1}{f}$$

unde P este puterea, iar f este distanța focală.

14. Grosismentul unei lupe este

$$G = Pd$$

Scanned with OKEN Scanner

unde P este puterea în dioptrii, iar d distanța minimă a vederii optime în metri. Pentru ochiul normal ($d = 25$ cm).

15. Puterea și grosismentul liniar al unui microscop sînt

$$P = \frac{\Delta}{Ff}, \qquad G = Pd = \frac{\Delta d}{Ff},$$

unde Δ este distanța celor două focare interioare, F distanța focală a ocularului, f distanța focală a obiectivului, iar d distanța minimă a vederii optime.

16. Distanța celor două lentile ale lunetei astronomice (semnul plus) și lunetei lui Galileu (semnul minus) este dată de relația

$$d = F \pm f$$

unde F și f sînt distanțele focale ale obiectivului și ocularului.

17. Grosismentul liniar al lunetei astronomice este

$$G = \frac{F}{f}.$$

b. Probleme

6.25. Pe fundul unui rîu limpede se află o pietricică (fig. 213). Un copil văzînd-o vrea s-o miște cu ajutorul unui băț drept. Ochind pietricica, el introduce bățul în apă sub un unghi de 45°. La ce depărtare de pietricică atinge bățul fundul pîrîului, știind că adîncimea apei este de 40 cm? Indicele absolut de refracție al apei este egal cu 1,33.

Rezolvare. Dacă pietricica se află în punctul O', bățul va atinge fundul rîului în O.

Din formula

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

rezultă

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1{,}33} = \frac{0{,}707}{1{,}33} = 0{,}5263$$

de unde $r = 31°45'20''$.

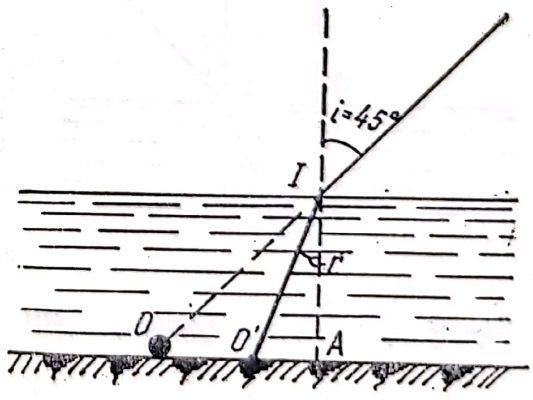


Fig. 213

Din examinarea figurii rezultă

$$OO' = OA - O'A = AI(\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} r) = 40(1 - 0{,}619) = 15{,}24 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.26. O cuvă în formă de cub cu latura de 20 cm este așezată pe un plan orizontal. Fie $ABCD$ (fig. 214) o secțiune dreaptă a cubului. Un observator se plasează astfel încît raza vizuală atinge marginea superioară și muchia opusă a cuvei în punctele A și C. În mijlocul M al bazei și în planul vertical trecînd prin ochi, se află un obiect strălucitor M. Să se calculeze înălțimea lichidului care trebuie turnat în cuvă astfel ca ochiul să vadă obiectul M după direcția OC. Indicele absolut de refracție al lichidului este egal cu $\sqrt{5/2}$.

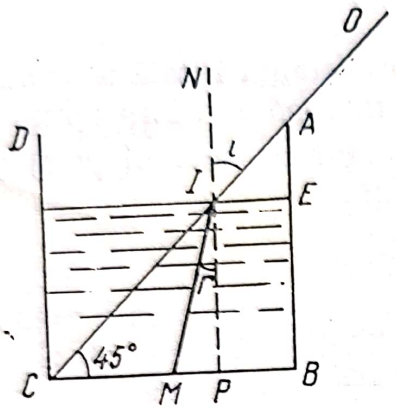


Fig. 214

Rezolvare. Triunghiul CIP fiind isoscel, rezultă că $CP = PI = x$.

Dacă notăm cu a latura cubului, putem scrie relația

$$CM + MP = PI,$$

sau făcînd înlocuirile

$$\frac{a}{2} + x \operatorname{tg} r = x, \qquad x = \frac{a}{2(1 - \operatorname{tg} r)}. \tag{1}$$

Din relația $\sin i / \sin r = n$, rezultă $\sin r = 1/\sqrt{5}$ și $\operatorname{tg} r = 1/2$.
Făcînd înlocuirile în (1) obținem $x = 20$ cm.

6.27. Un om care stă pe malul unui eleșteu privește o piatră aflată pe fundul acestuia. Adîncimea eleșteului este $h = 1$ m (fig. 215).

a) La ce distanță h' de suprafața apei se obține imaginea pietrei, știind că raza vizuală formează un unghi $i = 60°$ cu normala la suprafața apei? Indicele de refracție al apei este $n = 4/3$. b) Cu cît pare piatra mai ridicată față de fundul apei, atunci cînd este privită vertical?

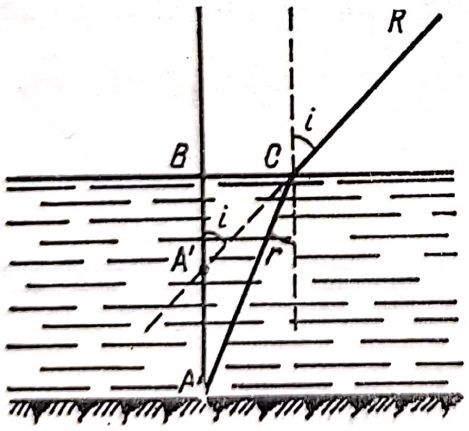


Fig. 215

Rezolvare. a) Dacă A este piatra, imaginea ei A' se află pe verticala lui A și în prelungirea razei RC. Din examinarea figurii rezultă

$$\operatorname{tg} i = \frac{BC}{BA'} \text{ și } \operatorname{tg} r = \frac{BC}{BA}.$$

Împărțind aceste relații, obținem

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} = \frac{BA}{BA'}$$

de unde

$$h' = BA' = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} \cdot h = 0{,}493. \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru unghiuri foarte mici, relația (1) se poate scrie

$$BA' = h' = \frac{r}{i} \cdot h = \frac{1}{n} \cdot h$$

de unde rezultă

$$AA' = BA - BA' = h - \frac{h}{n} = h \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ m}.$$

6.28. Pe suprafața inferioară a unui cilindru de rază r și indice de refracție n se aplică, în prelungirea axei AB, o lamă mică C cu fețele paralele (fig. 216) cu indicele de refracție $n' < n$. Să se calculeze la ce distanță maximă MN, față de baza cilindrului, va trebui să pătrundă o rază luminoasă pentru ca această rază, traversînd cilindrul după raza MB, să sufere în B o reflexie totală. Se va arăta, de asemenea, sub ce incidență va pătrunde raza în cilindru și condițiile de posibilitate ale problemei.

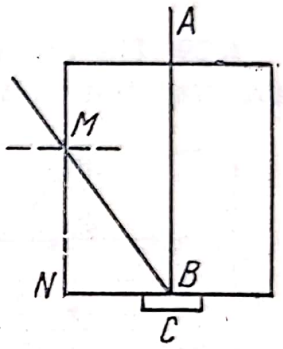


Fig. 216

Aplicație numerică: $n=1{,}612$; $n'=1{,}314$, $r=1{,}34$ cm.

Rezolvare. Pentru orice unghi MBA mai mare decît valoarea limită λ, raza MB suferă o reflexie totală; rezultă că distanța MN este maximă pentru $\widehat{MBA} = \lambda$.

Avem însă

$$n \sin \lambda = n', \quad \sin \lambda = \frac{n'}{n},$$

$$\frac{BN}{MN} = \frac{r}{MN} = \operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \frac{n'}{n \cos \lambda}$$

de unde rezultă

$$MN = \frac{nr}{n'} \cos \lambda = \frac{r\sqrt{n^2 - n'^2}}{n'}. \tag{1}$$

La intrarea razei în cilindru putem scrie

$$\sin i = n \sin (90 - \lambda) = n \cos \lambda = \sqrt{n^2 - n'^2}. \tag{2}$$

Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca

$$1 > \sqrt{n^2 - n'^2} > 0.$$

Întrucît $n' < n$, condiția de posibilitate este

$$\sqrt{n^2 - n'^2} < 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul aplicației avem

$$MN = \frac{1{,}34\sqrt{1{,}612^2 - 1{,}314^2}}{1{,}314} = 0{,}952.$$

Din relația (2) deducem

$$\sin i = \sqrt{1{,}612^2 - 1{,}314^2} = 0{,}9337,$$

$$i = 69°1'9''.$$

6.29. Un om privește la imaginea sa într-o oglindă situată pe fundul unui vas plin cu apă. La ce distanță de ochi se găsește imaginea aparentă a

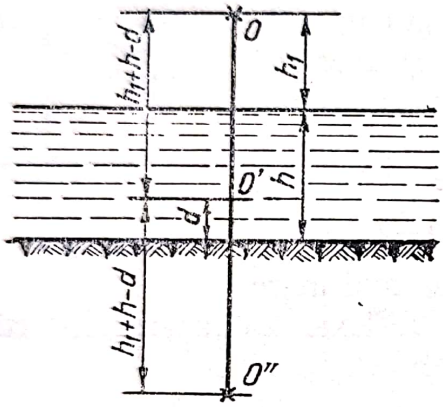


Fig. 217

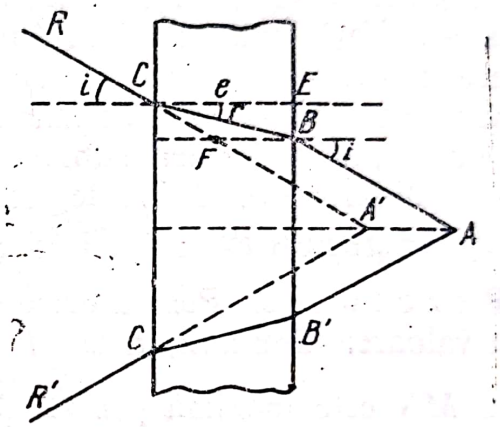


Fig. 218

ochiului în oglindă, dacă el se găsește la o înălțime $h_1 = 5$ cm deasupra nivelului apei, iar oglinda se găsește la o distanță de 8 cm sub nivelul apei (fig. 217).

(R. M. F., nr. 3/1962)

Rezolvare. Oglinda pare mai apropiată de suprafața apei cu distanța d, egală cu

$$d = h\frac{n-1}{n} = 8 \cdot \frac{4:3-1}{4:3} = \frac{8}{4} = 2 \text{ cm}.$$

Distanța de la ochi la imaginea sa în oglindă va fi deci

$$OO'' = 2(h_1 + h - d) = 2 \cdot (5 + 8 - 2) = 22 \text{ cm}.$$

Dacă n-ar exista apă în vas, distanța de la ochi la imaginea sa ar fi egală cu

$$OO'' = 2(h_1 + h) = 2 \cdot 13 = 26 \text{ cm}.$$

6.30. Un fascicul conic de raze luminoase BAB' cu unghiul de la vîrf $2i$, cade pe o lamă cu fețele paralele de grosime e și indice de refracție n. Să se calculeze ce poziție va avea vîrful conului de lumină după refracție în lamă (fig. 218).

Rezolvare. La intrarea și ieșirea razelor din lamă avem același mediu, de unde rezultă că raza incidentă este paralelă cu cea emergentă. Urmează că unghiul de la vîrful conului emergent este egal cu unghiul conului incident.

Dacă notăm cu x deplasarea $AA' = FB$, din triunghiul CFB scoatem

$$\frac{x}{\sin(i-r)} = \frac{CB}{\sin i} = \frac{e}{\sin i \cos r}$$

de unde

$$x = \frac{e \sin(i-r)}{\sin i \cos r} = e\left(1 - \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i}\right).$$

Ținînd seamă că $\sin i = n \sin r$, rezultă că

$$x = e\left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right).$$

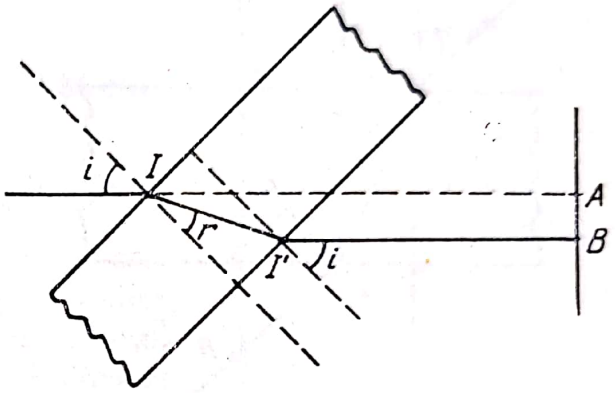


Fig. 219

6.31. O rază de lumină cade normal pe un ecran într-un punct A. Se așază în calea razei o lamă de sticlă cu fețele paralele, înclinată pe rază cu 45°. Raza care iese din lamă atinge ecranul în punctul B. Să se calculeze distanța AB, știind că indicele de refracție al lamei este $n = \sqrt{2}$, iar grosimea lamei $e = 10$ cm (fig. 219).

Rezolvare. Raza incidentă și cea emergentă sînt paralele. Din examinarea figurii rezultă

$$d = AB = II' \sin(i-r) = \frac{e \sin(i-r)}{\cos r}.$$

Cum $i = 45°$, $\sin r = \dfrac{\sin i}{n} = 1/2$, iar $\cos r = \sqrt{3}/2$ rezultă

$$d = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\cos r - \sin r) = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - 1) = 3 \text{ cm}.$$

6.32. O rază de lumină cade pe o lamă cu fețele paralele, suferind o refracție (fig. 220). Dacă unghiul de incidență $i = 30°$, grosimea lamei $e = 20$ mm și indicele de refracție al sticlei $n = 1{,}54$, să se afle:

a) Ce direcție are raza emergentă față de raza incidentă. b) Care este deplasarea $I'I''$ a punctului I' (punctul de unde iese raza emergentă) care se vede în I''. c) Care este deplasarea d a razei emergente față de raza incidentă?

Rezolvare. a) Cele două raze sînt paralele. b) Din triunghiul $II'I''$ scoatem

$$\frac{I'I''}{\sin(i-r)} = \frac{II'}{\sin(180-i)} = \frac{e:\cos r}{\sin i} = \frac{e}{\sin i \cos r}$$

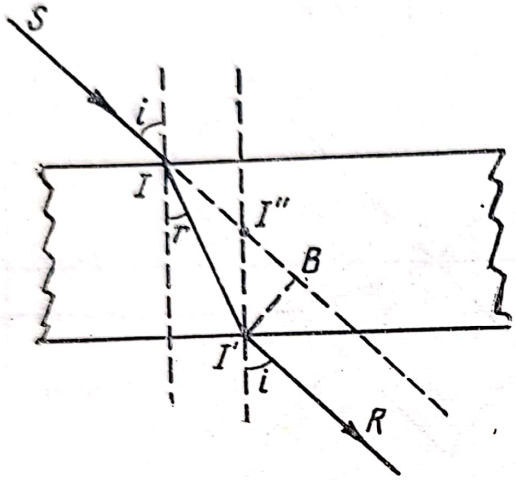


Fig. 220

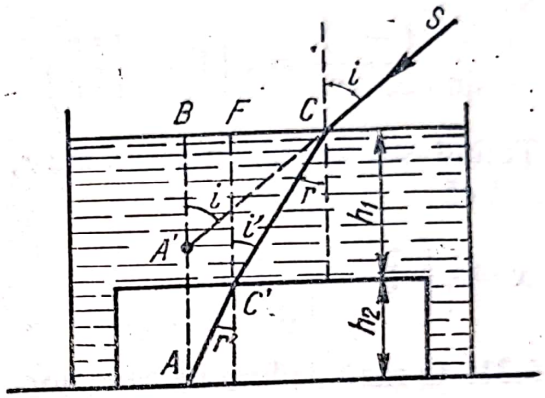


Fig. 221

de unde rezultă

$$I'I'' = h = \frac{e\sin(i-r)}{\sin i\cos r} = e\left(1 - \frac{1}{n}\cdot\frac{\cos i}{\cos r}\right) = 8{,}12\text{ mm}.$$

c) $I'B = d = II'\sin(i-r) = \dfrac{e\cdot\sin(i-r)}{\cos r}$.

Din relația $\sin i = n \sin r$, obținem $r = 18°55'$ și apoi $d = 4{,}05$ mm.

6.33. Pe fundul unui vas cu apă (fig. 221) se află o mică pată de rugină sub o lamă de sticlă cu fețele paralele și grosimea $h_2 = 10$ cm. Înălțimea apei deasupra lamei este $h_1 = 20$ cm. La ce distanță de suprafața apei se vede pata de rugină, știind că imaginea A' a ei este văzută de deasupra apei sub un unghi de incidență $i = 60°$? Indicii de refracție ai apei și sticlei, față de aer, sînt egali cu $n_1 = 4/3$ și $n_2 = 3/2$.

Rezolvare.

$BA' = BC\operatorname{ctg} i = (BF + FC)\operatorname{ctg} i = (h_2 \operatorname{tg} r' + h_1 \operatorname{tg} i')\operatorname{ctg} i$ și cum $i' = r$, urmează că

$$x = BA' = \operatorname{ctg} i\,(h_1 \operatorname{tg} r + h_2 \operatorname{tg} r'). \qquad (1)$$

Aplicînd legile refracției în punctele C și C', obținem

$$\sin r = \frac{\sin i}{n_1} = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad r = 40°30',$$

$$\sin r' = \frac{n_1}{n_2}\sin i' = \frac{n_1}{n_2}\sin r = \frac{8}{9}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

și $r' = 35°16'$.

Calculînd tg r și tg r' și înlocuind în relația (1), obținem

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}(20\cdot 0{,}8540 + 10\cdot 0{,}7072) \approx 13{,}86 \text{ cm}.$$

6.34. O prismă BAC cu fața AB argintată primește pe cealaltă față AC (fig. 222) o rază de lumină monocromatică a cărei direcție este perpendiculară pe fața argintată. Să se indice drumul razei luminoase și să se evalueze unghiul pe care îl formează cu normala la ieșirea ei din prismă.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1942)

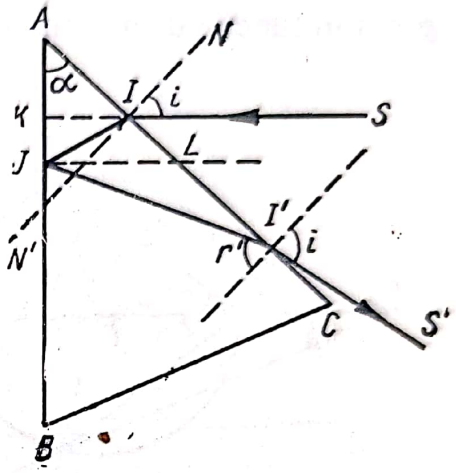


Fig. 222

R e z o l v a r e. Raza de lumină pătrunde în prismă în punctul I, sub unghiul de incidență i și se refractă sub unghiul r dat de relația

$$\sin i = n \sin r. \tag{1}$$

Ajungînd pe fața AB în J, raza IJ se reflectă și urmează drumul JI'. În punctul I' raza se refractă din nou. Între unghiurile r' și i' formate de razele JI' și $I'S'$ cu normala există relația

$$\sin i' = n \sin r'. \tag{2}$$

Dacă notăm $\hat{A} = \alpha$ și calculăm unghiurile, obținem

$$\widehat{AJI} = 180 - \alpha - (90 - r) = 90 - (\alpha - r), \quad \widehat{IJL} = 90 - \widehat{AJI} = \alpha - r,$$

$$\widehat{IJI'} = \alpha - r, \quad \widehat{AJI'} = 90 - (\alpha - r) + 2(\alpha - r) = 90 + \alpha - r,$$

$$\widehat{AI'J} = 180 - \alpha - 90 - \alpha + r = 90 - 2\alpha + r,$$

$$r' = 90 - (90 - 2\alpha + r) = 2\alpha - r.$$

Înlocuind în (2) și ținînd seamă de (1), avem

$$\sin i' = n \sin(2\alpha - r) = n(\sin 2\alpha\cdot\cos r - \cos 2\alpha\cdot\sin r) =$$

$$= \sqrt{n^2 - \sin^2 i}\cdot\sin 2\alpha - \sin i\cdot\cos 2\alpha.$$

Dar $i = A = \alpha$ și deci

$$\sin i' = \sin 2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \sin\alpha \cos 2\alpha.$$

6.35. O tijă cilindrică de sticlă ($n = 1{,}5$) are axa verticală. O rază de lumină pătrunde în tijă sub un unghi de incidență i, se reflectă parțial în A și revine în aer după raza KS (fig. 223). Se cere:

a) Să se calculeze unghiul ascuțit B format de raza incidentă și cea emergentă în funcție de unghiul de incidență i și de refracție r. b) Ce valoare trebuie să aibă i, pentru ca raza emergentă să fie paralelă cu cea incidentă?

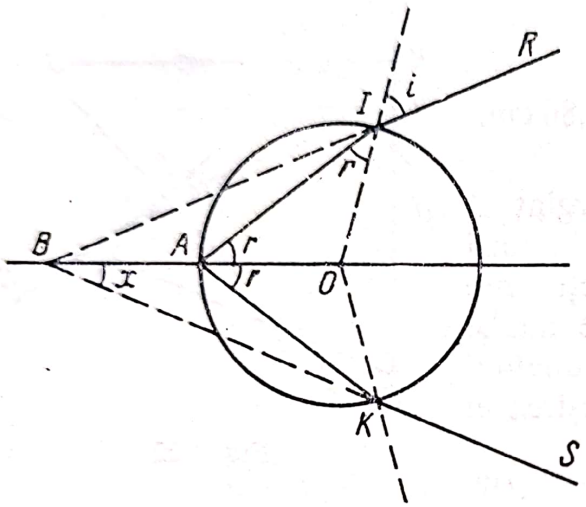


Fig. 223

Rezolvare. a) Raza IA formează cu AO un unghi r. Din examinarea figurii, rezultă imediat

$$x + (180 - r) + (i - r) = 180,$$

$$x = 2r - i.$$

b) Pentru ca razele RI și KS să fie paralele, trebuie ca $x = 0$, adică

$$2r - i = 0, \qquad r = \frac{i}{2}.$$

Aplicînd sinusul în ambii membri și ținînd seamă că $\sin i = n \sin r$ obținem

$$\cos\frac{i}{2} = \frac{n}{2} = 0{,}75, \qquad i = 82°49'.$$

6.36. O rază monocromatică de lumină cade pe fața unei prisme sub un unghi de incidență $i = 60°$ și iese din prismă sub un unghi $i' = 60°$. Știind că indicele de refracție al materialului din care este făcută prisma este $\sqrt{3}$, să se afle unghiul de referingență al prismei.

(G. M. F., nr. 6/1956)

Rezolvare. Întrucît $i = i'$, ne găsim în cazul deviației minime și putem scrie

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{n}\sin\frac{D_m + A}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin i = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă

$$\frac{A}{2} = 30°, \qquad A = 60°.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.37. Pentru unghiul de incidenţă de 36°, o prismă de sticlă are unghiul de deviaţie minimă de 26° (fig. 224). Se cere să se calculeze:

a) Unghiul de refringenţă al prismei. b) Indicele de refracţie. c) Deviaţia totală pentru un unghi de incidenţă $i_1 = 60°$.

Rezolvare. a) Din relaţia

$$D_m = 2i - A$$

rezultă

$$A = 2i - D_m = 72 - 26 = 46°.$$

b) Cunoscînd deviaţia minimă şi unghiul de refringenţă, se găseşte

$$n = \frac{\sin\frac{D_m + A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\sin 36°}{\sin 23°} = 1{,}5.$$

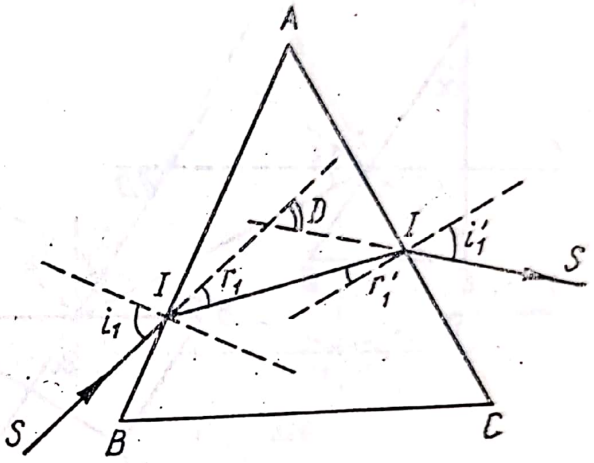


Fig. 224

c) Unghiul de refracţie la intrarea razei în prismă rezultă din

$$\sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\sin 60°}{1{,}5} = 0{,}57737, \quad r_1 = 35°16'.$$

Unghiul de refracţie pe faţa a doua este egal cu

$$r_1' = A - r_1 = 46° - 35°16' = 10°44'.$$

Unghiul format de raza emergentă cu normala rezultă din relaţia

$$\sin i_1' = n \cdot \sin r_1' = 1{,}5 \cdot 0{,}186 = 0{,}279, \quad i' = 16°12'.$$

Deviaţia totală a prismei este egală cu

$$D = i_1 + i_1' - A = 76°12' - 46° = 30°12'.$$

6.38. O rază monocromatică, situată în secţiunea dreaptă a unei prisme cu unghiul de refringenţă A, cade pe faţa de intrare sub unghiul de incidenţă i. Să se calculeze unghiul de incidenţă i şi unghiul de deviaţie totală, astfel ca raza refractată să iasă normal pe a doua faţă a prismei, pentru următoarele cazuri

a) $A = \frac{\pi}{4}$, $n = \sqrt{2}$, b) $A = \frac{\pi}{6}$, $n = \sqrt{3}$, c) $A = \frac{\pi}{6}$, $n = 2$.

Rezolvare. Întrucît unghiul $i' = 0$, din relația

$$\sin i' = n \sin r' \text{ rezultă } r' = 0.$$

Formulele prismei se reduc, în acest caz, la

$$A = r \text{ și } D = i - A.$$

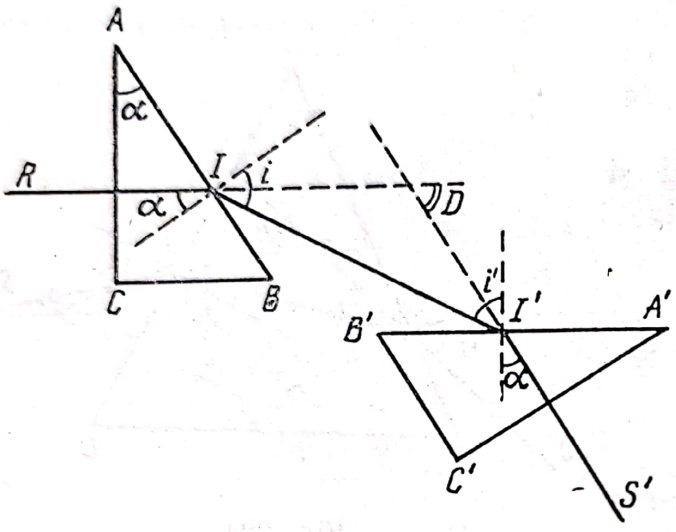


Fig. 225

Ținînd seamă de aceste relații și de legea fundamentală a refracției, rezultă

$$\sin i = n \sin A.$$

În cazul aplicațiilor obținem

a) $i = 90°$, $D = 45°$. b) $i = 60°$, $D = 30°$. c) $i = 90°$, $D = 60°$.

6.39. Se dau două prisme identice ABC și $A'B'C'$ dreptunghice în C și C'. Aceste prisme sînt dispuse în așa fel, încît o rază de lumină normală pe fața AC, iese normal pe fața $A'C'$ (fig. 225). Să se traseze mersul razei de lumină și să se determine deviația, cunoscînd valoarea α a unghiurilor A și A' și indicele de refracție n al prismelor, în raport cu aerul.

Aplicație: $n = \sqrt{2}$, $\alpha = 30°$.

Rezolvare. Razele RI și $I'S'$, căzînd perpendicular pe fața de intrare și pe cea de ieșire, nu sînt refractate în interiorul prismelor.

La ieșirea din prima prismă și la intrarea în cea de-a doua, putem scrie

$$\sin i = n \sin \alpha, \quad \sin i' = n \sin \alpha$$

de unde rezultă $i = i'$.

Deviația este

$$D = (i - \alpha) + (i' - \alpha) = 2(i - \alpha).$$

În cazul aplicației, avem

$$\sin i = \sqrt{2} \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad i = 45°; \quad D = 30°.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.40. O prismă de sticlă are indicele de refracție n și secțiunea dreaptă un triunghi echilateral ABC, de latură a. În această secțiune și paralel cu BC, cade pe fața AB o rază de lumină SI, se refractă după direcția IM, se reflectă în M pe BC după direcția MI' și se refractă în I' pe fața AC după direcția $I'R$ (fig. 226). Să se arate că direcțiile SI și $I'R$ sînt paralele. Să se calculeze suma $h + h' = IH + I'H'$ a distanțelor de la baza BC pînă la razele SI și $I'R$.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

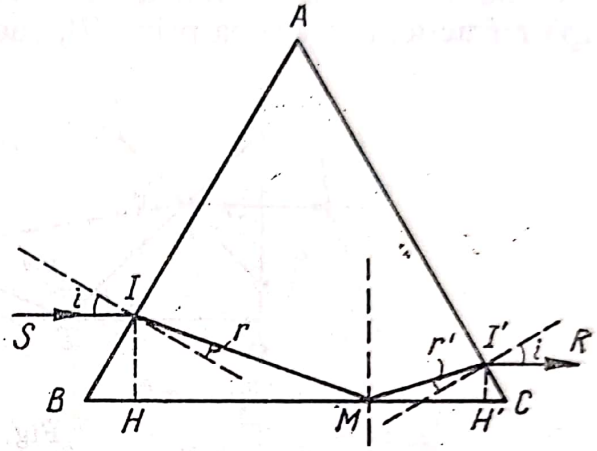


Fig. 226

Rezolvare. Întrucît $i = 30°$, urmează că

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{1}{2n}.$$

În triunghiul BIM, avem

$$\widehat{IBM} = 60°, \quad \widehat{BIM} = 90 + r,$$

$$\widehat{BMI} = 30° - r.$$

În punctul M, unghiul de incidență fiind egal cu cel de reflexie urmează că în triunghiul $MI'C$ (fig. 226) avem

$$\widehat{I'MC} = 30° - r, \quad \widehat{MCI'} = 60°, \quad \widehat{MI'C} = 90° + r.$$

Unghiurile de refracție în I și I' fiind egale, și unghiurile de incidență sînt egale, deci razele SI și $I'R$ sînt paralele.

Triunghiurile BMI și $MI'C$ fiind asemenea, rezultă

$$\frac{h}{h'} = \frac{BM}{MC}, \quad \frac{h}{h + h'} = \frac{BM}{BM + MC}, \quad h + h' = \frac{ah}{BM}.$$

Întrucît

$$BM = BH + HM = HI \operatorname{tg} 30° + HI \operatorname{tg} (60° + r)$$

avem

$$h + h' = \frac{a}{\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} (60° + r)} = \frac{a \cos 30° \cos (60 + r)}{\cos r}.$$

Făcînd înlocuirile obținem:

$$h + h' = \frac{a\sqrt{3}}{4}\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4n^2 - 1}}\right).$$

6.41. Dintr-o substanță transparentă în formă de paralelipiped dreptunghic, cu indicele de refracție $n = \sqrt{3}/2$ se taie două prisme cu secțiunile ABC și CDE, care fac între ele un unghi de 120° (fig. 227). Secțiunea ABC este un triunghi dreptunghic isoscel. O rază de lumină SI cade perpendicular pe fața AB. Se cere:

a) Să se traseze drumul acestei raze. b) Să se arate că raza de lumină, după refracție, în trecerea prin CD, cade pe CE, unde suferă o reflexie totală.

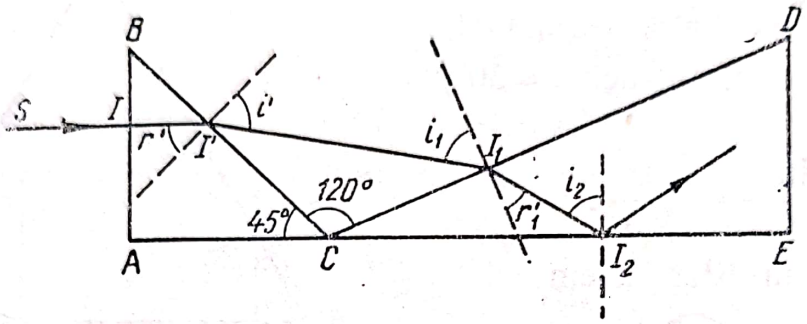


Fig. 227

Rezolvare. a) Căzînd perpendicular pe AB, raza de lumină merge paralel cu AC prin prisma ABC, apoi urmează drumul indicat pe figură.

b) Ținînd seamă că $r' = 45°$, avem

$$\sin i' = n \sin r' = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad i' = 60°.$$

Urmează că $i_1 = 60°$, iar unghiul r_1' este dat de relația

$$\sin r_1' = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad r_1' = 45°.$$

Din triunghiul CI_1I_2 rezultă că unghiul $CI_2I_1 = 30°$, iar unghiul $i_2 = 60°$. Unghiul limită al substanței este dat de relația

$$\sin \lambda = \frac{1}{n} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}815.$$

Întrucît $\sin i_2 = \sin 60° = \sqrt{3}/2 = 0{,}865$ este mai mare decît $\sin \lambda$, adică $i_2 > \lambda$ urmează că în punctul I_2 avem o reflexie totală și raza reflectată face cu normala un unghi de 60°.

6.42. O rază de lumină monocromatică IA pătrunde în interiorul unei sfere transparente de indice de refracție n sub unghiul de incidență i, se refractă după direcția AB, se reflectă de trei ori după direcțiile BC, CD, DE (fig. 228)

Scanned with OKEN Scanner

și iese din sferă în aer după direcția EI'. Să se calculeze unghiul de deviație u format de raza incidentă IA cu raza refractată EI'.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Ducînd normalele OA și OE în punctele A și E, observăm că

$$\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{CDE} = 2r.$$

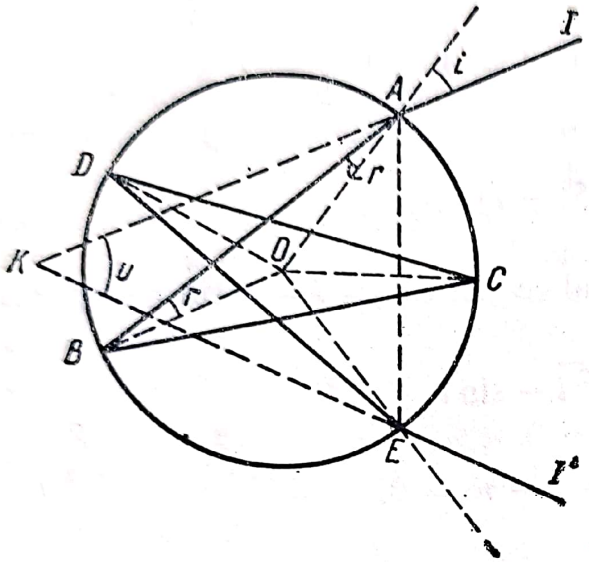


Fig. 228

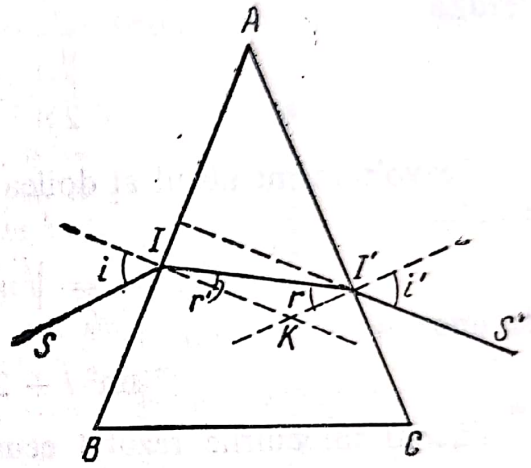


Fig. 229

Unghiul de ieșire $i' = i$, în virtutea relației

$$\sin i' = n \sin r.$$

Razele IA și $I'E$ se taie în K.
Din figură observăm că

$$\overset{\frown}{AOE} = \overset{\frown}{AOC} + \overset{\frown}{COE} = 2\overset{\frown}{ABC} + 2\overset{\frown}{CDE} = 4r + 4r = 8r.$$

În triunghiul isoscel AOE avem

$$\overset{\frown}{OAE} = \overset{\frown}{OEA} = \frac{180° - 8r}{2} = 90° - 4r.$$

În triunghiul AKE avem

$$\overset{\frown}{KAE} = \overset{\frown}{KEA} = 90° - 4r + i$$

de unde rezultă că

$$u = 180° - 2(90° - 4r + i) = 8r - 2i.$$

Calculînd pe r din relația $\sin i = n \sin r$, rezultă valoarea lui u.

6.43. Într-o prismă de secțiune dreaptă BAC se cunoaște unghiul $A = 45°$ și indicele de refracție al sticlei față de aer, $n = 3/2$ (fig. 229). O rază de lumină SI cade pe fața AB, se refractă și iese din prismă prin fața AC după direcția $I'S'$. Să se găsească condiția ca direcția $I'S'$ să fie perpendiculară pe fața AB.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Unghiurile i' și A sînt egale avînd laturile perpendiculare. Din relațiile

$$\sin i' = n \sin r' \text{ și } r + r' = A = 45°,$$

rezultă

$$\frac{\sqrt{2}}{2n} = \sin (45° - r).$$

Dezvoltînd membrul al doilea și ținînd seamă că $\sin i = n \sin r$ obținem ecuația

$$1 = \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sin i$$

de unde

$$2 \sin^2 i + 2 \sin i + 1 - n^2 = 0.$$

Făcînd înlocuirile rezultă ecuația

$$8 \sin^2 i + 8 \sin i - 5 = 0$$

a cărei rădăcină pozitivă este

$$\sin i = 0{,}435,$$

de unde obținem unghiul $i \approx 25°47'$.

6.44. Unde trebuie să așezăm, în raport cu o lentilă convergentă de 4/3 dioptrii, un obiect și un ecran, în formă dreptunghiulară, așa fel, încît imaginea obiectului format de lentilă să acopere exact ecranul. Obiectul are dimensiunile 3×4 cm, iar ecranul 18×24 cm.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1944)

Rezolvare. Din formula convergenței lentilelor obținem

$$f = \frac{1}{P} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ m} = 75 \text{ cm}.$$

Dacă notăm cu S și s ariile ecranului și obiectului, putem scrie relația

$$\frac{p'}{p} = \sqrt{\frac{S}{s}} = \sqrt{\frac{18 \times 24}{3 \times 4}} = \sqrt{36} = 6, \quad p' = 6 \text{ p}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, din formula lentilelor

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

obținem

$$p=\frac{7f}{6}=\frac{525}{6}=87{,}5\text{ cm},$$

$$p'=6\cdot 87{,}5=525\text{ cm}.$$

6.45. O lentilă cu distanța focală egală cu 20 cm este plasată deasupra unui cilindru, astfel încît axa sa optică (verticală) întîlnește fundul cilindrului în punctul A, a cărui imagine A' este situată la distanța $AA'=80$ cm (fig. 230). Se toarnă în vas un strat de apă de grosime $h=30$ cm, iar imaginea reală a lui A se formează deasupra lui A', în A'_1 astfel încît $A'A'_1=12$ cm. Să se calculeze indicele de refracție n al apei.

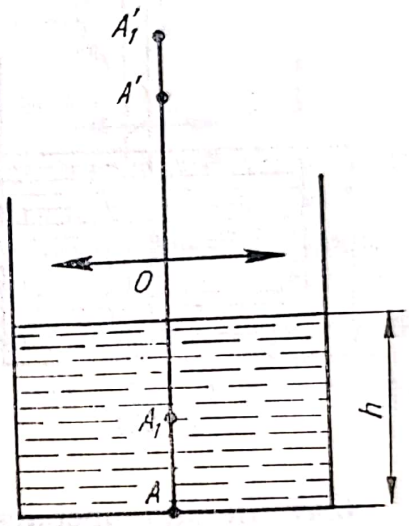


Fig. 230

Rezolvare. Dacă p și p' sînt distanțele de la A și A' la lentilă, avem

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{20},\quad p+p'=80.$$

Rezolvînd acest sistem obținem $p=p'=40$ cm. După turnarea apei în vas, obiectul se deplasează cu $AA_1=d$. Punctul A'_1 devine imaginea lui A_1 și putem scrie

$$\frac{1}{40-d}+\frac{1}{40+12}=\frac{1}{20};\quad d=7{,}5\text{ cm}.$$

Indicele de refracție se deduce din relația

$$AA_1=d=7{,}5=30\cdot\frac{n-1}{n},\quad n=\frac{4}{3}.$$

6.46. O lentilă convergentă subțire cu distanța focală de 15 cm este așezată orizontal la 40 cm deasupra fundului unei cuve. La 30 cm deasupra lentilei, pe axa ei principală, se găsește un obiect luminos P (fig. 231). Se toarnă apă în cuvă pînă ce imaginea P' a lui P se face pe fundul cuvei. Care este grosimea stratului de apă, dacă indicele de refracție al apei este 4/3?

(Adm. Facultatea de Fizică, Iași, 1962)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Dacă imaginea reală P' a lui P se face pe fundul cuvei imaginea aparentă P'' a lui P va fi deplasată pe verticală, deasupra lui P', cu distanța

$$P'P'' = d = \frac{n-1}{n} h. \tag{1}$$

Cu notațiile din figură avem

$$OP = p = 30 \text{ cm}; \quad OP' = p' = 40 - d.$$

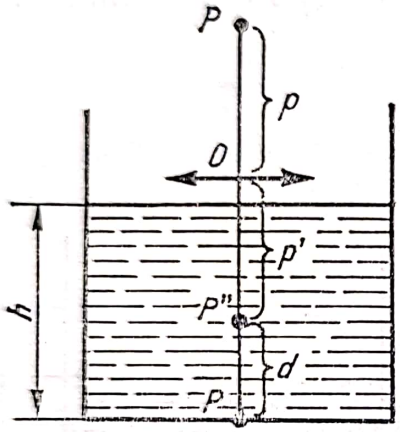


Fig. 231

Folosind formula cunoscută a lentilelor, avem

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}; \quad \frac{1}{15} = \frac{1}{30} + \frac{1}{40-d};$$

$$d = 10 \text{ cm}.$$

Din relația (1) rezultă

$$h = \frac{n}{n-1} \cdot d = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-1} \cdot 10 = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}.$$

Rezultă că stratul de apă trebuie să atingă suprafața inferioară a lentilei.

6.47. În fața unei oglinzi concave sferice se găsește un obiect a cărui imagine este de două ori mai mare decît obiectul. Față de această imagine, la distanța de 15 cm se găsește o lentilă convergentă cu distanța focală de 8,5 cm și care are drept obiect imaginea formată în oglindă. Lentila și oglinda au axele optice principale comune. Cunoscîndu-se mărimea obiectului, egală cu 3 cm și distanța dintre obiect și imaginea sa în oglindă, egală cu 20 cm, se cere:

a) Distanța focală a oglinzii concave. b) Distanța, față de lentilă, la care s-a format imaginea ei în lentilă. c) Mărimea imaginii dată de lentilă.

(Adm. Facultatea de Fizică, Buc., 1962)

Rezolvare

a) $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = 2$, $p' - p = 20$.

Din aceste ecuații rezultă $p = 20$, $p' = 40$, $f = 40/3$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $p_1 = 15$, $f_1 = 8{,}5$, $\frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{8{,}5} - \frac{1}{15} = \frac{15 - 8{,}5}{15 \cdot 8{,}5} =$

$= \frac{6{,}5}{127{,}5} = \frac{13}{255}$, $p_1' = \frac{255}{13} = 19{,}61$ cm.

c) $\frac{i_1}{o_1} = \frac{p_1'}{p_1}$, $i_1 = o_1 \cdot \frac{p_1'}{p_1} = 6 \cdot \frac{19{,}61}{15} = 7{,}8$ cm.

6.48. La extremitatea B a unei bare metalice AB, este fixată o lentilă convergentă L, așa fel ca axa principală a lentilei să fie paralelă cu bara. Bara are lungimea de 1 m, are capătul A fix și se află la temperatura de 0 °C. Pe axa principală a lentilei, la distanța de 12 cm, se găsește un punct luminos P fix a cărui imagine se găsește în P' (fig. 232). Se ridică temperatura barei la 100 °C și se cere să se calculeze cu cît se deplasează P'. Se dă distanța focală a lentilei, $f = 10$ cm și coeficientul de dilatație liniară al barei, $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ grd^{-1}.

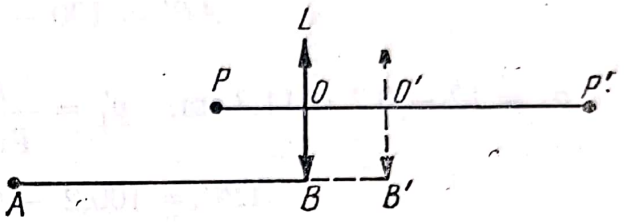


Fig. 232

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1945)

Rezolvare. Presupunînd că punctul P se află între A și B, avem $OP = p = 12$ cm și din formula lentilelor scoatem

$$OP' = p' = \frac{pf}{p - f} = \frac{12 \cdot 10}{12 - 10} = 60 \text{ cm},$$

$$AP' = AB + OP' = 100 + 60 = 160 \text{ cm}.$$

Cînd temperatura barei a crescut de la 0 °C la 100 °C lungimea barei a devenit

$$AB' = AB\,(1 + \alpha t) = 100\,(1 + 0{,}00002 \cdot 100) = 100{,}2 \text{ cm}.$$

Centrul optic al lentilei s-a deplasat în O', iar distanța de la P la lentilă este

$$PO' = p_1 = p + 0{,}2 = 12 + 0{,}2 = 12{,}2 \text{ cm}.$$

Imaginea P'' a lui P se va afla la distanța

$$O'P'' = p_1' = \frac{p_1 f}{p_1 - f} = \frac{12{,}2 \cdot 10}{12{,}2 - 10} = 55{,}5 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Distanța lui P'' față de punctul A este

$$AP'' = AO' + O'P'' = 100{,}2 + 55{,}5 = 155{,}7 \text{ cm}.$$

Deplasarea imaginii este egală cu

$$D = AP' - AP'' = 160 - 155{,}7 = 4{,}3 \text{ cm}.$$

Dacă punctul luminos fix P este situat în dreapta lentilei, avem

$$AP' = 100 - 60 = 40 \text{ cm},$$

$$p_1 = 12 - 0{,}2 = 11{,}8 \text{ cm}, \quad p_1' = \frac{p_1 f}{p_1 - f} = \frac{11{,}8 \cdot 10}{11{,}8 - 10} = 65{,}5 \text{ cm},$$

$$AP'' = 100{,}2 - 65{,}5 = 34{,}7 \text{ cm}.$$

Deplasarea imaginii este

$$D = AP' - AP'' = 40 - 34{,}7 = 5{,}3 \text{ cm}.$$

6.49. În fața unei lentile divergente cu distanța focală $f = -12$ cm se așază un obiect la distanța $p = 24$ cm de lentilă.

a) Să se construiască grafic imaginea obiectului.

b) Să se afle sensul, natura și mărimea imaginii, știind că mărimea obiectului AB este de 6 cm.

Rezolvare. a) Prin punctul A (fig. 233) ducem o rază AO trecînd prin centrul optic O al lentilei și o rază AI paralelă cu axa principală a lentilei și care se refractă în I astfel încît prelungirea ei trece prin focarul F'. Prelungirea razei SI se întîlnește cu raza AO în A'. Coborînd o perpendiculară din A' pe axa principală, obținem imaginea $A'B'$ a obiectului AB.

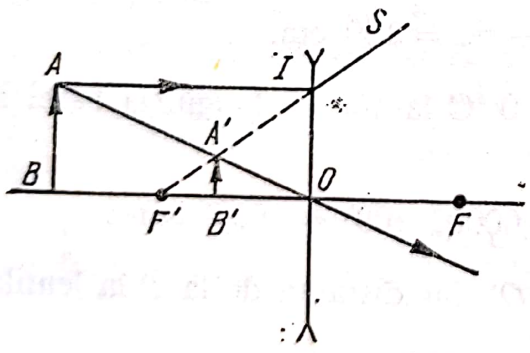


Fig. 233

b) Imaginea este dreaptă și virtuală.

Din formula lentilelor

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

rezultă

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{p - f}{pf} = \frac{24 + 12}{24(-12)} = -\frac{1}{8}$$

de unde $p' = -8$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea imaginii este

$$i = \frac{p'}{p} \cdot o = \frac{8}{24} \cdot 6 = 2 \text{ cm}.$$

6.50. Un punct luminos P (fig. 234) este așezat în fața unei lentile convergente de 5 dioptrii, dincolo de focar, la distanța $PF = x = 25$ cm. Să se construiască grafic imaginea lui P și să se verifice apoi prin calcul distanțele de la imagine la focar și distanțele de la obiect și imagine pînă la lentilă.

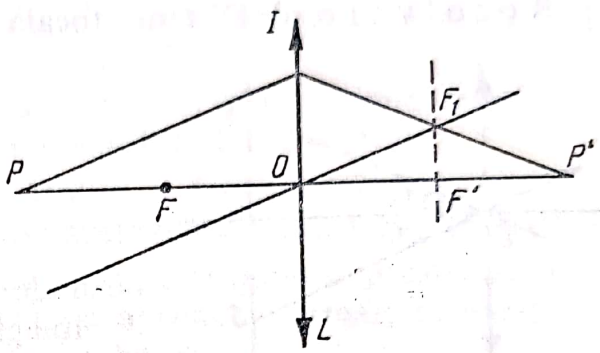


Fig. 234

Rezolvare. Ducem o axă secundară oarecare, iar prin focarul F' ducem o perpendiculară pe axa principală, care întîlnește axa secundară în F_1. Prin P ducem o paralelă la axa secundară, care întîlnește lentila în I. Unim I cu F_1 și prelungim pe IF_1 pînă la întretăierea în P' cu axa principală. Punctul P' este imaginea lui P.

Din formula

$$P = \frac{1}{f} = 5$$

obținem $f = 1/5 = 0{,}2$ m $= 20$ cm.

Din formula

$$xx' = f^2$$

rezultă

$$x' = \frac{f^2}{x} = \frac{400}{25} = 16 \text{ cm},$$

$$p = f + x = 20 + 25 = 45 \text{ cm}; \quad p' = f + x' = 36 \text{ cm}.$$

Pentru verificare, avem

$$p' = \frac{fp}{p - f} = \frac{20 \cdot 45}{45 - 20} = \frac{20 \cdot 45}{25} = 36 \text{ cm}.$$

6.51. O lentilă subțire biconvexă formată dintr-o substanță cu indicele de refracție $n = 1{,}25$ este limitată de fețe sferice cu razele $R_1 = 10$ mm și $R_2 = 6$ mm. Se cere:

a) Aria imaginii Soarelui dată de această lentilă, diametrul aparent al Soarelui fiind egal cu 32′. b) Ce valoare R_1' va trebui să ia R_1, dacă R_2 rămîne constant, pentru ca imaginea unui obiect plasat la 30 cm în fața lentilei să se formeze în planul unde s-a format imaginea Soarelui în cazul precedent. c) Variația lungimii imaginii obiectului dată de fața convexă de rază R_1 funcționînd ca oglindă sferică, cînd această rază trece de la 10 mm la R_1', lungimea obiectului fiind egală cu 1 mm.

Rezolvare. a) Distanța focală a lentilei se află din relația

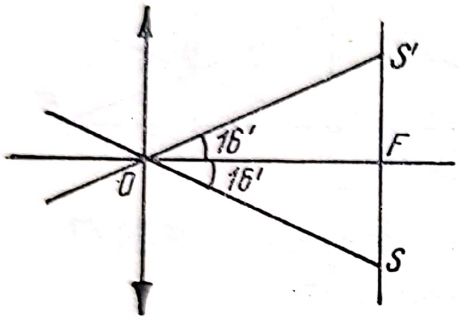


Fig. 235

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) =$$

$$= (1{,}25 - 1)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{15}$$

de unde rezultă $f = 15$ mm.

Imaginea se formează în planul focal (fig. 235) iar razele care emană din extremitățile S și S' ale diametrului aparent converg în punctul O, astfel încît avem

$$SF = OF \cdot \operatorname{tg} 16' = 15\,\frac{\pi \cdot 16}{180 \cdot 60} = \frac{\pi}{45}.$$

Aria imaginii Soarelui este egală cu

$$\pi \cdot SF^2 = \frac{\pi^3}{45^2} = 0{,}0153\ \text{mm}^2.$$

b) Ținînd seamă că $p = 300$ mm și $p' = 15$ mm, avem

$$\frac{1}{300} + \frac{1}{15} = 0{,}25\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{6}\right)$$

de unde se obține $R_1' = 8{,}82$ mm.

c) Fața convexă de rază R_1 lucrează ca o oglindă convexă și din relația.

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{2}{R}$$

rezultă

$$\frac{p}{p'} = \frac{2p}{R} + 1 = \frac{o}{i}$$

de unde

$$i = o \cdot \frac{R}{2p + R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $R = R_1 = 10$ mm, obținem $i_1 = 1/61$ mm.
Pentru $R = R_1' = 150/17$ mm, obținem $i_1' = 1/69$ mm.
Variația lungimii imaginii este egală cu

$$\left(\frac{1}{61} - \frac{1}{69} \right) = \frac{8}{61 \cdot 69} = 0{,}0019 \text{ mm}.$$

6.52. O lentilă convergentă este așezată între un obiect luminos și un paravan, distanța dintre obiectul luminos și paravan fiind de 50 cm, se obține cîte o imagine clară a obiectului pe paravan pentru două poziții ale lentilei, separate între ele prin 22,4 cm.

a) Să se calculeze distanța focală a lentilei și dimensiunile celor două imagini știind că obiectul este o linie luminoasă de 2 cm lungime.

b) Se așază la 20 cm de această lentilă o fantă luminoasă verticală; unde trebuie așezat paravanul pentru ca să avem o imagine clară a fantei pe el?

c) Între paravan și lentilă, la 10 cm de paravan, se pune o prismă de unghi mic, cu muchia verticală și primind lumina aproape normal; în acest caz, imaginea fantei pe paravan se deplasează cu 8 mm.

Să se calculeze unghiul prismei știind că indicele său de refracție este 3/2.

(Adm. Școala Politehnică, Buc., 1945)

Rezolvare. a) Dacă notăm cu D distanța de la obiectul luminos la paravan și cu d distanța dintre cele două poziții B și C ale lentilei, putem scrie pentru fiecare dintre pozițiile B și C:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{D - p} = \frac{1}{f}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{p + D} + \frac{1}{D - (p + d)} = \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Eliminînd pe f între (1) și (2), obținem

$$p = \frac{D - d}{2} = \frac{53 - 22{,}4}{2} = 13{,}8 \text{ cm},$$

$$f = \frac{D^2 - d^2}{2} = \frac{2\,500 - 501{,}76}{200} \approx 10 \text{ cm},$$

$$p' = D - p = 50 - 13{,}8 = 36{,}2 \text{ cm}.$$

$$i = o \cdot \frac{p'}{p} = 2 \cdot \frac{36{,}2}{13{,}8} = 5{,}25 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru poziția C, avem

$$p_1 = p + d = 13{,}8 + 22{,}4 = 36{,}2\text{ cm}, \quad p_1' = D - (p + d) = 50 - 36{,}2 = 13{,}8\text{ cm}$$

și

$$i_1 = o \cdot \frac{p_1'}{p_1} = 2 \cdot \frac{13{,}8}{36{,}2} = 0{,}76\text{ cm}.$$

b) Distanța de la paravan la lentilă este

$$p' = \frac{pf}{p - f} = \frac{20 \cdot 10}{20 - 10} = 20\text{ cm}.$$

c) Întrucît $r = 0$ și $i = 0$, din relațiile

$A = r + r'$ și $D = i + i' - A$, rezultă $r' = A$ și $i' = D + A$.

Putem deci scrie

$$\sin(D + A) = n \sin A.$$

Și fiindcă D și A sînt mici, rezultă că

$$D + A = nA, \quad D = (n - 1)A.$$

Dacă I este punctul de ieșire al razei din prismă, P' imaginea inițială și P'' imaginea după deviație, avem

$$\operatorname{tg} D = \frac{P'P''}{P'I} = \frac{0{,}8}{10} = 0{,}08 \quad \text{sau} \quad D = 0{,}08,$$

$$A = \frac{D}{n - 1} = \frac{0{,}08}{1{,}5 - 1} = \frac{0{,}08}{0{,}5} = \frac{0{,}8}{5} = 0{,}16\text{ rad} = \frac{0{,}16 \cdot 180}{3{,}14} = 9°10'.$$

6.53. Un obiectiv fotografic este format din două lentile alipite, una biconvexă de crown, alta concav-convexă divergentă de flint. Razele de curbură ale fețelor lentilei convergente sînt egale cu raza de curbură a feței concave a lentilei divergente, iar fața liberă a lentilei divergente are raza de curbură egală cu dublul celeilalte fețe (fig. 236). Știind că indicele de refracție al crownului este egal cu $n = 1{,}52$, al flintului $n' = 1{,}68$, iar distanța focală a sistemului, $F = 15$ cm, se cere:

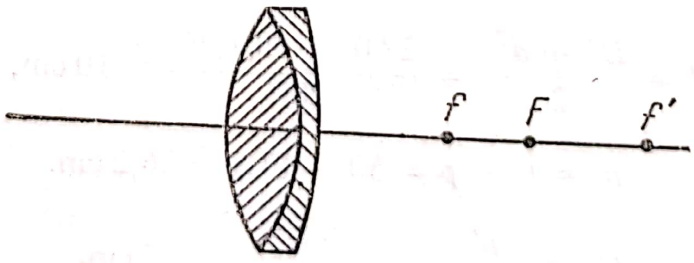


Fig. 236

Scanned with OKEN Scanner

a) Raza de curbură R a lentilei convergente. b) Distanța focală a fiecărei lentile. Se va presupune că centrele optice ale celor două lentile sînt confundate.

Rezolvare. a) Scriem formula distanței focale pentru fiecare lentilă în parte cum și distanța focală a sistemului alipit

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{2}{R} = 0{,}52 \cdot \frac{2}{R} = \frac{1{,}04}{R},$$

$$\frac{1}{f'} = (n'-1)\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right) = 0{,}68\left(-\frac{1}{2R}\right) = -\frac{0{,}34}{R},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}; \quad \frac{1}{15} = \frac{1{,}04}{R} - \frac{0{,}34}{R} = \frac{0{,}7}{R}, \quad R = 10{,}5 \text{ cm}.$$

b) $\frac{1}{f} = \frac{1{,}04}{10{,}5}, \quad f = \frac{10{,}5}{1{,}04} = 10{,}1 \text{ cm},$

$$\frac{1}{f'} = -\frac{0{,}34}{10{,}5}, \quad f' = -\frac{10{,}5}{0{,}34} = -30{,}8 \text{ cm}.$$

6.54. Un sistem convergent este alcătuit din două lentile convergente subțiri, puse una lîngă alta, cu distanțele focale $f_1 = 6$ cm și $f_2 = 3$ cm. La 10 cm distanță de acest sistem se găsește o a treia lentilă subțire convergentă de o astfel de convergență încît fasciculul de raze paralele care vine paralel cu axa comună, după ce trece prin intregul sistem, se întîlnește într-un punct dindărătul celei de a treia lentile, situat la 5 cm depărtare de ea. Care este distanța focală a lentilei a treia?

Rezolvare. Primele două lentile se comportă ca una singură cu distanța focală dată de relația

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

de aici rezultă $F = 2$ cm.

Imaginea razelor paralele cu axa principală se formează în focarul F și constituie obiectul imaginii produsă de lentila a treia.

Obiectul fiind așezat la distanța $p = 10 - 2 = 8$ cm față de lentila a treia, iar imaginea acestuia fiind așezată la distanța $p' = 5$ cm, obținem pentru lentila a treia relația

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{1}{f_3}$$

de unde rezultă $f_3 = 3{,}07$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

6.55. Un obiect de 20 cm înălțime este așezat la 90 cm în dreapta unei lentile subțiri divergente a cărei distanță focală este de 30 cm. În stînga acestei lentile se așază o lentilă subțire convergentă cu o distanță focală de 20 cm.
a) Cum trebuie să fie distanța dintre cele două lentile pentru ca imaginea obiectului să fie reală și situată la 30 cm în stînga lentilei convergente?
b) Care este mărimea imaginii?

(G. M. F., nr. 11/1954)

Rezolvare. a) Distanța focală a lentilei divergente fiind negativă și imaginea virtuală, avem

$$p' = \frac{pf}{p-f} = -\frac{90 \cdot 30}{90+30} = -22{,}5 \text{ cm}.$$

Imaginea produsă de lentila divergentă devine obiect pentru lentila convergentă și avem

$$p_1 = x + p' = x + 22{,}5; \quad p_1' = 30 \text{ cm}, \quad f_1 = 20 \text{ cm}.$$

$$\frac{1}{x+22{,}5} + \frac{1}{30} = \frac{1}{20}, \quad x = 37{,}5 \text{ cm}.$$

b) $i = o\,\frac{p'}{p} \cdot \frac{p_1'}{x+p'} = 20 \cdot \frac{22{,}5}{90} \cdot \frac{30}{60} = 2{,}5 \text{ cm}.$

6.56. O lentilă convergentă cu distanța focală $f_1 = 10$ cm este confecționată dintr-o sticlă cu indicele de refracție $n_1 = 3/2$. Să se afle distanța focală f_2 a acestei lentile în cazul în care ea este introdusă în apă ($n_3 = 4/3$).

Rezolvare. Pentru aer avem

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{1}$$

Indicele de refracție al sticlei față de apă este

$$n_2 = \frac{n_1}{n_3} = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}.$$

Putem deci scrie relația

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = 4, \quad f_2 = 4f_1 = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.57. O lentilă plan-concavă are raza de curbură de 10 cm și indicele de refracție $n_1 = 1{,}5$. La 20 cm în fața ei se află un obiect înalt de 8 cm. Se cere:

a) Să se determine poziția, natura și mărimea imaginii. b) Dacă de lentila dată se alătură o altă lentilă identică avînd concavitățile față în față, și dacă golul format se umple cu apă ($n = 3/4$), să se determine (obiectul rămînînd tot la 20 cm în fața lentilei formate) poziția, natura și mărimea imaginii în acest caz. c) Să se arate mersul razelor în ambele cazuri.

(Olimpiada de fizică, 1964)

Rezolvare. a) Conform fig. 237, *a* putem scrie

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(-\frac{1}{R}\right) = (1{,}5 - 1)\left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{20}, \quad f_1 = -20 \text{ cm},$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'}; \quad p_1' = \frac{p_1 \cdot f_1}{p_1 - f_1} = \frac{20\,(-20)}{20 + 20} = -10 \text{ cm};$$

imaginea este virtuală

$$\frac{i_1}{o} = -\frac{p_1'}{p_1} = -\frac{-10}{20} = 0{,}5, \quad i_1 = 0{,}5 \cdot 8 = 4 \text{ cm}.$$

b) Alăturînd axial o lentilă identică (fig. 237, *b*) avem, pentru lentila convergentă de apă care se formează între cele două lentile divergente:

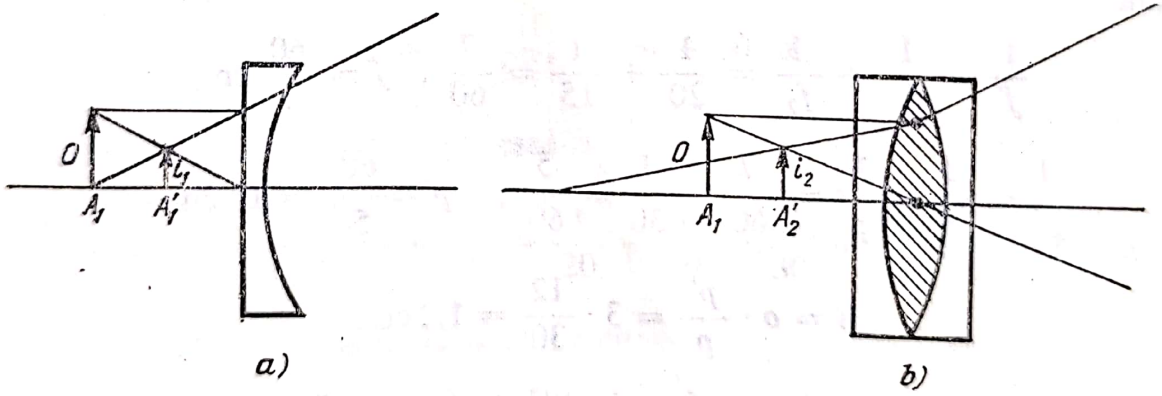


Fig. 237

$$\frac{1}{f_3} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{30}; \quad f_3 = 15 \text{ cm},$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = -\frac{1}{20} - \frac{1}{20} + \frac{1}{15} = -\frac{1}{30}; \; f = -30 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Lentila formată prin alipire este divergentă

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2'};\quad p_2'=\frac{p_1 f}{p_1-f}=\frac{20(-30)}{20+30}=-12\text{ cm}.$$

$$\frac{i_2}{o}=-\frac{p_2'}{p_1'}=-\frac{-12}{20}=\frac{6}{10}=0{,}6;\quad i_2=0{,}6\cdot 8=4{,}8\text{ cm}.$$

c) Mersul razelor este arătat în fig. 237, *a* și *b*.

6.58. O lentilă concav-convexă (menisc convergent) din sticlă ($n=1{,}5$) are razele de curbură de 5 cm și 10 cm. Coaxial și în dreapta se așază o lentilă convergentă cu distanța focală de 15 cm. În stînga primei lentile la distanța de 30 cm se așază un obiect de 3 cm. Să se studieze imaginea în următoarele situații:

a) Lentilele sînt în contact. b) Lentilele se află la distanța de 70 cm una de alta.

(R. F. Ch., nr. 3/1965)

Rezolvare. La meniscurile convergente, raza mică corespunde feței convexe, iar cea mare feței concave și avem

$$\frac{1}{f_1}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{20},\quad f_1=20\text{ cm}.$$

a) Lentilele fiind în contact, se comportă ca o singură lentilă cu distanța focală

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}=\frac{7}{60},\quad f=\frac{60}{7}\text{ cm},$$

$$\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{p}=\frac{7}{60}-\frac{1}{30}=\frac{5}{60},\quad p'=\frac{60}{5}=12\text{ cm}.$$

$$i=o\cdot\frac{p'}{p}=3\cdot\frac{12}{30}=1{,}2\text{ cm}.$$

b) Imaginea în raport cu prima lentilă se formează la distanța dată de relația

$$\frac{1}{p_1'}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{p_1}=\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60},\quad p_1'=60\text{ cm},$$

$$i_1=o\cdot\frac{p_1'}{p_1}=3\cdot\frac{60}{30}=6\text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația $p_1' + p_2 = 70$ rezultă $p_2 = 70 - 60 = 10$ cm

$$\frac{1}{p_2'} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{15} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{30}; \quad p_2' = -30 \text{ cm}$$

$$i_2 = o \cdot \frac{p_2'}{p_2} = i_1 \cdot \frac{p_2'}{p_2} = 6 \cdot \frac{30}{10} = 18 \text{ cm}.$$

6.59. Două lentile subțiri biconvexe și identice sînt puse în contact coaxial. Intervalul dintre ele, rămas liber, se umple cu un lichid cu indicele de refracție $n_1 = 4/3$ care formează o lentilă divergentă. Lentilele convergente au razele de curbură de 20 cm și indicele de refracție $n_2 = 3/2$. La 60 cm distanță de sistemul optic astfel format se așază un obiect cu înălțimea de 3 cm. Să se afle mărimea imaginii și distanța la care se află ea față de sistemul optic.

(R. F. Ch., nr. 3/1965)

Rezolvare. Dacă f_1 și f_2 sînt distanțele focale ale lentilelor convergente, iar f_3 a lentilei divergente, putem scrie

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{20} = \frac{1}{20}; \quad f_1 = f_2 = 20 \text{ cm}.$$

$$\frac{1}{f_3} = (n_2 - 1)\left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right) = \left(\frac{4}{3} - 1\right)\left(-\frac{2}{20}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{10}\right) =$$

$$= -\frac{1}{30}; \quad f_3 = -30 \text{ cm}.$$

Distanța focală a sistemului este

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}; \quad f = 15 \text{ cm}.$$

Distanța de la imagine la sistem este

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{15} - \frac{1}{60} = \frac{3}{60}; \quad p' = 20 \text{ cm}.$$

Mărimea imaginii este

$$i = o\frac{p'}{p} = 3 \cdot \frac{20}{60} = 1 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.60. Un punct luminos A este situat pe axa principală a unei lentile convergente subțiri de 5 dioptrii, la 25 cm de centrul ei optic C_1. Dincolo de lentilă, la 50 cm de C_1 se află o oglindă plană, înclinată cu 45° pe axa principală a lentilei (fig. 238). La 80 cm de punctul de intersecție O al oglinzii cu axa principală a lentilei pe o direcție ce face cu ea 90°, se află centrul optic C_2 al unei alte lentile convergente subțiri de 4 dioptrii. Se cere:

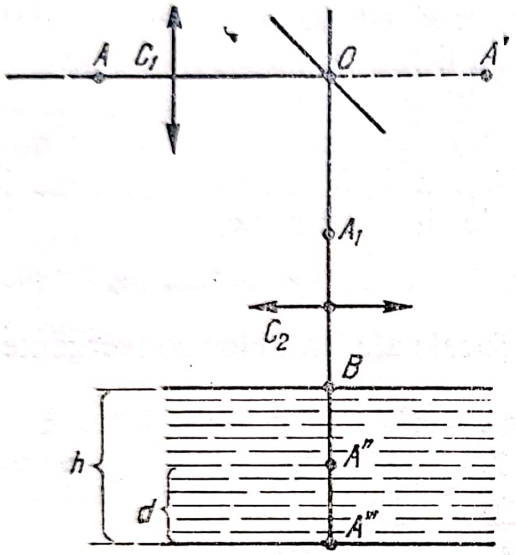


Fig. 238

a) Poziția imaginii finale A'' față de C_2. b) Pînă la nivelul B aflat la 75 cm sub C_2 se introduce apă; unde se formează acum în apă imaginea finală A'''. c) Înlăturînd apa, unde trebuie așezată lentila C_2 ca imaginea A'' dată de C_2 să fie tot în A''' ?

Indicele de refracție al apei, $n = 4/3$.

(Olimpiada de fizică, 1965)

Rezolvare. a) Distanța focală a lentilei C_1 este

$$f_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2\ \text{m} = 20\ \text{cm}.$$

Imaginea lui A, formată de lentila C_1 se află în A' la distanța

$$C_1A' = p_1' = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} = \frac{25 \cdot 20}{25 - 20} = 100\ \text{cm}.$$

Imaginea A_1 a lui A', formată de oglindă, se află la distanța

$$OA_1 = OA' = C_1A' - C_1O = 100 - 50 = 50\ \text{cm}.$$

Față de lentila C_2, imaginea A_1 servește ca obiect și se află la distanța $p_2 = C_2A_1 = p_2 = 80 - 50 = 30$ cm de centrul optic C_2.

Cum $f_2 = 1/4 = 0{,}25$ m $= 25$ cm, imaginea finală A'' se va găsi la distanța

$$C_2A'' = p_2' = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} = \frac{30 \cdot 25}{30 - 25} = \frac{750}{5} = 150\ \text{cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) În apă, imaginea A''' a lui A_1 va fi mai departe decît A''. Dacă notăm cu $h = BA'''$ grosimea stratului de apă pînă unde se formează imaginea A''', avem

$$d = A''A''' = \frac{n-1}{n}h = \frac{n-1}{n}(d + C_2A'' - C_2B) =$$

$$= \frac{n-1}{n}(d + 150 - 75) = \frac{n-1}{n}(d + 75).$$

$$d = A''A''' = 75(n-1) = 75\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{75}{3} = 25 \text{ cm}.$$

c) În acest caz $A_1A''' = p_4 + p_4' = p_2 + p_2' + 25 = 30 + 150 + 25 = 205$ cm; $p_4' = 205 - p_4$.

Distanța p_4 rezultă din relația

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_4'} = \frac{1}{p_4} + \frac{1}{205 - p_4} = \frac{1}{25},$$

$$p_4^2 - 205\,p_4 + 5125 = 0; \quad p_4 = 29{,}5 \text{ cm}; \quad p_4' = 175{,}5 \text{ cm}.$$

Rezultă că lentila C_2 va trebui apropiată de A_1 cu 0,5 cm.

6.61. O lentilă convergentă are indicele de refracție absolut 1,8. Unde se va forma imaginea unui obiect cînd lentila și obiectul se găsesc în aer, dacă atunci cînd se găsesc într-un lichid cu indicele de refracție absolut 1,2 lentila are distanța focală de 8 cm, iar imaginea se formează cu 30 cm mai departe decît atunci cînd mediul înconjurător este aerul cu indicele de refracție absolut egal cu 1. (Obiectul se găsește la aceeași distanță atît în aer cît și în lichid).

(R. F. Ch., nr. 12/1964)

Rezolvare. Pentru aer și lichid putem scrie formulele

$$\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad \frac{1}{f_2} = (n'-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Împărțind aceste relații una prin alta, avem

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n-1}{n'-1}; \quad f_1 = \frac{n'-1}{n-1} \cdot f_2 = \frac{\frac{1{,}8}{1{,}2} - 1}{\frac{1{,}8}{1} - 1} \cdot 8 = \frac{1{,}5 - 1}{1{,}8 - 1} \cdot 8 = 5 \text{ cm}.$$

Din relațiile cunoscute

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\ ;\quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'_1 + 30} \tag{1}$$

obținem prin înlocuirea lui f_1, f_2 și eliminarea lui p'

$$9p^2 - 130\,p + 400 = 0,\quad p_1 = 10\,\text{cm},\quad p_2 = \frac{40}{9}\,\text{cm}.$$

Pentru aceste valori obținem, din relațiile (1)

$$p_1 = 10\,\text{cm},\quad p'_1 = 10\,\text{cm}\quad \text{(imaginea reală)},$$

$$p_2 = \frac{40}{9}\,\text{cm},\quad p'_2 = -\,40\,\text{cm}\quad \text{(imaginea virtuală)}.$$

6.62. O lentilă plan-convexă are raza de curbură $R = 10$ cm și $n = 1{,}5$. La 15 cm înaintea feței convexe a lentilei se așază un obiect AB înalt de 5 cm (fig. 239). Se cere:

a) Poziția, natura, și mărimea imaginii. b) Dacă obiectul rămîne la aceeași distanță față de lentilă, însă fața plană a acesteia este argintată, să se afle poziția, natura și mărimea imaginii finale în acest caz. c) Să se arate mersul razelor în ambele cazuri.

(R. F. Ch., nr. 12/1964)

Rezolvare

a) $\dfrac{1}{f} = (n-1)\dfrac{1}{R} = (1{,}5-1)\cdot\dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{20}\ ;\quad f = 20\,\text{cm},$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\ ;\quad p' = \frac{p\cdot f}{p-f} = \frac{15\cdot 20}{15-20} = -\,60\,\text{cm}\ \text{(imagine virtuală)}$$

$$i_1 = o\cdot\frac{p'}{p} = 5\cdot\frac{60}{15} = 20\,\text{cm}\quad \text{(imagine dreaptă)}.$$

b) A_1B_1 (fig. 239) este imaginea virtuală dată de lentilă (fața plană nefiind argintată). Această imagine servește ca obiect virtual pentru oglinda plană (cu fața argintată) dînd imaginea A_2B_2 la dreapta oglinzii, care se obține ținînd seamă că

$$p' = p_2 \text{ și } \widehat{B_1OM} = \widehat{B_2OM}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Imaginea $A_2 B_2$ servește apoi ca obiect pentru lentilă, dînd imaginea $A_3 B_3$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'}, \quad p_2' = \frac{p_2 f}{p_2 - f} = \frac{60 \cdot 20}{60 - 20} = 30 \text{ cm}$$

(imaginea finală este reală).

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{p_2'}{p'} = -\frac{30}{60} = -\frac{1}{2}; \quad i_2 = -\frac{1}{2} i_1 = -\frac{1}{2} \cdot 20 = -10 \text{ cm}$$

(imaginea finală este răsturnată),

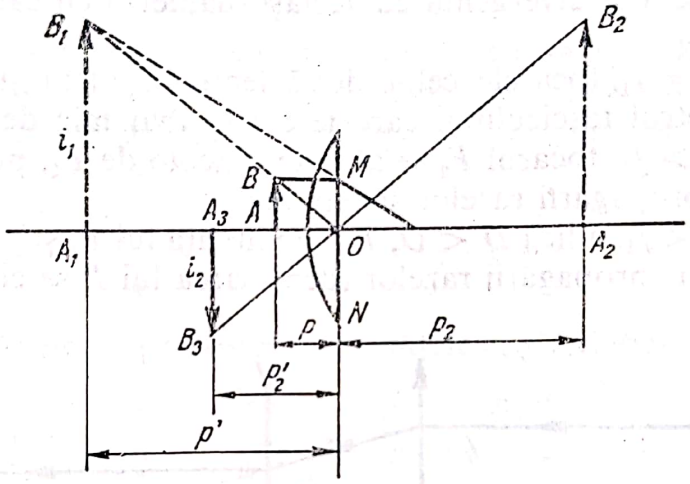


Fig. 239

6.63. Pe un banc optic, la distanța d una de alta, se găsesc două lentile, una convergentă cu distanța focală $f_1 \geqslant d$ iar a doua divergentă cu distanța focală $f_2 \leqslant f_1$. Pe lentila convergentă cade un fascicul cilindric de raze paralele cu axul principal comun al celor două lentile (fig. 240). Se cere:

a) Să se calculeze în funcție de f_1, f_2 și d, distanța D cu care se deplasează punctul de convergență al fasciculului ce iese din lentila convergentă datorită prezenței lentilei divergente. b) Dacă fasciculul care intră în lentila convergentă are diametrul de 8 cm, iar $f_1 = 16$ cm, ce valori trebuie să aibă d și f_2 pentru ca fasciculul ce iese din lentila divergentă să fie tot paralel și cilindric cu diametrul de 2 cm?

(R. F. Ch., nr. 12/1964)

Rezolvare. a) În lipsa lentilei divergente, punctul de convergență este chiar focarul F_1 al lentilei convergente. Lentila divergentă deplasează în P punctul de convergență astfel încît $F_1 P = D$.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă că F_1 este obiect pentru lentila divergentă, iar P este imaginea lui F_1, aplicînd formula lentilelor, obținem

$$-\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_1 - d + D}.$$

Rezolvînd în raport cu D, obținem

$$D = \frac{(f_1 - d)^2}{f_2 + d - f_1}. \qquad (1)$$

Dacă $d = f_1$, $D = 0$, punctul P coincide cu F_1 și nu se modifică poziția punctului de convergență.

Dacă $d = 0$ și $f_1 = f_2$, cele două lentile devin acolate de convergență $C = 0$ și razele ies din lentila divergentă cu același diametru cu care au intrat în cea convergentă.

Dacă $f_2 + d = f_1$, focarele celor două lentile coincid și P se deplasează la infinit; diametrul fasciculului care iese este mai mic decît cel care intră.

Dacă $f_2 + d > f_1$, focarul F_2 se găsește dincolo de F_1, punctul P se deplasează în sensul propagării razelor și este real.

Dacă $f_2 + d < f_1$, adică $D < O$, F_2 este în fața lui F_1 și punctul P se deplasează în sens opus propagării razelor (deplasarea lui P se consideră în raport cu F_1).

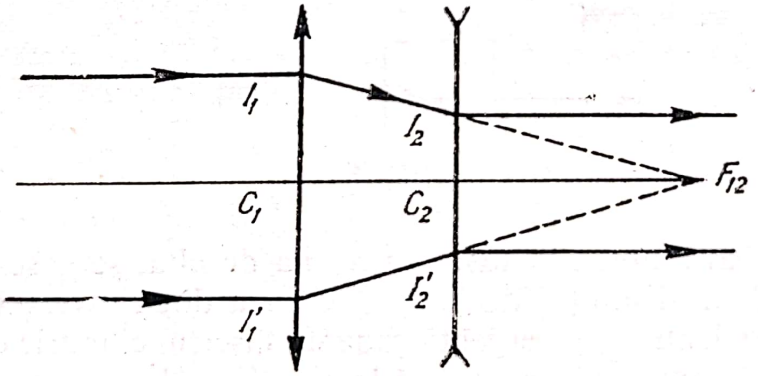


Fig. 240

b) Sîntem în cazul 3, adică $f_2 + d = f_1$ și din asemănarea triunghiurilor $C_1 I_1 F_{12}$ și $C_2 I_2 F_{12}$ rezultă

$$\frac{C_1 F_{12}}{C_2 F_{12}} = \frac{I_1 C_1}{I_2 C_2} = \frac{I_1 I_1'}{I_2 I_2'}; \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Din această relație și din $f_2 + d = f$, rezultă $f_2 = 4$ cm și $d = 12$ cm.

6.64. În contact cu o lentilă convergentă de diametru destul de mare și de distanța focală $f = 20$ cm, se pune o altă lentilă convergentă de diametru

mai mic și de distanță focală $f' = 21$ cm. Se obțin astfel două imagini ale aceluiași obiect liniar perpendicular pe axa principală comună a celor două lentile. O imagine este formată de razele marginale, cealaltă de razele centrale. Să se afle condiția pentru ca ambele imagini să fie reale și, în acest caz, la ce distanță p trebuie plasat obiectul pentru ca o imagine să fie de $K = 3$ ori mai mare decît cealaltă.

Rezolvare. Pentru ca ambele imagini să fie reale, trebuie ca distanța de la obiect la lentilă să fie mai mare decît distanța focală a lentilei mari. Pentru lentila mare, razele marginale paralele cu axa principală trec, după refracție, prin focarul acestei lentile și putem deci scrie

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

unde p' este distanța imaginii formată de razele marginale, pînă la lentilă.

Razele centrale, paralele cu axa principală, trec, după refracție, prin focarul F al întregului sistem și notînd cu p' distanța de la imagine la sistemul de lentile, avem

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}. \tag{2}$$

Între cele două imagini, obiect și distanțele p, p', p_1' există relațiile

$$\frac{p'}{p} = \frac{A'B'}{AB}; \quad \frac{p_1'}{p} = \frac{A_1B_1}{AB},$$

din care, prin împărțire, obținem

$$\frac{p'}{p_1'} = \frac{A'B'}{A_1B_1} = K. \tag{3}$$

Din relațiile (1), (2) și (3), obținem

$$p = \frac{(K-1)\,ff'}{(K-1)f' - f} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 21}{2 \cdot 21 - 20} = 38{,}18 \text{ cm}.$$

6.65. La distanța de 60 cm de o lentilă convergentă L_1 de distanța focală $f_1 = 20$ cm, se așază un obiect AB cu înălțimea de 10 cm. Să se calculeze poziția și mărimea imaginii $A'B'$. După lentila L_1 se așază o altă lentilă L_2 planconcavă, de sticlă, cu indicele de refracție $n = 1{,}5$ și a cărei față concavă are raza de curbură $R = 5$ cm. Ce devine imaginea $A'B'$ a lui AB în următoarele cazuri:

a) Cele două lentile sînt în contact. b) Lentilele se găsesc la distanța $d = 20$ cm una de cealaltă.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Prima parte a problemei se rezolvă ușor ținînd seamă că $p = 60$, $f_1 = 20$ și obținem $p' = 30$ cm și $A'B' = 1/2\, AB = 5$ cm.

a) Lentila L_2 fiind divergentă are distanța focală negativă, dată de relația

$$\frac{1}{f_2} = (n-1)\left(-\frac{1}{R}\right) = -0{,}5 \cdot \frac{1}{5} = -0{,}1$$

deci $f_2 = -1/0{,}1 = -10$ cm.

Cele două lentile se comportă ca una singură cu distanța focală

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{20} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{20}.$$

Distanța de la obiect la lentilă fiind aceeași ($p = 60$ cm), distanța de la lentilă la imagine se determină din relația

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1'}$$

de unde se obține

$$\frac{1}{p_1'} = -\frac{1}{F} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{20} - \frac{1}{60} = -\frac{1}{15},$$

$$p_1' = -15 \text{ cm}, \text{ iar } \frac{A''B''}{AB} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4},$$

și rezultă

$$A''B'' = \frac{AB}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5 \text{ cm}.$$

b) Imaginea formată de lentila L_1 se găsește la distanța

$$p_2 = p' - d = 30 - 20 = 10 \text{ cm}.$$

și este obiect virtual pentru lentila L_2, iar imaginea lui se va forma la distanța p_2' dată de relația

$$-\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = -\frac{1}{f_2}$$

de aici obținem

$$\frac{1}{p_2'} = -\frac{1}{f_2} + \frac{1}{p_2} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că imaginea $A''B''$ se formează la infinit ($p_2' = \infty$) și deci

$$A''B'' = \frac{p_2'}{p_2} AB = \infty .$$

6.66. O clădire se fotografiază de la o distanță de 80 m. Înălțimea clădirii pe fotografie este de 7 cm. Care este înălțimea reală a clădirii, dacă distanța focală a obiectivului aparatului fotografic este de 20 cm?

(Olimpiada de fizică, Cluj, 1955)

Rezolvare. Fotografiind de la distanță, imaginea se formează la o distanță practic egală cu distanța focală a obiectivului și avem

$$\frac{o}{i} = \frac{p}{p'} = \frac{p}{f}$$

de unde rezultă

$$o = \frac{p}{f} i = \frac{80}{0{,}20} \cdot 0{,}07 = 28 \text{ m}.$$

6.67. Un om în vîrstă cînd citește, trebuie să țină cartea la distanța de 40 cm de ochi. Să se calculeze ce convergență trebuie să aibă lentila cu care se poate corija această defecțiune și care este distanța ei focală.

(R. F. Ch., nr. 5/1965)

Rezolvare. Pentru un ochi normal, distanța minimă a vederii optime este de 25 cm, căreia îi corespunde o convergență:

$$C_{norm} = \frac{1}{0{,}25} = 4 \text{ dioptrii}.$$

Pentru presbit, distanța minimă a vederii clare este de 40 cm, căreia îi corespunde convergența

$$C_{presb} = \frac{1}{0{,}40} = 2{,}5 \text{ dioptrii}.$$

Pentru corijare este necesară o lentilă cu convergența

$$C = C_{norm} - C_{presb} = 4 - 2{,}5 = 1{,}5 \text{ dioptrii}$$

căreia îi corespunde distanța focală

$$f = \frac{1}{C} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66 \text{ m} = 66 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.68. Obiectivul unui aparat de proiecție are distanța focală de 15 cm. Imaginea dată de aparat se prinde pe un ecran situat la 4,65 m depărtare de obiectiv. De cîte ori este mai mare imaginea de pe ecran decît desenul?

Rezolvare. Puterea măritoare a aparatului este

$$M = \frac{D}{f} = \frac{4{,}65}{0{,}15} = 31 \text{ ori.}$$

6.69. Ce fel de ochelari (natura lentilelor și puterea lor) trebuie să folosească un presbit și un miop pentru ca să vadă clar obiectele situate la distanța de 25 cm de ochi, dacă distanța normală a vederii clare cu ochiul liber este pentru presbit de 50 cm, iar pentru miop de 10 cm?

Rezolvare. a) Imaginea dreaptă și virtuală a obiectului, situat la distanța $p = 25$ cm $= 0{,}25$ m, trebuie să se formeze pentru presbit la distanța normală a vederii sale $p' = 0{,}50$ m.

Lentilele care produc o imagine dreaptă, virtuală și mai departe decît obiectul, sînt cele convergente.

Puterea lentilelor este dată de relația

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}50} = \frac{0{,}25}{0{,}125} = 2 \text{ dioptrii.}$$

b) Pentru miop trebuie folosite lentile divergente care produc imaginea dreaptă, virtuală și mai aproape decît obiectul, situată la distanța $p' = 0{,}10$ m.

Puterea acestor lentile va fi egală cu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}10} = -\frac{0{,}15}{0{,}025} = -6 \text{ dioptrii.}$$

6.70. Un presbit nu vede distinct, cu ochiul liber, obiectele decît de la 0,50 m la infinit.

a) Ce putere are lentila care aduce această distanță la minimum 30 cm? b) La ce distanță se găsește punctum remotum al presbitului cînd el folosește astfel de lentile ca lunetă?

Rezolvare. a) Lentila convergentă întrebuințată trebuie să producă o imagine virtuală la 50 cm a obiectului așezat la 30 cm și avem

$$\frac{1}{30} - \frac{1}{50} = \frac{1}{f}$$

de unde $f = 75$ cm, iar puterea $P = 100/75 = 1\frac{1}{3}$ dioptrii.

Scanned with OKEN Scanner

b) Punctum remotum al presbitului fiind la infinit, întrebuințarea lunetei va avea ca efect formarea la infinit a imaginii unui obiect plasat la distanța x, adică

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f} = \frac{1}{75}$$

de unde $x = 75$ cm.

6.71. Un miop vede clar obiectele cuprinse între distanțele de 5 și 50 cm. De ce fel de ochelari se va putea servi el pentru a vedea clar obiectele foarte îndepărtate, care va fi distanța focală și puterea acestor ochelari și unde apare prin ochelari punctum proximum? Un al doilea miop care nu distinge obiectele dincolo de 30 cm se servește de aceeași ochelari; se întreabă pînă unde se va întinde vederea distinctă a acestuia?

Rezolvare. a) Pentru ca primul miop să vadă clar un obiect la infinit, trebuie ca acest obiect să producă o imagine virtuală la distanța punctului remotum care este 50 cm. Imaginea virtuală trebuind să se formeze între obiect și lentilă, aceasta din urmă va trebui să fie divergentă.

Vom avea deci

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{50} = \frac{1}{f}$$

de unde rezultă $f = -50$ cm.

Puterea ochelarilor, va fi egală cu

$$C = \frac{1}{f} = -\frac{1}{0{,}50} = -2 \text{ dioptrii.}$$

Punctum proximum (punctul cel mai aproape al vederii clare) de 5 cm va fi locul unde se produce imaginea virtuală a obiectului situat la distanța x și avem

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{50}$$

de unde $x = 5\frac{5}{9}$ cm.

Pentru al doilea miop, obiectul așezat la distanța d, va trebui să producă imaginea virtuală la distanța de 30 cm, astfel încît avem

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{50}$$

de unde $d = 75$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

6.72. Pe baza examenului oftalmologic, s-a stabilit că la un hipermetrop, punctum remotum se găsește înapoia retinei la distanța de 0,40 m. Se cere: a) Divergența ochiului. b) Poziția pe care o are punctum proximum. c) Corijarea vederii făcîndu-se cu o lentilă convergentă din crown cu indicele de refracție $n = 1{,}50$, care este raza de curbură a meniscului convex, dacă fața concavă a meniscului este standardizată pentru 3 dioptrii. d) Dacă diametrul lentilei, $d = 4$ cm, cu cît este ea mai groasă la centru decît la margini?

(R. F. Ch., nr. 4/1967)

Rezolvare. a) Divergența ochiului este: $R = 1/0{,}40 = -2{,}5$ dioptrii. b) Acomodarea, corespunzătoare vederii normale de 25 cm, este $A = 4$ dioptrii, iar punctum proximum corespunde unei distanțe optice dată de relația

$$P = A + R = 4 + (-2{,}5) = +1{,}5 \text{ dioptrii.}$$

Acest punct se găsește față de ochi la distanța $D_p = \frac{1}{P} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66$ m $=$ $= 66$ cm.

c) Lentila care corijează defecțiunea are convergență egală și de sens contrar cu distanța dioptrică a punctului remotum, adică $C = +2{,}5$ dioptrii, iar raza de curbură a feței concave este, $R_2 = 1/3 = 0{,}333$ dioptrii. Raza feței convexe, rezultă din relația

$$C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right); \quad R_1 = \frac{(n-1)R_2}{CR_2 + (n-1)} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}333}{2{,}5 \cdot 0{,}333 + 0{,}5} = 0{,}125 \text{ m.}$$

d) Din fig. 241 se vede că grosimea la mijlocul lentilei, este

$$\Delta = h_1 - h_2 \qquad (1)$$

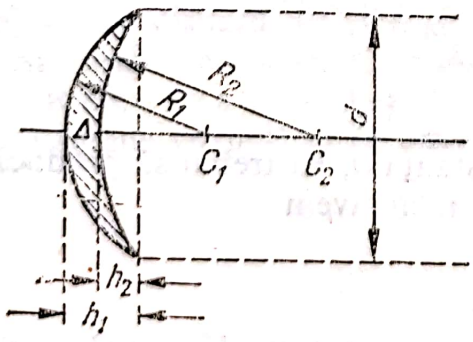


Fig. 241

Din relațiile geometrice cunoscute, se pot calcula ușor mărimile h_1 și h_2

$$h_1^2 - 2R_1h_1 + \frac{d^2}{4} = 0,$$

$$h_2^2 - 2R_2h_2 + \frac{d^2}{4} = 0,$$

$$h_1 = 1{,}6 \text{ mm},$$

$$h_2 = 0{,}6 \text{ mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în relația (1) obținem $\Delta = 1$ mm.

6.73. Un cercetător cu distanța optimă a vederii $p'_2 = 25$ cm, studiază o substanță la un microscop, care are grosismentul $G = 675$ și distanța dintre obiectiv și ocular, $l = 388$ mm. El așază substanța în fața obiectivului la distanța $p = 6{,}1$ mm și îi vede particulele mărite la un diametru $d_i = 2{,}7$ mm. Se cere: a) Diametrul d_0 al particulelor. b) Distanțele p'_1 și p_2 la care se formează prima imagine față de obiectiv și de ocular. c) Grosismentele G_1 și G_2 ale obiectivului și ocularului. d) Distanțele focale f_1 și f_2 ale obiectivului și ocularului.

Rezolvare

a) $G = \dfrac{d_i}{d_0}$, $d_0 = \dfrac{d_i}{G} = \dfrac{2{,}7}{675} = 0{,}004$ mm.

b) $\dfrac{p'_1 p'_2}{p_1 p_2} = G$; $\dfrac{p'_1 \cdot p'_2}{p_1 (l - p'_1)} = G$,

$$\frac{250\, p'_1}{6{,}1\,(388 - p'_1)} = 675, \qquad p'_1 = 365{,}8 \text{ mm},$$

$$p_2 = l - p'_1 = 388 - 365{,}8 = 22{,}2 \text{ mm}.$$

$$G_1 = \frac{p'_1}{p_1} = \frac{365{,}8}{6{,}1} = 59{,}96, \quad G_2 = \frac{p'_2}{p_2} = \frac{250}{22{,}2} = 11{,}25$$

d) $\dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p'_1} = \dfrac{1}{6{,}1} + \dfrac{1}{365{,}8}$, $f_1 = 6$ mm.

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p'_2} = \frac{1}{22{,}2} - \frac{1}{250}; \quad f_2 = 24 \text{ mm}.$$

6.74. O lupt simplă are puterea de 50 dioptrii. Se cere: a) Unghiul sub care se vede prin această lupă un obiect cu lungimea de 1 mm. b) Dacă această

Scanned with OKEN Scanner

lupă se întrebuințează ca ocular al unui microscop al cărui obiectiv este o lentilă cu convergența de 100 dioptrii, care trebuie să fie distanța ce separă cele două lentile ale microscopului pentru ca puterea acestui instrument să fie de 1 000 dioptrii?

Rezolvare. a) Puterea unui instrument optic mai este definită ca unghiul sub care se vede, prin acest instrument, un obiect mic de lungime AB, adică

$$P = \frac{\alpha}{AB} = \frac{1}{F} \qquad (1)$$

de unde rezultă $\alpha = 50 \cdot 0{,}001 = 0{,}05$ rad $= 180 \cdot 0{,}05 / \pi = 2°51'20''$.

Din relația (1) scoatem de asemenea

$$F = \frac{100}{50} = 2 \text{ cm}.$$

Distanța focală a obiectivului este

$$f = \frac{100}{100} = 1 \text{ cm}.$$

Se știe că grosismentul unui microscop este egal cu produsul dintre grosismentul ocularului și mărirea obiectivului, adică

$$\frac{25}{2} \cdot \frac{\Delta}{1} = \frac{25}{0{,}1},$$

de unde rezultă $\Delta = 20$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

Optica fizică. Fizica atomică

31. Proprietățile luminii, optica fotonică, radioactivitatea, energia nucleară

a. Considerații teoretice

1. Pentru calcularea vitezei luminii la trecerea dintr-un mediu într-altul, se aplică formula

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2} = n$$

unde i și r sînt unghiurile de incidență și de refracție, c_1 și c_2 — vitezele de propagare a luminii în cele două medii, iar n — indicele de refracție.

2. Frecvența radiației luminoase este

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

unde c este viteza luminii, iar λ — lungimea de undă a radiației.

3. Interferența luminii în lame subțiri: diferența de drum a undelor care interferează, este

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}$$

unde d este grosimea lamei, n — indicele de refracție, i — unghiul de incidență, λ — lungimea de undă. Pentru $\Delta = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$ se obține lumină (maximum de interferență), iar pentru $\Delta = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ se obține întuneric (minimum de interferență).

4. Difracția luminii (fenomenul de ocolire a obstacolelor): lungimea de undă a razelor de lumină supuse fenomenului de difracție în cazul rețelelor de difracție este dată de relația

$$\lambda = (a + b) \sin \varphi$$

unde a și b sînt lățimile unui interval transparent și a unui interval opac, iar φ este unghiul dintre razele de lumină, înainte și după difracție pentru care se obține un maxim de ordinul I.

Pentru un spectru de ordinul n, avem

$$n\lambda = (a + b) \sin \varphi.$$

5. Energia unui foton este dată de relația

$$\varepsilon = h\nu$$

unde $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J·s, este constanta lui Planck, iar ν — frecvența radiației.

6. La smulgerea unui fotoelectron dintr-un metal se aplică relația lui Einstein

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + W_i$$

unde $m v^2/2$ este energia cu care fotoelectronul părăsește metalul, iar W_i — energia de ieșire pentru învingerea forțelor de legătură.

7. Pragul fotoelectric este frecvența minimă ν_0 a radiației pentru care uni metal începe să emită fotoelectroni și este dată de relația

$$h\nu_0 = W_i$$

iar energia cinetică cu care fotoelectronii părăsesc metalul este

$$\frac{mv^2}{2} = h(\nu - \nu_0).$$

8. Legătura dintre energia și masa particulelor este dată de legea lui Einstein

$$W = M c^2,$$

care pentru un foton devine

$$\varepsilon = h\nu = m c^2.$$

9. Masa unei particule cu mișcarea relativistă, este dată de relația

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

unde m_0 este masa de repaus, v — viteza particulei, iar c — viteza luminii în vid.

10. *Postulatele lui Bohr. Postulatul I.* În mișcarea lor pe orbite (nivele staționare), atomii nu emit și nu absorb energie.

Scanned with OKEN Scanner

Postulatul II. Cînd un atom excitat sare de pe un nivel cu energia W_m pe alt nivel cu energia W_n, el emite radiații de frecvență ν, dată de relația

$$h\nu = W_m - W_n.$$

11. Relația dintre impulsul p și lungimea de undă asociată (de Broglie) λ a fotonului este

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}.$$

12. Legea dezintegrării radioactive este

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

unde N_0 este numărul nucleelor existente în momentul inițial, N — numărul nucleelor rămase nedezintegrate după timpul t, λ — constanta radioactivă a elementului, iar e — baza logaritmilor naturali.

13. Viața medie a atomilor radioactivi este

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

14. Timpul de înjumătățire a unei substanțe radioactive este

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}69315}{\lambda}$$

și nu depinde de cantitatea de substanță.

15. Unitatea de activitate curie (cu) este activitatea unei surse radioactive, care produce $3{,}7 \cdot 10^{10}$ dezintegrări pe secundă.

16. Activitatea unui preparat ca și numărul de atomi radioactivi, scade după legea

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

17. Activitatea specifică (numărul dezintegrărilor pe secundă) a unei cantități de m grame de substanță radioactivă este

$$N_s = \lambda N = \frac{0{,}693}{T} \cdot \frac{m\mathfrak{N}}{A}$$

unde N este numărul de particule, T — timpul de înjumătățire, $\mathfrak{N}$ — numărul lui Avogrado, iar A — numărul de masă al substanței radioactive.

18. Numărul de nuclee dezintegrate în timpul t, este dat de relațiile

$$N_d = N_0 \lambda t, \quad N_d = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima formulă este aplicabilă numai în cazul în care t este mult mai mic decît T.

19. Cantitatea (masa) de substanţă radioactivă m, care apare în urma dezintegrării unei cantităţi M de substanţă radioactivă în timpul t, este

$$m = M \cdot \frac{A_m}{A_M}(1 - e^{-\lambda t})$$

unde A_m şi A_M sînt masele unui atom-gram din substanţa care rezultă şi cea care se dezintegrează.

20. Starea de echilibru secular între două specii radioactive genetic legate, în cazul în care $\lambda_g < \lambda_d$, este dată de relaţia

$$\lambda_g N_g = \lambda_d N_d$$

unde indicii g şi d se referă la substanţele generatoare şi respectiv derivată.

21. Defectul de masă este dat de relaţiile

$$\Delta m = M - (m_A + m_B) = \frac{W}{c^2},$$

$$W = \Delta m \cdot c^2 = [Z \cdot m_p + (A - Z)\, m_n - M]\, c^2$$

unde M este masa atomului, m_A şi m_B sînt masele substanţelor rezultate prin dezintegrare, W — energia de legătură, c — viteza luminii în vid, Z şi A — numărul de protoni şi de neutroni ai nucleului, iar m_p şi m_n — masele protonului şi a neutronului.

22. Forţa cu care un cîmp electric acţionează asupra unei sarcini electrice este

$$F = eE$$

unde e este sarcina particulei, iar E intensitatea cîmpului electric.

23. Forţa cu care un cîmp magnetic acţionează asupra unei sarcini electrice e, care se mişcă cu viteza v perpendicular pe cîmpul magnetic, este

$$F = B e v$$

unde B este inducţia magnetică a cîmpului.

24. Unităţi de măsură şi mărimi importante în fizica atomică:

1 ångström (Å) $= 10^{-7}$ mm $= 10^{-8}$ cm $= 10^{-10}$ m.

Unitatea atomică de masă este amu

1 amu $= 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ g $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

Unitatea de energie este electronvoltul (eV) cu multiplii săi keV şi MeV

1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J. 1 keV $= 10^3$ eV, 1 MeV $= 10^6$ eV.

Scanned with OKEN Scanner

Energia corespunzătoare unei amu este

$$1 \text{ amu} = 1{,}660 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931{,}16 \text{ MeV}.$$

Masele protonului neutronului și electronului sînt

$$m_p = 1{,}007597 \text{ amu}, \quad m_n = 1{,}008987 \text{ amu},$$

$$m_e = 5{,}486 \cdot 10^{-4} \text{ amu} = 9{,}108 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0{,}511 \text{ MeV}.$$

Masa particulei alfa, $m_\alpha = 4{,}0019$ amu $= 6{,}6444 \cdot 10^{-27}$ kg.
Numărul lui Avogadro, $\mathfrak{N} = 6{,}025 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

b. Probleme

7.1. Viteza luminii în aer fiind $v_a = 300\,000$ km/s, iar în sticlă $v_s = 200\,000$ km/s, să se determine indicele de refracție al sticlei.

Rezolvare.

$$n = \frac{v_a}{v_s} = \frac{300\,000}{200\,000} = 1{,}5.$$

7.2. Lungimea de undă a radiației roșii dată de hidrogen în vid, este de 656,3 nm (un nanometru este egal cu 10^{-6} mm). Să se calculeze lungimea de undă a aceleiași radiații în sticlă, știind că indicele de refracție, pentru aceste radiații, este egal cu 1,6.

Rezolvare. Frecvența radiației fiind aceeași, putem scrie

$$n = 1{,}6 = \frac{c_v}{v_s} = \frac{\lambda_v \cdot \nu}{\lambda_s \cdot \nu} = \frac{\lambda_v}{\lambda_s} = \frac{656{,}3}{\lambda_s}$$

de unde rezultă

$$\lambda_s = \frac{656{,}3}{1{,}6} = 110{,}2 \text{ nm}.$$

7.3. Cu ajutorul rețelei optice a unei prisme cu indicele de refracție $n = 1{,}5$ și unghiul de refringență $A = 3'26''$ se obțin pe un ecran franje de interferență, sursa de lumină monocromatică avînd lungimea de undă $\lambda = 5\,000$ Å. Se cere: a) Distanța dintre două franje vecine întunecate. b) Numărul maxim N de franje de interferență care se obțin, dacă distanța de la prismă la ecran este $d = 5$ m. c) Impulsul fotonilor sursei de lumină.

32 — c. 120

Scanned with OKEN Scanner

Indicație și răspuns. a) Se aplică formula rețelelor optice pentru lumina monocromatică ținînd seamă că unghiul de deviație al prismei, $\Delta = (n-1)A$ este egal cu al rețelei, iar $a = b$ și se obține

$$2a(n-1)A = \lambda, \quad a = \frac{\lambda}{2(n-1)A} = 0{,}5 \text{ mm}.$$

b) Lățimea totală a franjelor, $l = d \operatorname{tg} \varphi = d(n-1)A$, iar numărul de franje este

$$N = \frac{l}{a} = \frac{2d(n-1)^2 A^2}{\lambda} = 5$$

(unghiul A se va exprima în radiani).

c) Impulsul fotonilor este

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{5 \cdot 10^{-7}} = 1{,}325 \cdot 10^{-27} \text{ kg·m/s}.$$

7.4. Pe o picătură de apă de formă sferică, cu diametrul $d = 10^{-9}$ m și temperatura $t_0 = 25°C$ cade un fascicul de radiații monocromatice cu lungimea de undă $\lambda = 7 \cdot 10^{-6}$ m transformînd-o în vapori. Care este numărul fotonilor absorbiți de picătura de apă?

(R. F. Ch., nr. 8/1966)

Rezolvare. Energia necesară evaporării apei este

$$W = \frac{\pi d^3}{6} \rho [c(t - t_0) + l] = \frac{3{,}14 \cdot 10^{-27}}{6} \cdot 10^3 (4\,187 \cdot 75 +$$

$$+ 2{,}26 \cdot 10^6) = 13{,}45 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Energia unui foton de radiație este

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{-6}} = 2{,}84 \cdot 10^{-20} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Numărul fotonilor este

$$n = \frac{W}{\varepsilon} = \frac{13{,}45 \cdot 10^{-19}}{2{,}84 \cdot 10^{-20}} \approx 47.$$

7.5. Să se găsească masa fotonului de lumină vizibilă, lungimea de undă a acesteia fiind $\lambda = 5\,000$ Å (angström).

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Folosind formulele lui Planck și Einstein, avem

$$\varepsilon = h\nu = mc^2; \quad m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Ținînd seama că $\nu = c/\lambda$ și că 1 Å $= 10^{-10}$ m, obținem

$$m = \frac{h}{c\lambda} = \frac{6{,}6.10^{-34}}{3 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 4{,}4 \cdot 10^{-38}\ \text{kg}.$$

7.6. Lungimea de undă medie a radiației unui bec cu incandescență este de 12 000 Å. Să se găsească numărul fotonilor emiși de bec, care are $P = 200$ W, în unitatea de timp.

Rezolvare. Energia unui foton este egală cu

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{12 \cdot 10^{-7}} = 1{,}65 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Numărul fotonilor emiși de bec într-o secundă este

$$n = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{2 \cdot 10^{2}}{1{,}65 \cdot 10^{-19}} = 1{,}21 \cdot 10^{21}.$$

7.7. Să se calculeze energia fotonului ($\lambda = 5\,000$ Å) și energia cinetică din mișcarea de translație a unei molecule de hidrogen la temperatura camerei ($t = 20°$C, $T = 293°$K).

Rezolvare. Energia fotonului este

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{5\,000 \cdot 10^{-10}} = 3{,}96 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Din teoria cinetico-moleculară se știe că energia moleculei este egală cu

$$W = \frac{3}{2} kT = 1{,}5 \cdot 0{,}138 \cdot 10^{-22} \cdot 293 = 6 \cdot 10^{-21}\ \text{J}.$$

7.8. Cu ajutorul unei lentile plan-convexe așezată pe o placă plană de sticlă (fig. 242) s-au observat inelele lui Newton în lumină albastră reflectată cu lungimea de undă $\lambda_a = 4\,500$ Å. S-a găsit astfel că inelul al treilea luminos are raza $r_3 = 1{,}06$ mm. Schimbîndu-se lumina albastră cu lumină roșie, s-a găsit pentru inelul al cincilea luminos o rază $r_5 = 1{,}77$ mm. Se cere:

a) Distanța focală a lentilei. b) Lungimea de undă a luminii roșii. c) Se umple spațiul de aer dintre lentilă și placă cu un strat de benzen cu indicele

de refracție $n = 1{,}5$. Care este raza inelului al treilea luminos în lumină albastră?

Rezolvare. a) Considerăm spațiul dintre placă și lentilă ca o placă subțire de grosime d, în care razele pătrund normal ($\sin i = 0$). Grosimea lamei se deduce din relația geometrică $r^2 = d(2R - d) \approx 2Rd$; $d = r^2/2R$. Întrucît pierderea de semiundă are loc în reflexia pe suprafața de separație a stratului de aer cu fața de sticlă, semiunda se va lua cu semnul plus. Fiind vorba de lamă de aer, $n = 1$. Condiția pentru formarea inelelor luminoase devine astfel

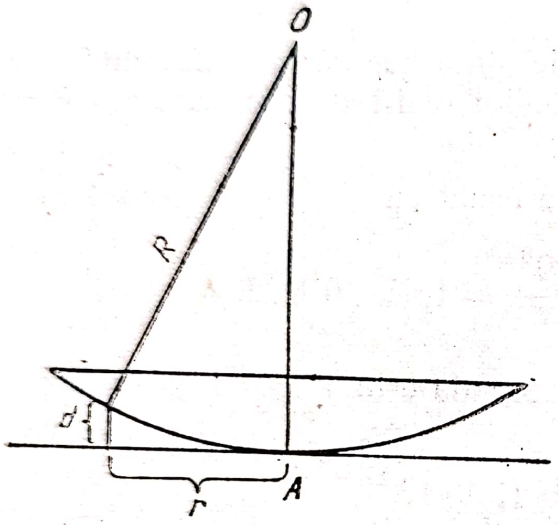


Fig. 242

$$2k \cdot \frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = 0,$$

$$k\lambda = 2dn + \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{R}n + \frac{\lambda}{2}.$$

Din această relație rezultă formula generală

$$R = \frac{nr^2}{\lambda\left(k - \frac{1}{2}\right)}. \qquad (1)$$

Pentru inelul al treilea $K = 3$ și pentru $n = 1$, avem

$$R = \frac{1{,}06^2 \cdot 10^{-6}}{2{,}5 \cdot 4\,500 \cdot 10^{-10}} = 1\text{ m}; \quad f = \frac{R}{2} = 0{,}5\text{ m}.$$

b) $$\lambda_r = \frac{r_5^2}{R\left(K - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1{,}77^2}{1 \cdot 4{,}5} = 0{,}6962 \cdot 10^{-6}\text{ m} = 6\,962\text{ Å}.$$

În acest caz $n = 1{,}5$ și din (1) rezultă

c) $$r_3 = \sqrt{\frac{R\lambda\left(k - \frac{1}{2}\right)}{n}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 4\,500 \cdot 10^{-10} \cdot 2{,}5}{1{,}5}} = 0{,}274\text{ mm}.$$

7.9. Între două lentile plan-convexe așezate una lîngă alta cu fețele plane în afară, se obțin inele Newton prin reflexie. Dacă razele lentilelor sînt respectiv R_1 și R_2, iar lungimea de undă λ, să se determine raza r a inelului întunecat de ordinul m.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Desenînd cele două lentile, una lîngă alta, se observă ușor că lama de aer dintre fețele convexe are grosimea

$$d = d_1 + d_2 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{r^2(R_1 + R_2)}{2R_1R_2}.$$

Condiția de formare a inelelor întunecate este

$$(2m+1)\frac{\lambda}{2} = 2d + \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2(R_1 + R_2)}{R_1R_2} + \frac{\lambda}{2}.$$

Din această relație rezultă

$$m\lambda = \frac{r^2(R_1 + R_2)}{R_1R_2}, \qquad r = \sqrt{m\lambda \cdot \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}.$$

7.10. Cu ajutorul unui impuls $p = 5 \cdot 10^{-27}$ kg · m/s se bombardează o placă de magneziu. Cunoscînd energia de ieșire $W_i = 3{,}46$ eV a fotoelectronilor desprinși din metal și masa lor de repaus $m_0 = 26{,}993$ amu, se cere: a) Pragul fotoelectric al magneziului. b) Energia necesară pentru dislocarea și difuzarea fotoelectronilor. c) Energia cinetică și frecvența fotoelectronilor emiși. d) Masa relativistă a fotoelectronilor.

Rezolvare.

a) $\nu_0 = \dfrac{W_i}{h} = \dfrac{3{,}46 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{6{,}625 \cdot 10^{-34}} = 0{,}835 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}.$

b) $W = pc = 5 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8 = 15 \cdot 10^{-19}$ J.

c) $\dfrac{m_0 v^2}{2} = W - W_i = 15 \cdot 10^{-19} - 5{,}54 \cdot 10^{-19} = 9{,}46 \cdot 10^{-19}$ J.

Frecvența fotoelectronilor după desprindere rezultă din relația

$$\frac{m_0 v^2}{2} = h(\nu - \nu_0), \quad \nu = \frac{m_0 v^2}{2h} + \nu_0 =$$

$$= 1{,}42 \cdot 10^{15} + 0{,}835 \cdot 10^{15} = 2{,}255 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}.$$

d) Viteza fotoelectronilor rezultă din expresia energiei cinetice

$$\frac{m_0 v^2}{2} = 9{,}46 \cdot 10^{-19}, \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{-19}}{26{,}993 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}} =$$

$$= \sqrt{41{,}73 \cdot 10^6} = 6\,460\ \text{m/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Masa în mișcarea relativistă este

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{6{,}46\cdot 10^3}{3\cdot 10^8}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{4{,}3}{10^{10}}}} \approx m_0.$$

7.11. Röntgenul (R) sau doza de iradiație reprezintă numărul de particule iradiate, γ, dintr-un centimetru cub de aer la presiunea și temperatura normale, care se încarcă cu o sarcină electrică $Q = 3{,}33 \cdot 10^{-10}$ C. Se cere:

a) Care este numărul N de particule ionizate din 1 cm³? b) La ce sarcină electrică pe 1 kg de aer ionizat, corespunde 1 R. c) Care este energia disipată de radiațiile care au doza de 1 R, dacă o particulă ionizată produce 33 eV?

(R. F. Ch., nr. 5/1965)

Rezolvare. a) Se știe că un ion se încarcă cu o sarcină electrică $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, deci numărul de particule ionizate este

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{3{,}33\cdot 10^{-10}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 2{,}08\cdot 10^9.$$

b) $q = \frac{Q}{m} = \frac{3{,}33\cdot 10^{-10}}{1{,}293\cdot 10^{-6}} = 2{,}58\cdot 10^{-4}$ C/kg.

c) $W = 2{,}08\cdot 10^9 \cdot 33 \cdot 1{,}601\cdot 10^{-19}$ J/cm³ $= 1{,}1\cdot 10^{-2}$ J/m³.

7.12. Izotopul radioactiv ^{90}Sr are timpul de înjumătățire $T = 20$ ani $= 6{,}3\cdot 10^8$ s. Se cere:

a) Ce fracțiune din cantitatea inițială de nuclee rămîne nedezintegrată după 10 ani. b) Care este activitatea specifică a izotopului (numărul de dezintegrări pe secundă).

Rezolvare.

a) $n = \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{0{,}693}{20}\cdot 10} = e^{-0{,}3465} = 0{,}708.$

b) Numărul de nuclee cuprinse într-un gram de substanță este egal cu

$$N = \frac{m\mathfrak{N}}{A} = \frac{1\cdot 6{,}025\cdot 10^{23}}{90} = 6{,}69\cdot 10^{21}.$$

Activitatea izotopului pentru 1 g este

$$N_s = \lambda N = \frac{0{,}693}{6{,}3\cdot 10^8}\cdot 6{,}69\cdot 10^{24} = 7{,}35\cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}\,\text{kg}^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.13. În sîngele unui om s-a introdus 1 cm³ soluție conținînd izotopul artificial ^{24}Na a cărui activitate este $A_0 = 2\,000$ particule pe secundă. Activitatea unui centimetru cub de sînge, înregistrată după 5 ore, a fost $A = 19$ particule pe minut. Știind că timpul de înjumătățire al ^{24}Na este de 15 ore, se cere volumul ocupat de sîngele omului.

Rezolvare. Dacă V este volumul ocupat de sîngele omului, putem scrie

$$V \cdot A = A_0 e^{-\lambda t}, \quad \ln V = \ln \frac{A_0}{A} - \lambda t.$$

Făcînd calculele obținem $V = 5$ l.

7.14. Să se calculeze frecvența radiației emise de atomul de hidrogen, la tranziția electronului de valență de pe orbita a doua pe prima, știind că: raza medie a primei orbite electronice este $r_1 = 0{,}528 \cdot 10^{-10}$ m, raza medie a celei de a doua orbite $r_2 = 2{,}112 \cdot 10^{-10}$ m, $h = 6{,}624 \cdot 10^{-34}$ J · s, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $\varepsilon_r = 1$. Orbitele electronice se consideră circulare.

(R. F. Ch., nr. 7/1966)

Rezolvare. Energia totală a electronului pe o anumită orbită este

$$W = \frac{mv^2}{2} + W_p. \qquad (1)$$

Energia potențială a unei sarcini q aflată în cîmpul electric creat de o sarcină punctiformă Q este dată de relația

$$W_p = \frac{qQ}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r} = 9 \cdot 10^9 \frac{q \cdot Q}{\varepsilon_r \cdot r}.$$

În cazul nostru $Q = +e$ (sarcina nucleului hidrogenului), iar $q = -e$ (sarcina electronului). Electronul aflat pe orbita de rază r, va avea deci energia potențială

$$W_p = -\frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^2}{\varepsilon_r \cdot r}.$$

Pe de altă parte, ținînd seamă că forța centripetă a mișcării electronului în jurul nucleului este tocmai forța de atracție coulombiană, avem

$$\frac{mv^2}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{e^2}{\varepsilon_r \cdot r}; \quad mv^2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^2}{\varepsilon_r \cdot r}.$$

Făcînd înlocuirile în (1) obținem

$$W = 4{,}5 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^2}{\varepsilon_r \cdot r} - 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^2}{\varepsilon_r \cdot r} = -4{,}5 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^2}{\varepsilon_r \cdot r}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform postulatului al doilea al lui Bohr, avem

$$h\nu = W_2 - W_1 = -4{,}5 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^2}{\varepsilon_r \cdot r_2} + 4{,}5 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^2}{\varepsilon_r \cdot r_1} =$$

$$= 4{,}5 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^2}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\nu = 4{,}5 \cdot 10^9 \cdot \frac{e^2}{h \cdot \varepsilon_r}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 4{,}5 \cdot 10^9 \cdot \frac{2{,}45 \cdot 10^{-38}}{6{,}625 \cdot 10^{-34}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{0{,}528 \cdot 10^{-10}} - \frac{1}{2{,}212 \cdot 10^{-10}}\right) = 1{,}73 \cdot 10^{15}\,(1{,}80 - 0{,}45) =$$

$$= 2{,}49 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}.$$

7.15. Preparatul RaD în echilibru cu produsele sale de dezintegrare, emite 10^5 particule afla într-o secundă. Cîți atomi de RaD, RaE și Po sînt conținuți în preparat? Cîte particule beta din RaD și RaE emite preparatul într-o secundă știind că timpul de înjumătățire al RaD este 22 ani = $= 6{,}9 \cdot 10^8$ s, al RaE = 5 ani = $1{,}57 \cdot 10^8$ s, iar al Po este 140 zile = $1{,}2 \cdot 10^7$ s.

Rezolvare. În virtutea echilibrului radioactiv, RaD, RaE și Po suferă un același număr de dezintegrări în timp de o secundă, adică numărul de particule beta emise într-o secundă de către RaD sau RaE este egal cu numărul de particule alfa emis de Po. Numărul de atomi din fiecare specie se găsește din condiția ca activitățile lor să fie egale, adică

$$\lambda_{\text{RaD}} N_{\text{RaD}} = \lambda_{\text{RaE}} N_{\text{RaE}} = \lambda_{\text{Po}} N_{\text{Po}} = 10^5\ \text{s}^{-1}. \qquad (1)$$

Constantele de dezintegrare ale produselor sînt:

$$\lambda_{\text{RaD}} = \frac{0{,}693}{T_{\text{RaD}}} = \frac{0{,}693}{6{,}9 \cdot 10^8} = 10^{-9}\ \text{s}^{-1}.$$

$$\lambda_{\text{RaE}} = \frac{0{,}693}{T_{\text{RaE}}} = \frac{0{,}693}{1{,}57 \cdot 10^8} = 4{,}4 \cdot 10^{-9}\ \text{s}^{-1},$$

Înlocuind în relatia (1) obținem:

$$\lambda_{\text{Po}} = \frac{0{,}693}{T_{\text{Po}}} = \frac{0{,}693}{1{,}2 \cdot 10^7} = 57{,}75 \cdot 10^{-9}\ \text{s}^{-1},$$

$$N_{\text{RaD}} = \frac{10^5}{10^{-9}} = 10^{14}\ \text{atomi},\quad N_{\text{RaE}} = \frac{10^5}{4{,}4 \cdot 10^{-9}} = 22 \cdot 10^{12}\ \text{atomi},$$

$$N_{\text{Po}} = \frac{10^5}{57{,}75 \cdot 10^{-9}} = 17{,}3 \cdot 10^{11}\ \text{atomi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.16. Într-un minereu de uraniu ^{238}U cu timpul de înjumătățire $T = 4{,}5 \cdot 10^9$ ani s-a găsit, sub formă de impurități, plumb ^{206}Pb. Știind că într-un gram de uraniu s-au găsit 0,2 g de plumb, se cere vîrsta minereului.

Rezolvare. Din relația cunoscută $N_d = \lambda t N$ rezultă prin înlocuire

$$\frac{m_{Pb} \cdot \mathfrak{N}}{A_{Pb}} = \lambda \cdot t \cdot \frac{m_U \cdot \mathfrak{N}}{A_U},$$

$$t = \frac{m_{Pb}}{m_U} \cdot \frac{A_U}{A_{Pb}} \cdot \frac{T}{0{,}693} = \frac{0{,}2}{1} \cdot \frac{238}{206} \cdot \frac{4{,}5 \cdot 10^9}{0{,}693} = 1{,}5 \cdot 10^9 \text{ ani}.$$

Timpul t se poate scoate și din formula

$$m_{Pb} = m_U \cdot \frac{A_{Pb}}{A_U}(1 - e_{-\lambda t}).$$

7.17. O bombă atomică are o încărcătură de $^{235}_{92}U$, care echivalează cu $M = 30\,000$ t de trotil. Cunoscînd echivalentul termic al trotilului, $J = 4{,}18 \cdot 10^6$ J/kg, timpul de înjumătățire al uraniului, $T = 8{,}5 \cdot 10^8$ ani $= 2{,}68 \cdot 10^{16}$ s și știind că fiecare fisiune atomică a bombei dezvoltă o energie $W = 2 \cdot 10^8$ eV, se cere:

a) Cantitatea de $^{235}_{92}U$ consumată de fisiunea nucleară spontană a bombei.

b) În cît timp s-ar dezintegra pe cale naturală cantitatea de uraniu aflată în bombă?

Rezolvare. a) Dacă N_0 este numărul atomilor de uraniu care fisionează putem scrie

$$N_0 \cdot W = M \cdot J, \qquad \frac{m\mathfrak{N}}{A} W = M \cdot J,$$

$$m = \frac{A \cdot M \cdot J}{\mathfrak{N} \cdot W} = \frac{235{,}3 \cdot 10^7 \cdot 4{,}18 \cdot 10^6}{6{,}025 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}520 \text{ kg}.$$

b) Pentru dezintegrarea totală, putem pune condiția ca numărul nucleelor rămase nedezintegrate să fie egal cu 1, adică

$$1 = N_0 e^{-\lambda t}, \quad e^{\lambda t} = N_0, \quad \lambda t = \ln N_0,$$

$$t = \frac{1}{\lambda} n N_0 = \frac{8{,}5 \cdot 10^5}{0{,}693} \ln \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 4{,}18 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} =$$

$$= \frac{8{,}5 \cdot 10^5}{0{,}693} \cdot 2{,}3 \lg 3{,}9 \cdot 10^{24} = 2{,}82 \cdot 10^6 \cdot 24{,}59 = 0{,}693 \cdot 10^8 \text{ ani}.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.18. Un preparat dintr-o substanță radioactivă este pus într-un calorimetru de capacitate calorică 16,748 J/grd. Cu cît crește temperatura în 10 ore, dacă preparatul are o activitate de $7,4 \cdot 10^9\ s^{-1}$ (0,2 curie) și emite particule α avînd energia egală cu 5 MeV.

(R. M. F., nr. 12/1953)

Rezolvare. Dacă A este numărul de particule dezintegrate într-o secundă (activitatea), iar W_α – energia unei particule, energia calorică produsă de preparat este

$$Q = AW_\alpha t = 7,4 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,6 \cdot 10^4 = 213,12\ J.$$

Creșterea de temperatură este

$$\Delta t = \frac{Q}{C} = \frac{213,12}{16,748} = 12,79\ ^\circ C.$$

7.19. Un atom de heliu ionizat are un electron pe prima orbită de rază 0,26 Å. Să se calculeze forța de atracție electrostatică dintre electron și nucleu și forța cu care se atrag masele lor dacă n-ar fi electrizate. Se dă masa nucleului de heliu egală cu $3,34 \cdot 10^{-24}$ g și constanta atracției universale $6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

(R. M. F., nr. 6/1953)

Rezolvare. Sarcina electrică a electronului fiind egală cu $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, iar a nucleului de heliu $e' = 3,2 \cdot 10^{-19}$ C, vom avea în primul caz

$$F = \frac{ee'}{r^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}}{(0,26 \cdot 10^{-10})^2} = 0,755 \cdot 10^{-16}\ N.$$

Masa electronului fiind egală cu $m = 9,10^{-31}$ kg, iar aceea a heliului, $m' = 3,34 \cdot 10^{-27}$ kg, în al doilea caz, avem

$$F' = k\frac{mm'}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot 3,34 \cdot 10^{-27}}{(0,26 \cdot 10^{-10})^2} = 3 \cdot 10^{-46}\ N.$$

7.20. Fluxul de electroni necesar unui microscop electronic este emis de un tub cu raze catodice în care diferența de potențial este U. Cunoscînd masa electronului m, constanta lui Planck h și viteza luminii c, să se calculeze viteza v a electronilor, lungimea de undă asociată λ și mărimea cuantei de energie ε a fluxului de electroni.

(R. M. F., nr. 12/1954)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare.

$$eU = \frac{mv^2}{2}, \qquad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Lungimea de undă a undei asociate este dată de formula lui de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

Mărimea cuantei de energie este egală cu

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = c\sqrt{2meU}.$$

7.21. Să se calculeze tensiunea U, aplicată unui tub cu raze Roentgen, dacă în spectrul continuu emis de acest tub nu există radiații cu lungimi de undă mai mici decît $\lambda = 0{,}206$ Å.

(R. M. F., nr. 6/1954)

Rezolvare. Din relațiile

$$\frac{mv^2}{2} = eU = h\nu = h\frac{c}{\lambda},$$

deducem

$$U = \frac{hc}{e\lambda} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-37} \cdot 3 \cdot 10^8}{0{,}206 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-10}} = 60 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

7.22. Să se calculeze masa unui atom al cărui nucleu emite o particulă alfa cu energia de 5,3 MeV, transformîndu-se în nucleu $^{206}_{82}$Pb. Masele atomilor He și $^{206}_{82}$Pb sînt egale respectiv cu $m_{He} = 4{,}00387$ amu și $m_{Pb} = 206{,}03859$ amu.

(Adm. Fac. de Chimie, 1965)

Rezolvare. Dacă M este masa atomului, defectul de masă va fi egal cu

$$\Delta m = M - (m_{He} + m_{Pb}) = \frac{5{,}3}{931{,}16} = 0{,}00569,$$

$$M = 0{,}00569 + 210{,}04246 = 210{,}04815 \text{ amu} = 210{,}04815 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} =$$

$$= 348{,}68 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

7.23. Energia maximă a electronilor emiși la dezintegrarea β a $^6_2$H este de 3,57 MeV. Să se calculeze masa atomului de $^6_2$He.

Rezolvare. Din relația

$$W = \Delta m c^2 = [Z m_p + (A - Z) m_n - M] c^2 ,$$

în care $Z = 2$, $A = 6$, $m_p = 1{,}00759$ amu, $m_n = 1{,}00898$ amu și $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, rezultă

$$M = Z \cdot m_p + (A - Z) m_n - \frac{W}{c^2} = (2 \cdot 1{,}00759 + 4 \cdot 1{,}00898) \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} -$$

$$- \frac{3{,}57 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}}{9 \cdot 10^{16}} = 10{,}04483 \cdot 10^{-27} - 0{,}0063466 \cdot 10^{-27} =$$

$$= 10{,}03848 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} = \frac{10{,}03848 \cdot 10^{-27}}{1{,}66 \cdot 10^{-27}} = 6{,}0472\ \text{amu}.$$

7.24. Un gram de ${}^{7}_{3}\text{Li}$ a fost bombardat cu protoni, rezultînd la fiecare reacție nucleară două particule α (${}^{4}_{2}\text{He}$). Cunoscînd masele $m_{\text{Li}} = 7{,}01822$ amu, $m_p = 1{,}00759$ amu, $m_\alpha = 4{,}00387$ amu și energia unui proton, egală cu 2,5 MeV, se cere:

a) Numărul de reacții necesare pentru dezintegrarea completă a ${}^{7}_{3}\text{Li}$. b) Energia totală eliberată. c) Viteza particulelor α.

Rezolvare.

a) $$N = \frac{m\mathfrak{N}}{A_{\text{Li}}} = \frac{1 \cdot 6{,}025 \cdot 10^{23}}{7} = 8{,}6 \cdot 10^{22}$$

b) Reacția nucleară este

$${}^{7}_{3}\text{Li} + {}^{1}_{1}p \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}\alpha,$$

$$m_{\text{Li}} + m_p = 7{,}01822 + 1{,}00759 = 8{,}12581\ \text{amu},$$

$$2m_\alpha = 2 \cdot 4{,}00387 = 8{,}00774\ \text{amu},$$

$$\Delta m = 8{,}02581 - 8{,}00774 = 0{,}01807\ \text{amu}.$$

Energia eliberată într-o reacție este

$$W_1 = \Delta m c^2 + W_p = 0{,}01807 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} + 2{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} =$$

$$= 31 \cdot 10^{-13}\ \text{J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Energia totală eliberată este

$$W = N \cdot W_1 = 8{,}6 \cdot 10^{22} \cdot 31 \cdot 10^{-13} = 266{,}6 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

c) Viteza particulelor α se deduce din relația

$$W_1 = 2 \cdot \frac{m_\alpha v^2}{2} = m_\alpha v^2;$$

$$v = \sqrt{\frac{W_1}{m_\alpha}} = \sqrt{\frac{31 \cdot 10^{-13}}{4{,}00387 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}} = 2{,}15 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

7.25. Izotopul $^{35}_{17}Cl$, bombardat cu neutroni, trece în radiosulful $^{35}_{16}S$, care este negatogen, avînd timpul de înjumătățire de 87 zile și cu eliberarea de 168 keV. Se cere:

a) Să se scrie reacțiile acestor dezintegrări. b) Să se calculeze energia reacției de formare a radiosulfului. Este exoenergetică sau endoenergetică? c) Numărul de neutroni necesari reacției inițiale, pentru ca radiosulful obținut să dezvolte prin dezintegrare o cantitate de căldură de 10 W, știind că neutronii își ating ținta în proporție de 75%. Se dau $m_p = 1{,}00759$ amu, $m_n = 1{,}00898$ amu, masa atomului de clor $m_{Cl} = 34{,}98007$ amu, masa atomului de sulf $m_s = 34{,}98022$ amu.

(Olimpiada de fizică, 1964)

Rezolvare. a) Reacțiile celor două dezintegrări sînt

$$^{35}_{17}Cl + {}^1_0n \rightarrow {}^{35}_{16}S + {}^1_1p + W,$$

$$^{35}_{16}S \rightarrow {}^0_{-1}e + {}^{35}_{17}Cl + 168 \text{ keV}.$$

b) Suma maselor particulelor inițiale este

$$m_{Cl} + m_n = 34{,}98007 + 1{,}00898 = 35{,}98905 \text{ amu}.$$

Suma maselor particulelor formate este

$$m_s + m_p = 34{,}98022 + 1{,}00759 = 35{,}98781 \text{ amu},$$

$$\Delta m = 35{,}98905 - 35{,}98781 = 0{,}00124 \text{ amu},$$

$$W = 931\, \Delta m = 931 \cdot 0{,}00124 = 1{,}154 \text{ MeV}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Reacția este exoenergetică.

c) Dacă la o dezintegrare se eliberează 168 keV = 0,168 MeV, pentru a degaja 10 W sînt necesare

$$\Delta n = \frac{10}{0{,}168 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 3{,}72 \cdot 10^{14} \text{ dezintegrări/s}$$

deci $3{,}72 \cdot 10^{14}$ nuclee de $^{35}_{17}S$ pe secundă.

Din legea dezintegrării radioactive

$$\Delta n = -n_0 \lambda \Delta t$$

deducem numărul inițial de nuclee de radiosulf

$$n_0 = \frac{\Delta n}{\lambda \Delta t} = \frac{\Delta n \cdot T}{0{,}693\, \Delta t} = \frac{3{,}72 \cdot 10^{14} \cdot 87 \cdot 86\,400}{0{,}693 \cdot 1} = 4{,}02 \cdot 10^{21}.$$

Fiecare nucleu de radiosulf provine dintr-un nucleu de $^{35}_{17}Cl$, bombardat de un neutron.

Numărul de neutroni necesari este dat de relația

$$0{,}75\, n = n_0, \quad n = \frac{n_0}{0{,}75} = \frac{4{,}02 \cdot 10^{21}}{0{,}75} = 5{,}38 \cdot 10^{21} \text{ neutroni.}$$

7.26. Nucleul de $^{59}_{27}Co$ captează un neutron și trece în radiocobalt, emițînd un foton gama. Radiocobaltul emite particule beta cu energia de 0,3 MeV însoțite de fotoni gama cu energia de 1,25 MeV; radiocobaltul are durata de înjumătățire de 5,3 a și trece într-un izotop al nichelului. Se cere:

a) Să se scrie ecuațiile nucleare și să se arate structura nucleului de radiocobalt. b. Să se determine timpul în care intensitatea radiației scade cu 25% c) Un foton gama emis de radiocobalt, generează o pereche electronpozitron, care au mase și energii egale. Care este viteza fiecăruia dintre aceste particule neglijînd ariația relativistă a masei. d) Cantitatea de căldură care se dezvoltă în 5,3 ore prin absorbirea integrală a electronilor și fotonilor emiși de 2 grame de radiocobalt.

(Olimpiada de fizică, 1965)

Rezolvare

a) $^{59}_{27}Co + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{60}_{27}Co^* + \gamma,$

$$^{60}_{27}Co^* \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{60}_{28}Ni + h\nu.$$

Structura nucleului de radiocobalt este

$$^{60}_{27}\mathrm{Co}^{*} = 27\,\mathrm{p} + 33\,\mathrm{n}.$$

b) Timpul în care intensitatea radiației scade cu 25%, este timpul după care $N = 0{,}75\,N_0$.

Rezultă că putem scrie

$$0{,}75\,N_0 = N_0\,e^{-\lambda t}; \quad t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{0{,}75} = 2{,}2 \text{ ani}.$$

c) $h\nu = {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{1}e + W_c$;

$$h\nu - 2m_0c^2 = 2\frac{m_0v^2}{2} = m_0v^2;$$

$$v = \sqrt{\frac{\varepsilon}{m_0} - 2c^2} = \sqrt{\frac{1{,}25\cdot10^6\cdot1{,}6\cdot10^{-10}}{9\cdot10^{-31}} - 2\cdot9\cdot10^{16}} = 2{,}05\cdot10^8 \text{ m/s}.$$

d) Numărul nucleelor inițiale este

$$N_0 = \frac{m\cdot\mathfrak{N}}{A} = \frac{6{,}025\cdot10^{23}\cdot2}{60} = 2\cdot10^{22}.$$

Numărul nucleelor dezintegrate în timpul $t = 5{,}3$ ore

$$N'_d = N_0\,\lambda\,t = 2\cdot10^{22}\cdot\frac{0{,}693}{5{,}3\cdot365\cdot24}\cdot5{,}3 = 1{,}58\cdot10^{18}.$$

Fiecare nucleu produce un ${}^{0}_{-1}e$ și un foton, deci o energie

$$W_1 = 0{,}3 + 1{,}25 = 1{,}55\,\mathrm{MeV} = 1{,}55\cdot1{,}6\cdot10^{-13} = 2{,}475\cdot10^{-13}\ \mathrm{J}.$$

Căldura produsă de toate nucleele dezintegrate este

$$Q = W_1\cdot N'_d = 2{,}475\cdot10^{-13}\cdot1{,}58\cdot10^{18} = 3{,}9\cdot10^5\ \mathrm{J}.$$

7.27. Un gram din cenușa unui os găsit într-o săpătură arheologică produce cinci dezintegrări β pe minut. Știind că un gram din cenușa unui os actual produce 15 dezintegrări β pe minut și că timpul de înjumătățire al radiocarbonului $^{14}_{6}\mathrm{C}^{*}$ este 5 650 ani, se cere:

a) Vîrsta osului găsit în săpătură. b) Ecuația reacției de dezintegrare a $^{14}_{6}\mathrm{C}^{*}$ și viteza electronului emis, dacă el are energia de 156 keV. Se neglijează variația relativistă a masei cu viteza; se dau $\ln 3 = 1{,}09861$ și masa electronului $m_e = 9\cdot10^{-31}$ kg.

(Olimpiada de Fizică, 1966)

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare

a) Cenușa proaspătă de os producea 15 dez/min, iar după t ani produce numai 5 dez/min. Putem scrie deci

$$5 = 15\,e^{-\lambda t}; \quad e^{\lambda t} = 3; \quad \lambda t = \ln 3;$$

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln 3 = \frac{T}{0{,}693} \cdot \ln 3 = \frac{5\,650 \cdot 1{,}09861}{0{,}693} = 8\,951 \text{ ani}.$$

b) ${}^{14}_{6}C^{*} \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}N + 156\,\text{keV}$,

$$\frac{m_e v^2}{2} = W, \quad v = \sqrt{\frac{2W}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 156 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{-31}}} = 2{,}35 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

7.28. Să se determine raza de curbură a traiectoriei unui electron care se deplasează cu viteza v într-un cîmp magnetic constant H, direcția deplasării fiind perpendiculară pe direcția lui H.

Aplicație: $v = 100\,000$ km/s, $H = 10^5/4\pi$ A/m.

Rezolvare. Sub acțiunea cîmpului magnetic, electronul este supus unei forțe $F = \mu_0 \mu_r Hev$ (e — sarcina electronului), perpendiculară pe traiectorie. Această forță este egală cu forța centrifugă, adică

$$\mu_0 \mu_r Hev = \frac{m v^2}{R}.$$

Din această relație rezultă

$$R = \frac{m v}{\mu \cdot \mu_r He} = \frac{9 \cdot 10^{-13} \cdot 10^8 \cdot 4\pi}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 5{,}62 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

7.29. Într-un balon în care s-a făcut vid se află un condensator ale cărui plăci sînt la distanța $d = 4$ cm una de alta și le este aplicată o tensiune U. Un electron se mișcă în cîmpul condensatorului. Se întreabă cît de mare trebuie să fie tensiunea U, pentru ca electronul să capete o viteză de 500 km/s după ce a parcurs distanța $l = 6 \cdot 10^{-5}$ cm? Se dă sarcina electronului, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și masa acestuia, $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

(R. M. F., nr. 1/1952)

Rezolvare. Intensitatea cîmpului electrostatic dintre plăcile condensatorului și forța la care este supus electronul sînt

$$E = \frac{U}{d}, \qquad F = eE = \frac{eU}{d}.$$

Din egalarea lucrului mecanic și a energiei cinetice efectuate de electron rezultă

$$\frac{eU}{d} \cdot l = \frac{mv^2}{2}\ ; \quad U = \frac{mdv^2}{2el} = \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^5}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^{-5}} = 46{,}875 \text{ V}.$$

7.30. Pe fețele interioare ale unui condensator electric plan se găsesc, inițial, un electron pe placa negativă și o particulă α pe placa pozitivă. Să se găsească viteza căpătată de fiecare particulă și lungimea de undă asociată fiecărei particule, atunci cînd, accelerate de diferența de potențial U aplicată plăcilor, particulele ating simultan un plan paralel cu plăcile. Să se găsească și raportul în care acest plan împarte distanța dintre plăci. Să se demonstreze că, indiferent de masele acestor particule, raportul energiilor este direct proporțional cu raportul sarcinilor lor.

(G. M. F., nr. 9/1954).

Rezolvare. Forțele care acționează asupra particulelor sînt egale cu

$$F_1 = \frac{e_1 U}{d} \quad \text{si} \quad F_2 = \frac{e_2 U}{d}$$

unde e_1 și e_2 sînt sarcinile electronului și respectiv a particulei α.

Dacă m_1 și m_2 sînt masele celor două particule, accelerațiile respective vor fi

$$a_1 = \frac{e_1 U}{m_1 d} \quad \text{si} \quad a_2 = \frac{e_2 U}{m_2 d}.$$

Mișcarea particulelor fiind uniform accelerată, cu viteza inițial zero, vom avea

$$d = \frac{1}{2} a_1 t^2 + \frac{1}{2} a_2 t^2 = \frac{U}{2d} t^2 \left(\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2} \right)$$

de unde rezultă

$$t = \frac{d \sqrt{2}}{\sqrt{U \left(\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2} \right)}}.$$

Vitezele particulelor sînt

$$v_1 = a_1 t = \frac{e_1 \sqrt{2U}}{m_1 \sqrt{\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2}}}\ ; \quad v_2 = \frac{e_2 \sqrt{2U}}{m_2 \sqrt{\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2}}}.$$

Lungimile de undă asociate sînt

$$\lambda_1 = \frac{h}{m_1 v_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{h}{m_2 v_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Raportul în care planul împarte distanța d este egal cu raportul spațiilor (al accelerațiilor) respective, adică

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{a_2} = \frac{e_1 m_2}{e_2 m_1}.$$

Raportul energiilor este proporțional cu

$$\frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{e_2}{e_1}.$$

Bibliografie

1. *Corneliu Buzatu*, **Culegere de probleme de fizică**, ed. III. Editura tehnică, București, 1964.
2. *N. P. Efremov, G. M. Ivanov, I. S. Sapiro*, **Culegere de probleme de mecanică tehnică** traducere din limba rusă, Editura tehnică, București, 1955.
3. *E. Friș, A. Timoreva*, **Curs de fizică generală**, v. I, II, III, traducere din limba rusă, Editura tehnică, București, 1964—1965.
4. *V. L. Chinsburg, L. M. Levin, M. S. Rabinovici, D. V. Sivuhin, E. S. Cetverikova*, **Culegere de probleme de fizică generală**, Partea a doua, traducere din limba rusă Editura tehnică, București, 1962.
5. *I. E. Irodov*, **Culegere de probleme de fizică atomică**, traducere din limba rusă, Editura tehnică, București, 1961.
6. *C. Maican, D. Tănase, A. Negulecu, A. Atanasiu*, **Culegere de probleme de fizică pentru învățământul mediu**, Editura didactică și pedagogică, București, 1963.
7. *C. Necșoiu*, **Culegere de probleme de fizică**, ed. I, Editura tehnică, București, 1958
8. *Popa Mircea și Ene Marin*, **Culegere de probleme de electrotehnică și electroenergetică**, Editura didactică și pedagogică, București, 1964.
9. *A. I. Raskatov*, **Probleme de electrotehnică și echipament electric**, traducere din limba rusă, Editura tehnică, București, 1956.
10. *Aurelian Stan, Mircea Grumăzescu*, **Probleme de mecanică și rezistența materialelor**, Editura tehnică, București, 1954.
11. *S. P. Strelkov, I. A. Ellin și I. A. Iakovlev*, **Culegere de probleme pentru cursul de fizică generală**, Partea I, traducere din limba rusă, Editura tehnică, București, 1952.
12. *Gh. Tomescu, P. Ghișoiu*, **Culegere de probleme de mecanică tehnică**, vol. I, Editura didactică și pedagogică, București, 1961.
13. *Dan Tașcă, Ion Băcanu*, **Culegere de probleme de hidraulică tehnică**, Editura tehnică București, 1962.

Scanned with OKEN Scanner

Tabla de materii

Prefață 5

Capitolul I. **Mecanica** 7

A. Cinematica 7

1. Mișcarea rectilinie 7
2. Mișcarea circulară 16
3. Mișcări compuse 21
4. Transmiterea mișcărilor, mecanisme și dispozitive 31

B. Statica 36

5. Compunerea și descompunerea forțelor, cupluri, momente, centrul de greutate 36
6. Echilibrul static al corpurilor, acțiunea și reacțiunea, forțe de frecare, mașini simple 50

C. Dinamica 76

7. Principiile dinamicii, forțele de inerție, echilibrul dinamic 76
8. Lucru mecanic, putere, energie. Teorema energiei cinetice, impulsul, legea conservării impulsului 95
9. Atracția universală, gravitația, rachete și sateliți 116

D. Noțiuni de rezistența materialelor 126

10. Deformații elastice, solicitări simple 126

Capitolul II. **Hidro- și aeromecanica** 135

A. Hidro-și aerostatica 135

11. Presiunea hidrostatică, forțele hidrostatice pe suprafețe plane și curbe, transmiterea presiunii prin fluide 135
12. Manometre, vase comunicante, densitatea amestecurilor, echilibrul lichidelor din vasele în mișcare 143
13. Principiul lui Arhimede, plutirea corpurilor, areometrie 154

B. Hidro-și aerodinamica 174

14. Curgerea fluidelor prin orificii și conducte, rezistența opusă de fluide la mișcarea corpurilor 174

Capitolul III. **Căldura și fizica moleculară** 191

A. Căldura și temperatura 191

15. Cantitatea de căldură, calorimetria, echivalentul mecanic al căldurii . 191

Scanned with OKEN Scanner

16. Dilatația corpurilor solide și lichide, termometria 202
17. Variația volumului, presiunii și densității gazelor cu temperatura. Legile gazelor perfecte 218
18. Schimbarea stării de agregare a materiei. Topirea — solidificarea, vaporizarea-condensarea. Higrometria 245
B. Fizica moleculară 263
19. Teoria cinetică moleculară a materiei. Fenomene moleculare în lichide 263
C. Noțiuni de termotehnică 277
20. Lucrul mecanic al gazelor și vaporilor, mașini termice 277
Capitolul IV. **Electricitatea** 287
A. Electrostatica 287
21. Acțiunea reciprocă a sarcinilor electrice, cîmpul și potențialul electrostatic, capacitatea electrică, condensatori 287
B. Electrocinetica 304
22. Legile curentului continuu, puterea și energia electrică 304
23. Curentul electric prin lichide și gaze, ... 344
C. Electromagnetismul 359
24. Acțiuni electromagnetice, inducția electromagnetică, mașini electrice de curent continuu 359
D. Curentul alternativ 382
25. Tensiunea, curentul și puterea în curent alternativ. Circuite și mașini de curent alternativ. Termoelectricitatea 382
Capitolul V. **Oscilații și unde. Acustica** 403
A. Oscilații și unde elastice. Acustica 403
26. Mișcarea oscilatorie armonică, legile pendulului; compunerea mișcărilor oscilatorii. Efectul Doppler-Fizeau, viteza sunetului 403
B. Oscilații și unde electromagnetice 427
27. Unde electromagnetice, circuite oscilante, tuburi electronice, radiocomunicații 427
Capitolul VI. **Optica** 435
28. Propagarea luminii, fotometria 435
29. Reflexia luminii 439
30. Refracția luminii 450
Capitolul VII. **Optica fizică. Fizica atomică** 493
31. Proprietățile luminii, optica fotonică, radioactivitatea, energia nucleară 493
Bibliografie 514

Scanned with OKEN Scanner